

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

78. Band, Heft 2

25. Februar 1959

S. 241—480

Geschichte.

Neugebauer, O.: The transmission of planetary theories in ancient and medieval astronomy. *Scripta math.* 22, 165—192 (1957).

Kurze Darstellung der Einflüsse, die durch die arithmetisch orientierte babylonische und die auf kinematischen Modellen beruhende griechische Astronomie auf die Entwicklung der indischen, islamischen und mittelalterlichen Astronomie ausgeübt wurden. Der Umstand, daß den indischen Astronomen die Verbesserungen des Ptolemaios unbekannt blieben, spricht für eine Übermittlung der hellenistischen Kenntnisse etwa um Christi Geburt, und zwar vermutlich vor allem auf dem Wege der Astrologie. Ein unmittelbarer Kontakt zwischen Mesopotamien und Indien braucht nicht stattgefunden zu haben, da jetzt feststeht, daß die babylonischen Rechenmethoden auch von hellenistischen Astronomen und Astrologen angewandt wurden. — Die indischen Astronomen entwickelten nicht nur die Trigonometrie weiter, sondern vereinfachten z. B. auch die Ermittlung der wahren aus der mittleren Länge. Dies geschah durch die sog. „Halbierung der Gleichung“, d. h. sukzessive Näherung mit Hilfe der Annahme eines Zwischenpunktes und abwechselnden Eingangs in die unabhängig voneinander tabulierten Funktionen Länge des Epizykelmittelpunktes und Anomaliedifferenz. — Vieles, was in islamischen Tafelwerken nicht aus Ptolemaios oder Theon stammt, ist auf indischen Einfluß zurückzuführen. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß dieses Material auch auf verlorene oder unbekannte griechische oder arabische Quellen zurückgeht. Auch von der persischen Astronomie weiß man noch fast gar nichts. — In der Astronomie des späteren Mittelalters vereinigte sich der Einfluß der islamischen Astronomie mit der direkten griechischen Überlieferung durch die Byzantiner. Leider sind fast gar keine der zahlreichen spätgriechischen Tafelwerke bis jetzt veröffentlicht oder untersucht, so daß über Einzelheiten bis jetzt nichts gesagt werden kann. — In einem umfangreichen Anhang behandelt Verf. im einzelnen die indische Planetentheorie, wobei die trigonometrischen Grundgedanken erstmals klar herausgearbeitet sind. Ferner ist der sehr lehrreiche kritische Apparat hervorzuheben.

H. Hermelink.

Busulini, Bruno: La reciprocità alle sorgenti della analisi infinitesimale. *Ann. Univ. Ferrara*, n. Ser. 5, 59—67 (1957).

Ausgehend von den geschichtlichen Betrachtungen über Stetigkeit und Differenzierbarkeit wird deren gemeinsamer Ursprung in der Idee der Reziprozität aufgewiesen.

J. J. Burckhardt.

Politano, Maria Luisa: Sull' „Analysis situs“ di Leibniz. *Archimede* 9, 178—180 (1957).

Die Verf. gibt den Inhalt der Leibnizschen Abhandlung *De analysi situs* (Math. Schriften, ed. C. I. Gerhardt V, Halle 1858, 178/83) wieder, scheint jedoch die deutsche Übersetzung von A. Buchenau (Leibniz: Die Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie I², Leipzig 1924, 69/76) und die dort gegebene Einführung (7/10) nicht zu kennen.

J. E. Hofmann.

Carruccio, Ettore: I fondamenti dell'analisi matematica nel pensiero di Agostino Cauchy. *Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat.* 16, 205—216 (1957).

Dieser Vortrag vom 7. V. 1957 vor dem Turiner mathematischen Seminar und der italienisch-französischen Universitätsgesellschaft bezieht sich 1. auf die Vorlesungen an der École Polytechnique [Œuvres, II. Sér., III (1897)], 2. auf die Exercices

d'analyse [Œuvres, II. Sér., XIII (1932)], 3. auf Akademie-Abhandlungen [Œuvres I. Sér., XI (1899) und dies. Zbl. 18, 340]. *J. E. Hofmann.*

Busolini, Bruno: Il ruolo dell'analogia nella teoria dei numeri reali secondo Dedekind. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser. 5, 79—83 (1957).

Das Studium von R. Dedekind „Was sind und was sollen die Zahlen“ zeigt, daß der Begriff der Analogie maßgebend ist. *J. J. Burckhardt.*

The George Sarton Memorial Issue. Isis 48, Part III, 283—346 (1957).

Main articles: **Dorothy Stimson:** Dr. Sarton and the History of Science Society (283—284). **May Sarton:** A celebration (285). **I. Bernard Cohen:** George Sarton (286—300). **James B. Conant:** George Sarton and Harvard University (301—305). **Charles and Dorothea Singer:** George Sarton and the history of science (306—310). **John F. Fulton:** George Sarton and the history of medicine (311—314). **José M. Millás Vallierosa:** George Sarton y la historia de la ciencia oriental (315—319). **Marshall Clagett:** George Sarton: Historian of medieval science (320—322). **Lynn Thorndike:** Some letters of George Sarton (1922—1925) (323—334). **Charles Mâlik:** George Sarton's study of arabic (355). **Katharine Strelsky:** Bibliography of the writings of George Sarton (336—346).

Luigi Fantappiè. Collect. Math. 9, 3—5 (1957) [Spanisch].

Errera, Alfred: Maurice Kraitchik. Mathesis 66, 306—309 (1957).

John von Neumann. 1903—1957. Math. Tables Aids Comput. 11, 127—128 (1957).

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

• **Saminsky, Lazare:** Physics and metaphysics of music and essays on the philosophy of mathematics. The Hague: Martinus Nijhoff; London: B. T. Batsford, Ltd. 1957. X, 151 p. s. 21, Gulden 10,45.

Das Buch enthält einige Aufsätze, deren zwei: The Roots of Arithmetic, und: Critique of New Geometrical Abstractions, dem Gebiet dieses Zbl. angehören; sie wurden anscheinend schon im Anfang dieses Jahrhunderts konzipiert. Der erste Aufsatz setzt sich auseinander mit Helmholtz' Zahlen und Messen, der zweite mit Russells Essai sur les fondements de la géométrie.

E. W. Beth.

Fokker, A. D.: Mathematik und physikalische Wirklichkeit. Euclides, Groningen 32, 241—243 (1957) [Holländisch].

• **Carnap, Rudolf:** Foundations of logic and mathematics. (Internat. Encyclopedia of unif. Sci. Vol. 1, Nr. 3.) 8th impression. Chicago: The University of Chicago Press 1957. IV, 71 p.

Unaltered 8th printing of the original 1939 edition (this Zbl. 23, 97). The work consists of three sections: I. Logical Analysis of Language: Semantics and Syntax, II. Calculus and Interpretation, III. Calculi and their application in Empirical Science. The contents of Section I has subsequently been developed in great detail in the author's Introduction to Semantics (Cambridge 1942), and conversely the present Section I could serve as a very readable introduction to the author's later work in semantics and syntax. Also the author's Einführung in die symbolische Logik (this Zbl. 56, 6) has, in the second part (Anwendungen der symbolischen Logik), numerous examples of calculi in empirical science supplementing the material in Section III.

Th. Hailperin.

• **Ladrière, Jean:** Les limitations internes des formalismes. Étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des mathématiques. (Collection de Logique Mathématique. Sér. B. II.) Louvain: E. Nauwelaerts; Paris: Gauthier-Villars 1957. XIII, 714 p. broché 650 frs.

Das Buch zerfällt wesentlich in drei Teile ungleichen Umfangs: 1. eine ausführliche Darstellung der „faits de limitation“ (Kap. I—IX, Note I—IV), 2. philosophische Betrachtungen über diese Tatsachen (Kap. X), 3. sehr ausführliche Beigaben, wie Bibliographie, Listen von Symbolen und Theoremen, usw. Der Verf. versucht nicht, eine einheitliche Darstellung der „faits de limitation“ zu bieten. Er

gibt, nach einigen einführenden Betrachtungen über die Problematik der Grundlagenforschung, über die Richtungen in dieser Forschung und über formale Systeme, Interpretationen und Modelle (Kap. I. und II), in Kap. III zunächst den Gödelschen Unvollständigkeitssatz mit Beweis (nach Gödel, dessen ursprüngliche Abhandlung in Note I zusammengefaßt wird); zum Schluß dieses Kap. wird die von Perelman u. a. geübte Kritik erörtert; leichter verständliche Beweise bzw. Beweisskizzen von Gödel selbst, Rosser u. a. werden in Note I wiedergegeben. Zusätze zum Theorem nach Kleene, Rosser und Kalmár folgen in Kap. IV. Kap. V ist den Folgen des Theorems hinsichtlich der Möglichkeit von Widerspruchsfreiheitsbeweisen gewidmet, Kap. VI den Folgen bezüglich des Entscheidungsproblems (vor allem nach Church, Kleene, Turing und Post; Zusätzliches in Note III). In Kap. VII wird dann die Hierarchie der arithmetischen Prädikate nach Kleene und Mostowski besprochen. Kap. VIII bringt die semantischen Analoga nach Tarski und Mostowski. Diese Erörterung wird zunächst fortgesetzt in Kap. IX, das weiter den Ergebnissen über „non-standard models“ (Skolem, Henkin, Wang und Rosser) und dem Theorem von Kleene-Rosser-Curry für die kombinatorische Logik gewidmet ist. Schließlich wird noch eingegangen auf die Versuche, ein logisches System zu konstruieren, für das der Gödelsche Satz nicht gilt (Church, Myhill und Wang). Die Behandlung ist ausführlich, sorgfältig und klar. Auf die gegenseitigen Beziehungen zwischen den verschiedenen Ergebnissen wird nach Möglichkeit eingegangen. Den wohlüberdachten philosophischen Betrachtungen in Kap. X möchte der Ref. weitgehend beistimmen.

E. W. Beth.

Bočvar, D. A.: Zur Frage der Paradoxa und zum Problem des erweiterten Prädikatenkalküls. Mat. Sbornik, n. Ser. 42 (84), 3—10 (1957) [Russisch].

The remarks of this paper refer to the author's formalization K_0 (this Zbl. 60, 22) of the extended predicate calculus. This is a formalization (proved consistent in the above mentioned paper) which does not use the theory of types but avoids the paradoxes by excluding all those of the usual rules of the extended predicate calculus which contain assertions of an existential character about objects or predicates (e. g. substitution rules allowing the introduction of particular predicates by definitions of the type

$$P(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{Def}}{=} \mathfrak{A} [x_1, \dots, x_n],$$

since this is tantamount to asserting the existence of a particular predicate P). — The author starts with some general semantic observations about formal systems with more than one interpretation and how such a non-uniqueness of interpretation may be removed by replacing each of the ambiguously interpretable symbols σ , by several symbols $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ and adding supplementary axioms which treat $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ asymmetrically. He then suggests that the symbol denoting application of function to argument in K_0 is ambiguously interpretable in this sense, viz $\Phi(x)$ can be interpreted either as “ Φ belongs to x as a property” or as “ x is a member of Φ ”. He proposes to remove this ambiguity by replacing $\Phi(x)$ by two symbolisms “ Φ in x ”, “ x ex Φ ” and adding axioms which are to have the effect of restricting the interpretations in such a way that “ Φ in x ” is only interpretable as “ Φ belongs to x as a property” and “ x ex Φ ” as “ x is a member of Φ ”. At the same time he proposes to introduce the symbolism $\Phi \langle x \rangle$ (“ Φ is founded on x ”) into K_0 by means of the axiom

$$\Phi \langle x \rangle \equiv \Phi(x) \vee (\exists y) (\Phi(y) \& y \langle x \rangle)$$

and to split this into two symbolisms “ Φ i x ” (Φ is part of the logical composition of x), “ x e Φ ” (x is a constituent of Φ). Before giving the axioms for the new system K he defines

$$\mathfrak{R}^e [\Phi] \stackrel{\text{Def}}{=} (\psi \text{ e } \Phi \rightarrow \overline{\psi \text{ e } \psi}), \quad \mathfrak{M}r [\Phi] \stackrel{\text{Def}}{=} (\Phi \text{ i } \psi \rightarrow \overline{\psi \text{ i } \psi}).$$

Predicates Φ satisfying Φ in $x \equiv x$ ex Φ are called sets, those satisfying $\mathfrak{M}r [\Phi]$ are called regular sets. The new axioms he proposes are: I. x ex $\Phi \rightarrow \Phi$ in x , II. x e $\Phi \rightarrow$

$\rightarrow \Phi i x$, III. $\psi \text{ ex } \Phi \rightarrow \Re^e[\psi]$, IV. $\Phi \text{ in } \psi \ \& \ \mathfrak{M}r[\psi] \rightarrow \psi \text{ ex } \Phi$, V. $(x)(x \text{ ex } \psi \rightarrow x \text{ ex } \Phi) \ \& \ y \text{ ex } \Phi \rightarrow (\psi \text{ in } y \rightarrow y \text{ ex } \psi)$, VI. (axiom of extensionality) $(x)(\Phi \text{ in } x \rightarrow x \text{ ex } \Phi) \ \& \ (x)(\psi \text{ in } x \rightarrow x \text{ ex } \psi) \rightarrow \{(x)(\Phi \text{ in } x \equiv \psi \text{ in } x) \rightarrow \Phi = \psi\}$, VII. For each formula \mathfrak{A} not containing in , i , e may be defined a constant predicate P by the scheme $P i x \langle x_1, \dots, x_n \rangle \stackrel{\text{Def}}{=} \mathfrak{A}[x_1, \dots, x_n]$. From these axioms it can easily be shown that for each predicate P we can define by the schema $\hat{P} \text{ in } x \stackrel{\text{Def}}{=} x \text{ ex } P$ a predicate \hat{P} and show that \hat{P} is a set, i. e. $\hat{P} \text{ in } x \equiv x \text{ ex } \hat{P}$. This splitting up of the concepts of set-theory throws light on the Russell paradox as follows: using VII a predicate F can be defined by $F \text{ in } \Phi \stackrel{\text{Def}}{=} \overline{\Phi \text{ ex } \Phi}$, so that $F \text{ in } F \equiv \overline{F \text{ ex } F}$. From this easily follows $\overline{F \text{ ex } F}$ and hence $F \text{ in } F$ i. e. the Russell predicate does not contain itself as an element but is applicable to itself as a property. The author says that he will show in a later paper how to develop formal set-theory in K .

J. C. Shepherdson.

Mostowski, A.: On a generalization of quantifiers. *Fundamenta Math.* 44, 12—36 (1957).

Consider a one-place predicate F and the customary semantic rule assigning a truth-value, t or f , to $\forall x Fx$ for a given domain of individuals I and an assignment M of individuals to variables and propositional functions to predicates: $\text{val}_{MI}(\forall x Fx) = Un(N)$, where N is the set of truth-values of Fx obtained by arbitrary assignment of individuals of I to x and with the M -assignment to F , and Un is a function, from non-empty sets of truth-values into the set $\{t, f\}$, whose value is t if and only if the argument is either $\{t, f\}$ or $\{t\}$. Similarly for $\exists x Fx$ one uses the function Ex whose value is t except when the argument has only f as its member. Essentially, the author's generalized quantifiers are obtained by using in place of $Un(N)$ or $Ex(N)$, functions $T(m_t(F), m_f(F))$, where $m_t(F)$ is the cardinal number of the set of individuals of I for which F holds, $m_f(F)$ the cardinal of the set for which F does not hold, and T is a function from pairs of cardinals (whose sum is the cardinal of I) into the set $\{t, f\}$ -different T 's giving different quantifiers. More exactly, this would be quantifiers Q_I limited to I ; a quantifier Q is then a function which assigns a limited quantifier Q_I to each set I and satisfying the invariance condition that the value of $Q_I x Fx$ is the same as that of $Q_I x F_{\varphi} x$ for each F on I and each one-one mapping φ of I onto I' , where F_{φ} is defined by $F_{\varphi}(\varphi(x)) = F(x)$. The author considers formal calculi with an arbitrary finite number of generalized quantifiers and the problem of completeness for these calculi — namely whether the set of true formulas is recursively enumerable. While the problem in its full generality is still open, the author, by ingenious methods, established that the result is in the negative for certain classes of quantifiers. The Skolem-Löwenheim theorem is then considered in this context and a necessary and sufficient condition on a set of general quantifiers is given for each closed formula satisfiable in an infinite set to be satisfiable in a denumerable set. In conclusion is a consideration of the monadic predicate calculus in which is established an analogue of Löwenheim's theorem concerning the positive solution of the decision problem for validity. In addition to their intrinsic interest, the generality of the author's ideas brings new insights into logic; absent, however, is a treatment of formal relations among the quantifiers (e. g. as in $\exists x \forall y F x y \rightarrow \forall y \exists x F x y$) or of relations between quantifiers and logical connectives.

T. Hailperin.

Ehrenfeucht, Andrzej: Two theories with axioms built by means of pleonasm. *J. symbolic Logic* 22, 36—38 (1957).

By a pleonasm the author means the repeated conjunction of a statement and itself. By means of this device any r. e. (recursively enumerable) set of axioms can be replaced by an equivalent (primitive) recursive set, viz. if the original set consists of the set of formulae $\{\Phi_{f(n)}\}$, $n = 1, 2, \dots$, replace this by the set of formulae $\{\Phi_{f(n)} \ \& \ \Phi_{f(n)} \ \dots \ \& \ \Phi_{f(n)}\}$ (with n' & s), $n = 1, 2, \dots$. Using this observation

(first made by Craig, this Zbl. 53, 201) the author constructs very elegant examples of: (i) an axiomatizable essentially undecidable theory T_2 which contains a decidable finitely axiomatizable sub-theory T_1 : viz. let T_1 be the theory of a single monadic predicate P with an infinite number of constants c_1, c_2, \dots and let T_2 be the extension of T_1 obtained by adding the axioms $P(c_n)$ for $n \in A$, $\sim P(c_n)$ for $n \in B$, where A, B are two r. e. recursively inseparable sets. (ii) the same as (i) with the additional restriction that T_1, T_2 are based on a finite number of constants. For this he takes T_1 as the theory of identity and a single equivalence relation (which is decidable by Janiczak, this Zbl. 52, 252) and obtains T_2 by adding axioms Φ_n for $n \in A$, $\sim \Phi_n$ for $n \in B$ where Φ_n is a formula expressing that there is an equivalence class of the relation R with exactly n elements, (iii) an undecidable axiomatizable theory T which is categorical in the power \aleph_0 (i. e. any two normal models of it with \aleph_0 elements are isomorphic), (iv) an undecidable theory T of which all complete extensions are decidable. For the T of (iii), (iv) the author takes the theory with only one constant = (the predicate of identity) together with the axioms of identity and the axioms $\sim \Psi_n$ for $n \in A$ where A is a r. e. set which is not recursive and Ψ_n is a formula stating that there are just n elements. — Example (i) answers a question of Tarski [Undecidable theories (this Zbl. 53, 4), p. 19]; an example (not as simple as Ehrenfeucht's) was first given by Kreisel in his review of this [(a) Math. Reviews 15, 384; (b) correction, Math. Reviews 17, 816]. Kreisel raised there the question whether an example of type (ii) existed. Myhill (this Zbl. 71, 10) gave an example which, he claimed, answered this question [as well as another question of Tarski (op. cit) as modified by Kreisel (a)] but as Kreisel pointed out (b) this was unproven. (The present paper contains in a footnote a very clear statement of the logical relationships of eight hypotheses including those mentioned by Tarski and Kreisel and a clear statement of just what Kreisel and Myhill did prove). Example (iii) answers a question of Henkin [Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 58, 326—328 (1955)] and example (iv) a question of Mostowski.

J. C. Shepherdson.

Putnam, Hilary: Decidability and essential undecidability. J. symbolic Logic 22, 39—54 (1957).

(See preceding review.) This paper was written independently of Ehrenfeucht's but overlaps with it to a certain extent. The author gives another example of type (i); this is not as simple as Ehrenfeucht's but his proof contains the useful remark that a theory is undecidable if every recursive set is definable in it. (Tarski, op. cit. has the weaker result that this is true if every recursive function is definable in it.) He gives (p. 49) another example of type (ii); this differs from Ehrenfeucht's only in that the theory used for T_1 here is the theory G_1 of one permutation f [axioms $(x) (\exists y) (x = f(y)), (x) (y) (f(x) = f(y) \supset x = y)$] and a single monadic predicate P (with a single individual constant b) and that in the construction of T_2 Φ_n is replaced by $P(f^n(b))$. Actually the question the author set himself to answer did not require T_1 to be finitely axiomatizable, so that in his main theorem he uses instead of the above T_1 the theory G of the successor function (over integers) and one monadic predicate P . The reason why Putnam's paper is so much longer than Ehrenfeucht's is that whereas the decision problem of the theory of one equivalence relation had already been solved by Janiczak, the author has to prove the new result that G (and the theory G_1 mentioned above) is decidable. He makes the further observation that the theories of addition (or multiplication) and a single monadic predicate are undecidable. He also gives the same example (iv) as Ehrenfeucht.

J. C. Shepherdson.

Maehara, Shôji: Über die rekursive Einführung der Funktionen in der reinen Zahlentheorie. Proc. Japan Acad. 33, 111—113 (1957).

The author considers the system Z consisting of the first order predicate calculus with Peano's axioms. He shows that if Z is consistent then so is the extension of Z obtained by allowing the introduction of a function f by recursive definitions.

The proof depends on a result of Takeuti [Ann. Japan Assoc. Philos. Sci. 1, 41—61 (1956)] that if Z is consistent then so is the system Z^* which is obtained from Z by allowing quantification of predicate variables and adding the following axioms and rules of inference: $(B) (\Phi(B)) \supset \Phi(B)$, $\Phi(B) \supset (\exists B) \Phi(B)$, from $A \supset \Phi(B)$ to infer $A \supset (B) \Phi(B)$; from $\Phi(B) \supset A$ to infer $(\exists B) \Phi(B) \supset A$ provided B does not occur in A ; $(\exists B) (x_1, \dots, x_n) (\Phi(x_1, \dots, x_n) = B(x_1, \dots, x_n))$ provided no bound predicate variable occurs in Φ . From this the desired result follows immediately since it is possible to prove in Z^* the existence of an f satisfying the recursive definition. The argument given only covers the first step of the introduction of functions by recursion, viz. the introduction of functions defined recursively in terms of other functions all of which have been defined explicitly; however the author says that the consistency of the repeated introduction of functions by recursion can be proved in the same way by using a ramified type-theory in place of Z^* . *J. C. Shepherdson.*

Specker, E.: Eine Verschärfung des Unvollständigkeitssatzes der Zahlentheorie. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 1041—1045 (1957).

Sei Z ein System der Zahlentheorie, das die Prädikatenlogik erster Stufe und die Theorie der rekursiven Funktionen enthält. Verf. konstruiert in Z eine Formel $A(a)$ mit der Eigenschaft, daß es zu jeder rekursiven eigentlich monotonen Funktion r eine solche Ziffer n gibt, daß in Z sowohl $A(r(0)) \vee A(r(1)) \vee \dots \vee A(r(n))$ als auch $\sim A(r(0)) \vee \sim A(r(1)) \vee \dots \vee \sim A(r(n))$ beweisbar ist. Es kann daher keine rekursive unendliche Menge M von Ziffern geben, so daß für alle $m \in M$ der Satz $A(m)$ oder für alle $m \in M$ der Satz $\sim A(m)$ in einer beliebigen widerspruchsfreien Erweiterung Z^* von Z beweisbar ist. Gehört nun die Menge (der Gödelnummern) der beweisbaren Sätze von Z^* zum Mengenkörper \mathbb{R} , der von den rekursiv aufzählbaren Mengen erzeugt wird, so gilt dasselbe für die Menge K der Ziffern m , für welche $A(m)$ in Z^* beweisbar ist. Nach Markwald (dies. Zbl. 71, 12) enthält dann entweder K oder das Komplement von K eine rekursive unendliche Menge. Daher kann Z^* nicht vollständig sein. — Mit dieser Verallgemeinerung des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes beantwortet Verf. eine Frage von Mostowski [Proc. Internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam 3, 280—288 (1956)]. *E. Burger.*

Analysis.

Koschmieder, Lothar: Extrema without differential calculus. Bull. College Arts Sci., Baghdad 2, 67—83 (1957).

Maximum- und Minimaufgaben bilden von je her den Bestand von Übungsaufgaben in höherer Analysis. Verf. bringt eine Anzahl von derartigen Aufgaben, die ohne Differentialrechnung gelöst werden können, mit ausführlichen Lösungen. Als neu betrachtet er einige Vereinfachungen der Lösungsmethoden und außerdem einige neue Beispiele. Zum Schluß führt er verwandte Literatur an. *M. Zacharias.*

Aczél, János: Bemerkungen zu einigen Methoden bezüglich der elementaren Lösung von Extremumsaufgaben mittels elementaren Ungleichungen. Acta Univ. Debrecen. Ludovico Kossuth 3, Nr. 2, 23—37, deutsche Zusammenfassung. 37—40 (1957) [Ungarisch].

Es werden drei Methoden behandelt zur Lösung von Extremalaufgaben ohne Benützung der Differentialrechnung. Die erste Methode stützt sich auf die bekannte elementare Bestimmung der Extremalwerte einer quadratischen Gleichung. Die zweite Methode beruht auf einer Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel. Sie wird zur Bestimmung des Maximums von $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ unter $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \text{const.}$ ($x_i > 0$; m_i natürliche Zahlen) und der Extrema der Polynome der Gestalt $\alpha (a - x)^m (x - a_0)^{m_0} \dots (x - a_n)^{m_n} + \gamma$ benützt. Die dritte Methode benützt die Ungleichung von Bernoulli. Mit Hilfe dieser werden die Extremalwerte von Trinomen $x^\mu + ax + b$ ($x > 0$; μ reell) bestimmt. Verf.

löst mit diesen Methoden mehrere schöne Aufgaben, welche im Hochschulunterricht vorzüglich benützlich sind. Zum Schluß wird darauf hingewiesen, daß sämtliche elementaren Ungleichungen mit Gleichheitsfällen zur elementaren Bestimmung von Extremen anwendbar sind. — Es wird auch die Frage aufgeworfen, ob es überhaupt elementare (d. h. keine Grenzwert-, Differential- und Integralausdrücke enthaltende) Extremumsaufgaben gibt, die elementar (d. h. ohne Zuhilfenahme der Differentialrechnung) nicht gelöst werden können.

S. Fenyő.

Hsiang, Fu Cheng: An inequality for finite sequences. Math. Scandinav. 5, 12—14 (1957).

Es seien a_0, a_1, \dots, a_m und b_0, b_1, \dots, b_m zwei Folgen nicht-negativer reeller Zahlen. Dann gilt:

$$\sum_{u=0}^m \sum_{v=0}^m \frac{a_u b_v}{2u + 2v + 1} \leq (m + 1) \sin \frac{\pi}{2(m+1)} \left(\sum_{u=0}^m a_u^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{v=0}^m b_v^2 \right)^{1/2}.$$

L. Fuchs.

Allgemeine Reihenlehre:

Chillingworth, H. R.: A note on convergence and boundedness in matrix transformations spaces. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 60, 570—577 (1957).

Various isolated results on matrix transformations of one sequence space into another were given by H. H. Abu El Makarem [(1) Rev. Economics, polit. Business Studies, Fac. of Commerce, Cairo Univ. 4, Nr. 1 (1956); (2) this Zbl. 72, 54]. Some of the results in (1) were shown to be particular cases of a more general theorem by H. S. Allen (this Zbl. 72, 54). In the present paper it is shown that (2) [which is merely (1) with the results covered by Allen's generalization eliminated] contains further results, e. g., Theorems IV—VII with their corollaries, and Theorems XIII—XXII, which are particular cases of more general theorems. These more general theorems are the author's Theorem II and III, as follows. Theorem II. If (i) all points in $\alpha (> \Phi)$ and all points in β^* are the p -limits of their sections in these spaces, and (ii) $A^{(p)}$ ($p = 1, 2, \dots$) is a p -bd. and c -cgt. sequence of matrices in the matrix space $\alpha \rightarrow \beta$, then $A^{(p)}$ is $\alpha \rightarrow \beta$ cgt. Theorem III. If (i) β is any sequence space in which p -boundedness and c -cgce. imply p -cgce., (ii) the set of row vectors of the matrices $A^{(p)} \equiv (a_{n,k}^{(p)})$ in $\alpha \rightarrow \beta$ are, for all fixed n , and $p = 1, 2, \dots, \alpha^* \alpha$ -cgt., and (iii) these matrices are p -bd. in $\alpha \rightarrow \beta$, then these matrices are p -cgt. in $\alpha \rightarrow \beta$. [For meanings of symbols and terminology, see the reviewer's: Infinite matrices and sequence spaces (this Zbl. 40, 25), Chapter 10, and Linear operators (London 1953), Chapter 6.] A number of other theorems connected with the above are also given.

R. G. Cooke.

Chillingworth, H. R.: On matrix transformations of certain sequence spaces. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A. 60, 578—583 (1957).

For meanings of the sequence spaces $\sigma_\infty, \sigma_r, Z, E_r, F_r, \Phi, \sigma$, and the matrix spaces $\alpha \rightarrow \beta$ and $\Sigma(\alpha)$, see the reviewer's: Infinite matrices and sequence spaces (this Zbl. 40, 25), 273—274, and Linear Operators (London 1953), 298, respectively. The author proves the following results. Theorem I. $\sigma_\infty \rightarrow \sigma_r$ ($r \geq 1$) is the set of

matrices $(a_{n,k})$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k \in E} a_{n,k} \right|^r \leq M^r$, where E is an arbitrary subset of the positive integers, and M is independent of E . Theorem II. $\sigma_\infty \rightarrow E_r$ is the set of matrices $(a_{n,k})$ such that $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \leq N n^r$ for some positive N and all n .

Theorem III. $\sigma_r \rightarrow F_r$ is the set of matrices $(a_{n,k})$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} n^r \left| \sum_{k \in E} a_{n,k} \right|$ converges for any arbitrary set E of the positive integers. Theorem IV. If (i) $\alpha \geq \Phi$, (ii) β is convergence-free, then $\alpha \rightarrow \beta$ is the set of all matrices $(a_{n,k})$ such that (a) rows

of $A = (a_{n,k})$ are in α^* (the dual space of α), and (b) row suffixes of non-zero rows of A form a W -set for β . [For definitions of „convergence-free“, „dual space“, and „ W -set“, see the first of the references given above, pp. 280, 275, and 281 respectively.] Theorem V. If (i) α is normal and contains Φ , (ii) β is convergence-free, (iii) $\alpha^{**} \geq \lambda \geq \alpha$, then $\alpha \rightarrow \beta = \lambda \rightarrow \beta = \alpha^{**} \rightarrow \beta$. In the final Theorem VI, the author gives a result which was published by H. S. Allen in the Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 8, 117—118 (1957), this Zbl. 77, 311, after the author had submitted this paper for publication. — On p. 578, in the first two lines of the proof of Theorem I, the words „necessity“ and „sufficiency“ should be interchanged. *R. G. Cooke.*

Petersen, G. M.: The iteration of regular matrix methods of summation. Math. Scand. 4, 276—280 (1957).

Im folgenden seien A, B, C, A' permanente Matrixverfahren. Äquivalenz bezüglich beschränkter Folgen wird mit „ b -Äquivalenz“ abgekürzt. Theorem 1: Zu gegebenem B und A existiert ein C , so daß sowohl C als auch die Iteration BC b -äquivalent mit A sind. — Der Beweis beruht darauf, daß für B ein Lückenumkehrsatz gilt; C entsteht aus A durch Zeilenwiederholung. — Die meisten B limitieren alle beschränkten Folgen mit „genügend vielen“ Nullen (hier ausgedrückt durch die Bedingung $s_m = 0$ für $m \neq n_\mu$ mit geeigneter fester Folge n_μ) zum Werte Null (vgl. G. Lorentz, dies. Zbl. 31, 295). Bei solchem B kann man ein mit A b -äquivalentes C finden, so daß BC eine beliebig vorgegebene beschränkte Folge limitiert (Satz 2; C enthält an den Stellen n_μ die Zeilen von A). Ist B von der genannten Art und existiert ein C , das b -stärker als A und B ist, so gibt es ein mit A b -äquivalentes A' , so daß BA' b -stärker als A und B ist (Satz 3; A' besteht aus den Zeilen von A und C). — [Für die Existenz von C vgl. G. Lorentz und Ref., Math. Z. 68, 428—438 (1958); Erweiterungen von Th. 1—3 auf beliebige Folgen sind mit gewissen Einschränkungen möglich.]. — Verf. schließt mit einer Bemerkung über Brudno-Normen [siehe Brudno, Mat. Sbornik, n. Ser. 16 (58), 191—247 (1945)]. Setzt man $\|A\| = \sup_m \sum_n |a_{mn}|$, so ist die Brudno-Norm eines Wirkfeldes \mathfrak{A} (nur beschränkte Folgen zugelassen) erklärt durch $\|\mathfrak{A}\| = \inf \|A\|$, wo zur Konkurrenz alle permanenten A mit Wirkfeld \mathfrak{A} zugelassen sind. Man findet leicht ein A mit $\|A\| = \alpha > 1$, dessen Wirkfeld eine Norm $< \alpha$ besitzt (z. B. weil es genau die konvergenten Folgen enthält). Durch Zeilenauswahl aus A bekommt man aber ohne Mühe ein A' , dessen Wirkfeld die Norm α hat. Da Zeilenauswahl dasselbe wie Multiplikation mit einer Matrix B von der Norm 1 entspricht, gilt bei Iteration $C = BA$ für die Wirkfelder i. a. nicht $\|\mathfrak{C}\| \leq \|\mathfrak{B}\| \cdot \|\mathfrak{A}\|$. Verf. zeigt dies auf etwas längerem Wege unter Verwendung der C_1 -Matrix. *K. Zeller.*

Petersen, G. M.: Sequences of iterations. Math. Z. 68, 151—152 (1957).

Bezeichnungen. A usw.: Permanente Matrixverfahren; $C \supset B$: Jede beschränkte B -limitierbare Folge wird auch von C limitiert; $h(A) = \sup_m \sum_n |a_{mn}|$. — Verf. behandelt die Frage, wann es zu einer Folge von Verfahren B_k mit $B_k \subset B_{k+1}$ ein stärkeres gibt, d. h. also ein C mit $C \supset B_k$ ($k = 1, 2, \dots$). Nach Brudno, Mat. Sbornik, n. Ser. 16 (58), 191—247 (1945) gibt es nicht immer ein derartiges C ; in Brudnos Beispiel ist $\sup_k h(B_k) = \infty$. Sind jedoch die B_k von der Form $B_k = A_k A_{k-1} \cdots A_1$ mit $\prod h(A_k) < \infty$, so existiert das gewünschte C , wie Verf. zeigt. Der Beweis beruht auf folgender Überlegung: Führt man im Wirkfeld von B_k die durch die B_k -Transformierte gegebene sup-Topologie ein, so erhält man einen separablen normierten Raum, in dem die Zeilen aller B_j mit $j > k$ gleichmäßig beschränkte Linearformen darstellen. Ein übliches Auswahlverfahren führt nun zur Konstruktion von C . *K. Zeller.*

Petersen, G. M.: The norm of iterations of regular matrices. Proc. Cambridge philos. Soc. 53, 286—289 (1957).

An iteration of a T -matrix (or regular matrix) $B = (b_{m,n})$ with a T -matrix $A = (a_{m,n})$, denoted by $B \cdot A$ (or sometimes by $B[A]$), is the summation method defined by the matrix B operating on the sequence $\{t_n\}$ of the A -transforms of a sequence $\{s_v\}$; thus the sequence $\{\tau_m\}$ of $B \cdot A$ is given by

$$\tau_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_{m,n} t_n, \text{ where } t_n = \sum_{v=1}^{\infty} a_{n,v} s_v.$$

Brudno [Mat. Sbornik n. Ser. **16** (58), 191—247 (1945)] defines the norm of A as its K_r -bound, i. e., $h(A) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}|$. The norm of a method \mathfrak{A} is then defined by $\|\mathfrak{A}\| = \inf h(A)$, where the inf is taken over all those matrices that are equivalent to (mutually consistent with) \mathfrak{A} for bounded sequences; i. e., b -equivalent to \mathfrak{A} . Brudno uses this concept of norm to provide an example of a sequence of methods $\{\mathfrak{A}_n\}$ such that \mathfrak{A}_n is stronger than \mathfrak{A}_{n-1} for all n , and such that no regular method of summation can contain all of them; in fact he constructs a matrix such that the norms of the methods represented by the successive iterations of this matrix increase without bound. Since no regular matrix has an infinite norm, it follows that no regular matrix can contain this set of iterations. The object of the present note is to exhibit a wide class of matrices with this property, as shown in the following theorem, where the v -th iteration of A is denoted by $A^v = (a_{m,n}^v)$ and of the corresponding method by \mathfrak{A}^v . Theorem. Let $A = (a_{m,n})$ be a regular matrix for which $\limsup \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| = M > 1$, and suppose there exists a sequence $\{n_\mu\}$ such that $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} |a_{m,n_\mu}| = 0$. Then there is a matrix $B = (b_{m,n})$ which is b -equivalent to A , and such that $\|\mathfrak{B}^v\| \geq M^{v-1}$.

R. G. Cooke.

Petersen, G. M.: Sets of consistent summation methods. J. London math. Soc. **32**, 377—379 (1957).

C. Goffman und der Verf. konstruierten in einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. **70**, 286) eine Menge \mathfrak{C} von verträglichen und permanenten Matrixverfahren, so daß jede beschränkte Folge durch mindestens eines der Verfahren limitiert wird. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die Konstruktion nach Vorgabe einer abzählbaren Menge verträglicher und permanenter Matrizen mit gleichmäßig beschränkten Normen so eingerichtet werden kann, daß diese Menge in \mathfrak{C} enthalten ist. Die Frage, ob mehr als abzählbar viele Matrizen vorgegeben werden können, bleibt offen.

A. Peyerimhoff.

Ramanujan, M. S.: On Hausdorff and quasi-Hausdorff methods of summability. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **8**, 197—213 (1957).

This paper is a continuation of earlier papers on the same subject by the author (this Zbl. **51**, 46; **77**, 64). The matrix $\lambda \equiv (H, \mu_n)$ defined by $\lambda_{n,k} = \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k$ ($n \geq k$), $\lambda_{n,k} = 0$ ($n < k$) is called a Hausdorff matrix, and its transpose $\lambda^* \equiv (H^*, \mu_n)$ defined by $\lambda_{n,k}^* = 0$ ($n > k$), $\lambda_{n,k}^* = \binom{k}{n} \Delta^{k-n} \mu_n$ ($n \leq k$) is called a quasi-Hausdorff matrix. μ_n is said to be a moment constant generated by $\chi(t)$ if $\mu_n = \int_0^1 t^n d\chi(t)$, where $\chi(t)$ is a function of bounded variation in $[0, 1]$, and we may assume $\chi(0) = 0$. The following results are established. Theorem 1. The matrix $\lambda^* \equiv (H^*, \mu_n)$ is a K -matrix (conservative matrix) if, and only if, (i) μ_n is a moment constant, and (ii) $\int_0^1 \frac{|d\chi|}{t} < \infty$. A matrix $A = (a_{n,k})$ is said to be absolutely conservative if $\sum |s_n - s_{n-1}| < \infty$.

implies $\sum |t_n - t_{n-1}| < \infty$, where $t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} s_k$; and if in addition $\lim s_n = \lim t_n$, A is said to be absolutely regular. Theorem 2. The matrix $\lambda^* \equiv (H^*, \mu_n)$ defines an absolutely conservative (or absolutely regular) sequence-to-sequence transformation if, and only if, it defines a conservative (or regular) transformation of the same type. A series-to-series conservative matrix A is called a δ -matrix, and if in addition $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n,k} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, it is called a δ_0 -matrix. Theorem 3.

The matrix $\lambda \equiv (H, \mu_n)$ is a δ_0 -matrix if, and only if, (i) μ_n is a moment constant and (ii) $\int_0^1 \frac{|d\chi|}{t} < \infty$, and it is an α_0 -matrix (i. e., series-to-series regular and

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n,k} = 0$, $n = 0, 1, \dots$) if, and only if, in addition, $\int_0^1 \frac{d\chi}{t} = 1$. Theorem 4.

The matrix $\lambda \equiv (H, \mu_n)$ defines an absolutely conservative (or absolutely regular) series-to-series transformation if, and only if, it defines a conservative (or regular) transformation of the same type. Theorem 5. If $s_n = O(1)$ and is summable by Borel's exponential method to l , then every T -matrix (regular matrix) (H, μ_n) sums $\{s_n\}$ to l if the χ -function generating the moment constants μ_n is continuous at $t = 1$.

Theorem 6. If $s_n = O(1)$ and is summable to l by Borel's method, then it is summable (C, ε) to l for every $\varepsilon > 0$. [This is merely a special case of Theorem 5, and (as mentioned by the author) is not new, a more general result having been given by Hardy and Littlewood]. Theorem 7. Let $s_n = O(1)$ and be Borel summable to l . Then every T -matrix (H^*, μ_{n+1}) is efficient for $\{s_n\}$ and sums it to l , provided that the function $\chi(t)$ generating the moment constants μ_n is continuous at $t = 1$.

Theorem 8. Let $\{s_n\}$ be a bounded sequence which is Borel summable to l . Then the T -matrices (H, μ_n) and (H^*, μ_{n+1}) are both efficient for $\{s_n\}$ and sum it to l (i. e., they include Borel's method), provided that the function $\chi(t)$ which generates the moment constants μ_n is continuous at $t = 1$. The next three theorems are based on some definitions and results due to G. G. Lorentz (this Zbl. 31, 295; 34, 34).

A bounded sequence $\{s_n\}$ is said to be almost convergent, and we write $S = \lim s_n$, if every Banach limit of the sequence is S . A method of summability which sums all almost convergent sequences is said to be strongly regular. The class \mathfrak{U} is defined as the set of T -matrices A for which $\max_k |a_{n,k}| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Theorem 9. The

quasi-Hausdorff T -matrix (H^*, μ_{n+1}) is strongly regular if, and only if, $\mu_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, or (equivalently), the function $\chi(t)$ associated with the method is continuous at $t = 1$. Theorem 10. The quasi-Hausdorff T -matrix (H^*, μ_{n+1}) belongs to the class \mathfrak{U} under the same conditions as in Theorem 9. Theorem 11. A quasi-Hausdorff

T -matrix (H^*, μ_{n+1}) cannot be a gap method, and, if it is strongly regular, then all the functions $\Omega(n) = o(\sqrt{n})$ are summability functions of the first kind for the method (H^*, μ_{n+1}) . [For definitions of „gap method“ and „summability function of the first kind“, see Lorentz, the second of the above references.] The final theorems

are concerned with the matrix $S^* \equiv (S^*, \mu)$, defined by $s_{n,k}^* = \binom{n+k}{k} \Delta^k \mu_{n+1}$ ($n, k = 0, 1, 2, \dots$). Theorem 12. The matrix (S^*, μ) is a K -matrix if, and only if, μ_n is a moment constant; it is a T -matrix if, and only if, (i) μ_n is a moment constant,

(ii) $\int_0^1 d\chi(t) = 1$, (iii) the function $\chi(t)$ generating the $\{\mu_n\}$ is continuous at $t = 1$.

Theorem 13. If $s_n = O(1)$ and is summable by Borel's method to l , then the T -method (S^*, μ) is efficient for $\{s_n\}$ and includes the Borel method. R. G. Cooke.

Kuttner, B.: Some remarks on quasi-Hausdorff transformations. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 8, 272—278 (1957).

The Hausdorff and quasi-Hausdorff transformations (H, μ_n) and (H^*, μ_n) are

well known; for basic properties, see Hardy, *Divergent series* (this Zbl. 32, 58), Chap. XI. M. S. Ramanujan (this Zbl. 51, 46; preced. review) has shown that there is a close connexion between (H, μ_n) and (H^*, μ_{n+1}) ; in particular, if (H, μ_n) is regular, then so is (H^*, μ_{n+1}) . In correspondence with the author, Ramanujan raised the question as to whether or not (H, μ_n) and (H^*, μ_{n+1}) were equivalent (mutually consistent). In the present paper the author proves that (H, μ_n) need not necessarily imply (H^*, μ_{n+1}) , and that (H^*, μ_{n+1}) need not imply (H, μ_n) . Some related matters are also dealt with, as follows. If we take $\mu_n = r \int_0^1 t^n (1-t)^{r-1} dt$ ($r > 0$), (H, μ_n)

reduces to the Cesàro method (C^0, r) , and (H^*, μ_{n+1}) is then denoted by (C^*, r) . The following results are then proved. Theorem 1. The proposition that (C, r) implies (C^*, r) is false when $0 < r < 2$, $r \neq 1$, but is true when $r = 1$ or 2. Theorem 2. If r is a positive integer, then (C^*, r) implies (C, r) . R. G. Cooke.

Melencov (Melentsov), A. A.: A contribution to the theory of Hausdorff transformations. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 501—502 (1957) [Russisch].

Ist $\|C_{m,n}\|$ eine Hausdorff-Matrix, so ist die konjugierte Matrix $\|C_{m,n}^*\| = \|C_{m,m-n}\|$ (wo $C_{m,k} = 0$ gesetzt ist für $k < 0$) ebenfalls vom Hausdorff-Typ. Die zugehörigen Diagonalfolgen μ_n und μ_n^* sind durch die δ -Transformation [Hardy, *Divergent Series* (dies. Zbl. 32, 58), S. 247] verknüpft, die erzeugenden Funktionen (falls vorhanden) durch $\chi^*(t) = 1 - \chi(1-t)$. Das liefert Aussagen über die Permanenz von C und C^* . Ein Verfahren der Form $|p_n/P_m|$ (Riesz) oder $|p_{m-n}/P_m|$ (Voronoj-Nörlund) (wo $p_0 + \dots + p_n = P_n \neq 0$) ist genau dann ein Hausdorff-Verfahren, wenn $p_n = (p_1 P_{n-1}/n p_0)$ gilt. Das bedeutet, daß die Matrix gleich oder konjugiert zu einer Cesàroschen ist (vgl. die bei Ref., Theorie der Limitierungsverfahren, Berlin 1958, S. 127, genannte Literatur). Weiter betrachtet Verf. allgemeine Euler(-Perron)-Verfahren in Folge-Folge-Form, die Dreiecksmatrizen besitzen. Ist ein solches Verfahren so beschaffen, daß auch das konjugierte Verfahren vom selben Typ ist, so ist es ein spezielles Euler (-Knopp)-Verfahren. Dasselbe gilt, wenn das allgemeine Euler-Verfahren vom Hausdorff-Typ ist.

K. Zeller.

Davydov, N. A.: Über (c)-Punkte von Folgen, die nach der Poisson-Abelschen Methode summierbar sind. Mat. Sbornik, n. Ser. 43(85), 67—74 (1957) [Russisch].

Verf. befaßt sich mit limitierungstheoretischen Aussagen, die den Lückenumkehrsätzen (mit gemischten Lücken) verwandt sind: Er schließt auf $V\text{-}\lim s_n = \lim s_{n_k}$, wenn die n_k genügend dicht sind und beide Seiten existieren. — Der Punkt A heißt (c)-Punkt der Folge s_n , wenn $|s_n - A| < \varepsilon$ für $n_k < n \leq m_k$ mit $m_k/n_k \geq \lambda(\varepsilon) > 1$ und $n_k \rightarrow \infty$ gilt (wobei natürlich m_k und n_k von A und $\varepsilon > 0$ abhängen). In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 70, 288) zeigte Verf., daß bei einer Cesàro-limitierbaren Folge ein (c)-Punkt notwendigerweise der Cesàro-Grenzwert der Folge ist, so daß höchstens ein (c)-Punkt auftritt. Beim Abelverfahren gilt das aber nicht, wie schon ein Beispiel von Evgrafov (dies. Zbl. 47, 311) belegt, bei dem zwei (c)-Punkte trotz Abel-Summierbarkeit auftreten. Jetzt zeigt Verf., daß man als Menge der (c)-Punkte (bei Abel-limitierbarer Folge) sogar jede abgeschlossene Menge (in der erweiterten komplexen Ebene) erhalten kann. Dabei darf man die Forderung $m_k/n_k \geq \lambda$ sogar zu $m_k/\varphi(n_k) \rightarrow \infty$ mit irgendeinem festen, positiven und beliebig rasch wachsenden $\varphi(x)$ abwandeln (φ -Punkt). Der Beweis beruht darauf, daß man x^n durch Linearkombinationen von x^{m+1}, x^{m+2}, \dots in geeigneter Weise approximieren kann. Gilt jedoch $s_n = O(n^\alpha)$ und $\varphi(x) = x^{1+\alpha} \ln x$, so erfüllt ein φ -Punkt A im Falle der Abel-Limitierbarkeit zum Werte S die Beziehung $A = S$ [siehe Verf., Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 4 (76), 167—174 (1957)]. Daraus leitet Verf. eine Klasse nichtfortsetzbarer Funktionen her. K. Zeller.

Makai, E.: On the inequality of Mathieu. Publ. math., Debrecen 5, 204—205 (1957).

Die Ungleichung $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2+x^2)^2} < \frac{1}{x^2}$, die von E. Mathieu [Traité de physique mathématique VII.—VIII. 2., Paris (1890)] vermutet, von K. Schröder (dies. Zbl. 35, 187) und von O. Emersleben [Math. Ann. 125, 165—171 (1952)] teilweise, von L. Berg (dies. Zbl. 46, 62) und von J. G. van der Corput und L. O. Heflinger [Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 59, 15—20 (1956)] mittels schwieriger analytischer Hilfsmittel vollständig bewiesen wurde, wird hier so einfach gewonnen, daß in diesem Referat der ganze Beweis wiedergegeben werden kann: Es wird die evidente Ungleichung $[(n-\frac{1}{2})^2+x^2-\frac{1}{4}]^{-1}-[(n+\frac{1}{2})^2+x^2-\frac{1}{4}]^{-1} > 2n/(n^2+x^2)^2$ bezüglich n von 1 bis ∞ summiert. Mit derselben Methode wird auch die anderseitige Abschätzung $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2+x^2)^2} > \frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}$ bewiesen, die für $x^2 > \frac{5}{6}$ schlechter, für $x^2 < \frac{5}{6}$ dagegen besser ist als die untere Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2+x^2)^2} > \frac{1}{x^2} - \frac{5}{16x^4}$$

von O. Emersleben.

J. Aczél.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Berg, Lothar: Bemerkungen zum Interpolationsproblem. Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau 2, 155—157 (1957).

Um die für natürliche Zahlen n definierte Funktion $s(n) = \sum_{v=1}^n \frac{1}{v}$ auch für nicht ganze Argumentwerte x zu erklären, wird die Newtonsche Interpolationsformel benutzt und es werden für die betrachtete Funktion $s(x)$ bemerkenswerte Eigenschaften durch Konvergenzbetrachtungen abgeleitet.

E. J. Nyström.

Sharma, A.: On Golab's contribution to Simpson's formula. Ann. Polon. math. 3, 240—246 (1957).

Der Verf. verallgemeinert ein früheres Ergebnis des Referenten betreffend ein Problem verbunden mit der Simpsonschen Formel. Besitzt die Funktion $f(x)$ in der Umgebung von $x=a$ die Entwicklung $f(a+h) = f(a) + a_p h^p + a_q h^q + a_r h^r + a_s h^s + g(h)$, wo $a_p, a_q, a_r, a_s \neq 0$ und $1 \leq p < q < r < s$ (p, q, r, s positive ganze Zahlen) und $g(h) = O(h^{s+1})$, so setzt der Verf.

$$P(h) = \int_a^{a+h} f(x) dx; \quad \bar{P}(h) = h[\lambda_0 f(a) + \lambda_1 f(a + \theta_1 h) + \lambda_2 f(a + \theta_2 h)],$$

wo $0 < \theta_1 \leq \frac{1}{2} < \theta_2 \leq 1$. Es werden folgende zwei Probleme gelöst. 1. Bei gegebenen θ_1 und θ_2 , die Koeffizienten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ so zu bestimmen, daß die Differenz $R(h) = P(h) - \bar{P}(h)$ unendlichklein von größter Ordnung wird (λ_i hängen nur von θ_1, θ_2 und p, q ab; für $\theta_1 = \frac{1}{2}, \theta_2 = 1$ bekommt man die Simpsonsche Formel). 2. Bei gegebenen θ_1 den Wert von θ_2 so zu bestimmen, daß $R(h)$ unendlichklein von größter Ordnung wird. Es wird zur Lösung dieser Fragen grundsätzlich die Methode des Ref. angewandt.

St. Golab.

Tumarkin, G. C.: Die Annäherung im Mittel von Funktionen auf rektifizierbaren Kurven. Mat. Sbornik, n. Ser. 42 (84), 79—128 (1957) [Russisch].

En réalité, la plus grande partie de cet article est consacrée à l'établissement d'une condition nécessaire et suffisante pour que le système des exponentielles $\{e^{int}\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ soit complet dans l'espace $L^p(d\sigma; 0, 2\pi)$ des fonctions à valeurs complexes vérifiant $\int_0^{2\pi} |f(t)|^p d\sigma(t) < \infty$ ($p > 0$, $\sigma(t)$ croissante sur $0 \leq t \leq 2\pi$); la condition obtenue est $\int_0^{2\pi} \log \sigma'(t) dt > -\infty$; le problème est

ramené à l'étude des valeurs frontières d'une fonction holomorphe dans $|z| < 1$. Les deux chapitres suivants étudient plus brièvement, d'abord l'approximation polynomiale (dans des conditions analogues) des fonctions complexes données sur une courbe rectifiable, puis l'approximation par les exponentielles du système $\{e^{i\alpha t}\}$, $\alpha \geq 0$, des fonctions de la classe $L^p(d\sigma; -\infty, +\infty)$ avec $\sigma(\pm\infty)$ fini. — Ce travail est le développement de la thèse de l'A., dont les résultats ont été publiés sans démonstration dans une Note des Doklady (cf. ce Zbl. 46, 294); il se rattache à de nombreuses recherches de différents auteurs, dont il donne l'historique. En dehors de deux travaux anciens de Szegő, la bibliographie cite uniquement des publications soviétiques.

G. Bourion.

Gagliardo, Emilio: Un criterio di compattezza rispetto alla convergenza in media. Ricerche Mat. 6, 34—48 (1957).

Viene dimostrato in due modi diversi il seguente teorema. „Sia $\{u_n(x_1, x_2, \dots, x_m)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) una successione di funzioni di potenza p -esima sommabile ($p \geq 1$) nel cubo $\Delta \equiv \{0 \leq x_i \leq 1, (i = 1, 2, \dots, m)\}$. Esistano due costanti positive A, B tali che si abbia, per ogni n : (1) $\int_{\Delta} |u_n(x_1, x_2, \dots, x_m)|^p dx_1 dx_2 \dots dx_m \leq A$,

$$(2) \int_{\Delta \times \Delta} \frac{|u_n(x_1, \dots, x_m) - u_n(y_1, \dots, y_m)|^p}{\sum_{i=1}^m |x_i - y_i|^m} dx_1 \dots dx_m dy_1 \dots dy_m \leq B.$$

Allora dalla successione data se ne può estrarre una convergente, in Δ , in media d'ordine p [verso una funzione di potenza p -esima sommabile, soddisfacente ancora alle (1), (2)]. „Si tratta di un criterio la cui estrema generalità e il cui notevole interesse vengono criticamente messi in evidenza, dimostrando che da esso possono dedursi, some criteri particolari, altri, ben noti, di F. Rellich-C. B. Morrey [Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1930, 30—35 (1930); cfr. questo Zbl. 26, 394] e di F. Cafiero [cfr. questo Zbl. 38, 40]. Del criterio dimostrato si danno anche un'interpretazione da un punto di vista funzionale, nonché alcune formulazioni più generali ottenute attenuando le ipotesi sulle funzioni u_n e sull'insieme ove esse sono definite.

T. Viola.

Izumi, Shin-ichi: Fourier series. V: A divergence theorem. Proc. Japan Acad. 33, 1—3 (1957).

Sei $f \in L_1(-\pi, \pi)$ und $\omega[f, \delta]$ die Oszillation von f in der Abschließung des Intervalls δ ; ferner E eine abgeschlossene Teilmenge des Intervalls $-\pi, \pi$ und δ_k die Folge der Komplementintervalle. Džvaršejšvili (dies. Zbl. 41, 33) zeigte, daß aus $f(x) = 0$ ($x \in E$) und (1) $\sum \omega[f, \delta_k] < \infty$ folgt, daß die Fourierreihe von f in jedem Dichtepunkt von E gegen Null konvergiert. Allerdings ist seine Formulierung nicht ganz klar, und so gewann Verf. aus dem Referat in den Mathematical Reviews den Eindruck, daß $\omega[f, \delta]$ die Oszillation im offenen Intervall δ bedeutet. Er widerlegt den entsprechenden Satz (Th. 1; sein Gegenbeispiel f ist in jedem offenen Intervall δ_k konstant gleich $1/|\delta_k| k \log^2 k$), beweist sodann erneut die Richtigkeit des oben genannten Ergebnisses (Th. 2) und verallgemeinert es, indem er (1) ersetzt durch (2) $\sum_{|\delta_k|} \int_{\delta_k} |f(t)| dt < \infty$. Weitere

Literatur: K. Tandori, dies. Zbl. 58, 292. Bemerkung: Im Referat der oben erwähnten Arbeit von Džvaršejšvili ist statt „Dichtepunkt“ die falsche Übersetzung „Häufungspunkt“ gewählt.

K. Zeller.

Izumi, Shin-ichi, Masako Satô and Gen-ichirô Sunouchi: Fourier series. XIV: Order of approximation of partial sums and Cesàro means. Proc. Japan Acad. 33, 114—118 (1957).

Gehört $f(t)$ zur Klasse $\text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha < 1$, und bezeichnet $s_n(t, f)$ die n -te Teilsumme der Fourierreihe von $f(t)$, so wird die Annäherung der Funktion

$f(t)$ durch ihre Teilsummen bekanntlich gleichmäßig durch (1) $s_n(t, f) - f(t) = O(\log n/n^\alpha)$ abgeschätzt. Im allgemeinen kann hier der Faktor $\log n$ durch keinen kleineren ersetzt werden. Doch ist dies nach S. Izumi (vgl. dies. Zbl. 38, 220; 67, 44) der Fall, wenn $0 < \alpha < 1$, $p > 1$, $0 < \beta < 1$ und $\alpha = \beta - 1/p$ angenommen wird und $f(t)$ zur Klasse Lip (β, p) , einer Unterklasse von Lip α gehört. R. Salem und A. Zygmund (dies. Zbl. 60, 185) hatten zuvor gezeigt, daß (2) $s_n(t, f) - f(t) = O(1/n^\alpha)$ gleichmäßig gilt, wenn $f(t)$ zur Klasse Lip α , $0 < \alpha < 1$, gehört und von monotonem Typus ist, d. h. wenn es eine Konstante C derart gibt, daß $f(t) + Ct$ in $(-\infty, \infty)$ monoton ist. Im Anschluß an diese Untersuchungen behandeln die Verff. die Frage: Unter welchen lokalen Bedingungen gilt (3) $s_n(x, f) - f(x) = O(1/n^\alpha)$ an der Stelle x , wenn $f(t)$ zur Klasse Lip α oder zu irgendeiner anderen Klasse gehörig vorausgesetzt wird? Die Antwort lautet: Wenn $\theta(u) = u \varphi_x(u) = u \{f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)\}$ in der rechten Nachbarschaft von $u = 0$ von beschränkter Schwankung und (4) $\int_0^t |\dot{\theta}(u)| du = O(t^{1+\alpha})$ ist, so gilt (3). Eine andere Bedingung lautet: Es sei $0 < \alpha \leq 1$ und

$$\int_0^h \{f(t+u) - f(t-u)\} du = O(h^{\alpha+1}/\log 1/h)$$

für $h \rightarrow 0$ gleichmäßig in t und für ein festes x sei $\int_0^h \{f(x+u) - f(x)\} du = O(h^{1+\alpha})$ für $h \rightarrow 0$. Schließlich verallgemeinern die Verff. ein Ergebnis von T. M. Flett [Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 7, 81—95 (1956)] über die Annäherung einer Funktion $f(t)$ durch die Cesàro-Mittel $\sigma_n^\alpha(x, f)$ der Ordnung α ihrer Fourierreihe: Wenn $\theta(u)$ in $(0, \delta)$ von beschränkter Schwankung ist und (4) für $0 \leq t \leq \delta$ erfüllt ist, so gilt die Abschätzung $\sigma_n^\alpha(x, f) - f(x) = O(1/n^\alpha)$. V. Garten.

Satô, Masako: Fourier series. XVIII: On a sequence of Fourier coefficients. Proc. Japan Acad. 33, 380—385 (1957).

$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} n B_n(x)$ is the derived Fourier series of an L -integrable function $f(x)$, and $\sigma_n^r(x)$ is the n -th (C, r) mean of the sequence $\{n B_n(x)\}$. Let $\psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t) - l$. It is a wellknown result of Fejér that, for $r > 1$, $\lim_{t \rightarrow 0} \psi_x(t) = 0$ implies $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^r(x) = l/\pi$. The author proves, for $0 \leq \alpha \leq 1$ and $0 < r < 1$, that if

$$\int_0^t \psi_x(u) du = o\left(t \left(\log \frac{1}{t}\right)^\alpha\right) \text{ and } \int_0^t (\psi_x(\xi+u) - \psi_x(\xi-u)) du = o\left(t^{2-r} \left(\log \frac{1}{t}\right)^\alpha\right)$$

uniformly in ξ , then $\sigma_n^r(x) - l/\pi = o((\log n)^\alpha)$. For $r = 1$ the conclusion is the same if $o(t^{2-r} (\log 1/t)^\alpha)$ is replaced by $o(t (\log 1/t)^\alpha / \log 1/t)$. The same theorem is given with $(\log 1/t)^\alpha$ replaced by $(\log \log 1/t)^\alpha$ and $o((\log n)^\alpha)$ by $o((\log \log n)^\alpha)$. A. Nordlander.

Bhatt, S. N.: On negative order summability of a Fourier series. Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A 22, 298—304 (1957).

Let $\varphi(t)$ be periodic, even and integrable over $(-\pi, \pi)$, and let its Fourier series be given by

$$\varphi(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt.$$

Generalizing the reviewer's criterion for the convergence of Fourier series (G. Sunouchi, this Zbl. 44, 72), the author establishes the following theorem: If there is a $\Delta > 1$, such that

$$\int_0^t \varphi(u) du = o(t^{\Delta+1-\Delta^{-1}}) \text{ and } \int_0^t |\dot{d}\{u^{\Delta+\Delta^{-1}-1} \varphi(u)\}| = O(t),$$

as $t \rightarrow 0$, $0 \leq t \leq \pi$, then the Fourier series of $\varphi(t)$ is summable $(C, -1)$ to zero. Already M. Kinukawa (this Zbl. 58, 56) has proved this theorem independently.
G. Sunouchi.

Lorch, Lee: The Gibbs phenomenon for Borel means. Proc. Amer. math. Soc. 8, 81—84 (1957).

Let $B_x(t)$ denote the x -th Borel exponential or integral mean of the Fourier series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$. Then the author shows that for given T , $0 \leq T \leq \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} B_x(t_x) = \int_0^T \frac{\sin v}{v} dv,$$

where $t_x \rightarrow +0$ and $xt_x \rightarrow T$.

G. Sunouchi.

Wintner, Aurel: On the reduction (mod 1) of completely monotone functions $(0, \infty)$. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 43, 288—312 (1957).

The author gives a class of Fourier series, which represent completely monotone functions on the first half of the period, applying the Euler-Maclaurin summation formula to completely monotone functions $(0, \infty)$. As a by-product, the author shows the following fact: Put

$$C_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\lambda} \cos nx, \quad S_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\lambda} \sin nx, \quad (0 < \lambda < \infty),$$

then $-dC_\lambda(x)/dx$ and $-dS_\lambda(x)/dx$ are completely monotone on $0 < x \leq \pi$, and $S_\lambda(x)$ is completely monotone on $0 < x \leq \pi$, but the last fact becomes false if $S_\lambda(x)$ is replaced by $C_\lambda(x)$.
G. Sunouchi.

Kahane, Jean-Pierre: Généralisation d'un théorème de S. Bernstein. Bull. Soc. math. France 85, 221—229 (1957).

The author generalizes the well known Bernstein's theorem [see A. Zygmund. Trigonometrical series (this Zbl. 65, 56), chap. V]. $A(E)$ denotes the class of functions defined on a closed set E and prolongable on functions which have an absolutely convergent Fourier series. $\text{Lip } \alpha(E)$ denotes the class of functions defined on a closed set E , such that $|f(x') - f(x)| < K|x' - x|^\alpha$ where x and x' belong to E . E_h denotes the union of intervals of length $2h$ such that the centre of this intervals belongs to E . Let $\mu = \mu(E)$ be the inferior limit of ν such as $|E_h| = O(h^{1-\nu})$ as $h \rightarrow 0$. Then the theorem reads: $\text{Lip } \alpha(E) \subset A(E)$ for $\alpha > \frac{1}{2}\mu$. This is shown as the best possible result in a sense by giving examples.
G. Sunouchi.

Manaresi, Fabio: Alcuni teoremi sulle serie coniugate della serie di Fourier di una funzione di più variabili. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 27, 181—192 (1957).

Let $f(x, y)$ denote a function periodic of period 2π with respect to x and to y , L -integrable in the square $Q = [0, 0, 2\pi, 2\pi]$, and let $s_{mn}^{(1)}, s_{mn}^{(2)}, s_{mn}^{(3)}$ the partial sums of the Fourier series of f and its conjugate series with respect to x , to y , and to x, y , respectively. Suppose that f satisfies the usual condition $L: \int_0^{2\pi} |f(x, y)| dx \leq L$,

$\int_0^{2\pi} |f(x, y)| dy \leq L$, for almost all y and x respectively. For any point (x, y) denote by $4F(u, v)$, $u, v \geq 0$, the usual sum of the four functions $f(x \pm u, y \pm v)$, and suppose that there is a number $\varphi(x, y)$ such that

$$\lim_{u, v \rightarrow 0^+} \int_0^u \int_0^v |F(\mu, \nu) - \varphi(x, y)| d\mu d\nu = 0 \quad \text{as } u, v \rightarrow 0^+.$$

Then it is proved that

$$\lim (\sigma_{2m, n}^{(1)} - \sigma_{mn}^{(1)}) = \lim (\sigma_{m, 2n}^{(2)} - \sigma_{mn}^{(2)}) = (\ln 2/2\pi) \varphi(x, y),$$

$$\lim (\sigma_{2m, 2n}^{(3)} - \sigma_{2m, n}^{(3)} - \sigma_{m, 2n}^{(3)} + \sigma_{mn}^{(3)}) = (\ln 2/\pi)^2 \varphi(x, y)$$

as $m, n \rightarrow \infty$. These results extend to double Fourier series a result of O. Szász on simple Fourier series (this Zbl. 19, 15). L. Cesari.

Zervos, Spiros: Une méthode de minoration des valeurs absolues des zéros des séries de Taylor. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 394—396 (1957).

Let $\Phi(x)$ be strictly monotonic and satisfy $\gamma < \Phi(x) < \delta$ for $a < x < b$, let the set (M_j) satisfy $a < M_j < b$, and let $\mu = \inf(M_j)$, $M = \sup(M_j)$. Then, for $t > 0$ and $g(x) = x^t - f(\Phi(x))$, where f is monotonic in the opposite sense to Φ , we have (i) $\min\{\mu, [g(x_0) + f(\Phi(M_j))]^{1/t}\} \leq x_0 \leq \max\{M, [g(x_0) + f(\Phi(M_j))]^{1/t}\}$, ($x_0 \in (a, b)$); (ii) $\min\{\mu, [f(\Phi(M_j))]^{1/t}\} \leq \xi \leq \max\{M, [f(\Phi(M_j))]^{1/t}\}$, ($\xi =$ any root of $g(x) = 0$ in (a, b)). After proving these results the author applies them to Taylor and to Dirichlet series. For example, if $0 < M_r < r$ and ϱ is the positive zero of $s(y) = |a_0| - \sum_{r=1}^{\infty} |a_r| y^r$, ($r =$ radius of convergence of $\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r$), then

$\varrho^{-1} \leq \max\left\{M, \left[\sum_{r=1}^{\infty} |a_r| M_r^{-r+t}\right]^{1/t}\right\}$. Particular cases of this result have been obtained by a number of authors, sometimes for polynomials only. N. A. Bowen.

Zervos, Spiros: Sur la minoration des valeurs absolues des zéros des séries de Taylor. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 619—622 (1957).

The author generalizes some of his previous results (see the preceding review). Let $u > 0$, $0 < a < x_0 < b$, $\alpha(u, x) = u^t - f(\Phi_j(x))$. Then (i) generalizes to: either $x_0 \leq M$, or $u_0 < [\alpha(u_0, x_0) + f(\Phi_j(M_j))]^{1/t}$, which gives a generalization of (ii). Some particular cases are considered. N. A. Bowen.

Spezielle Funktionen:

Campbell, R.: Sur les polynomes orthogonaux dont les dérivés sont orthogonaux. Monaths. Math. 61, 143—146 (1957).

Sehr kurzer Beweis des zuerst vom Ref. (dies. Zbl. 11, 62) mitgeteilten Satzes, daß die klassischen Orthogonalpolynome die einzigen Orthogonalpolynome sind, deren Ableitungen ebenfalls ein Orthogonalsystem bilden. Der Beweis benutzt die für die Koeffizienten der Rekursionsformeln bestehenden Differenzengleichungen. Bemerkung des Ref.: Unter 1°) ($U_n = 1$) müssen auch die Hermite'schen Polynome genannt werden. W. Hahn.

Chihara, T. S.: On quasi-orthogonal polynomials. Proc. Amer. math. Soc. 8, 765—767 (1957).

L'A. generalizza, come segue, una certa classe di polinomiali già introdotti da A. Rosenthal (cfr. questo Zbl. 53, 228). Comincia con l'indicare con $p_n(x)$ l' n -mo polinomiale ortonormale, associato ad una distribuzione $dx(x)$ su un certo intervallo (a, b) . Fissati poi due interi $k \geq 0$, $r \geq 1$, pone $p_{-m}(x) = 0$ per $m = 1, 2, \dots, kr$, infine $q_n(x) = \sum_{j=0}^k a_{nj} p_{n-jr}(x)$ (a_{nj} costanti, $a_{n0} \neq 0$). L'A. studia alcune proprietà, molto interessanti, dei nuovi polinomiali $q_n(x)$, che sono detti quasi-ortogonali degli indici (k, r) e che soddisfano ovviamente alle relazioni $(q_m, q_n) = \int_a^b q_m(x) q_n(x) dx(x) = 0$, per $m \neq n \pm j r$. T. Viola.

Gatteschi, Luigi: Limitazione degli errori nelle formule asintotiche per le funzioni speciali. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 16, 82—94 (1957).

Verf. weist hin auf die Wichtigkeit der genaueren Abschätzung der Fehler bei Näherungsformeln für die speziellen Funktionen, bespricht verschiedene Methoden, die für diese Abschätzung geeignet sind [Methode von Liouville-Stekloff-Fubini, Methode der „serie inviluppanti“ (siehe F. G. Tricomi, dies. Zbl. 34, 324; das Zitat 7 des Verf. ist ungenau) u. a.], und wendet unter Heranziehung der Szegö'schen Abschätzung die zweite an, um die Nullstellen $X_{n,r}$ der Legendreschen Poly-

nome $P_n(x)$ bis auf Fehler darzustellen, die dem absoluten Betrage nach kleiner sind als $4/(2n+1)(2n+3)(4r-1)$. O. Volk.

Chatterjee, S. K.: On certain definite integrals involving Legendre's polynomials. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 27, 144—148 (1957).

Mittels der Rodriguesschen Formel für die Ableitungen der Legendreschen Polynome $P_n(x)$ werden die Integrale $\int_{-1}^{+1} \frac{d^p P_m(x)}{dx^p} \frac{d^q P_n(x)}{dx^q} dx$, m, n, p, q natürliche Zahlen mit $1 \leq m \leq n$, $1 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n$, und $\int_{-1}^{+1} \prod_{q=1}^k \frac{dP_{n_q}(x)}{dx} dx$ ausgewertet. Vgl. D. S. Mitrinović, Publ. Fac. Électrotechn. Univ. Belgrade, Sér. Math. Phys. 1956, Nr. 1 (1956). O. Volk.

Brafman, Fred: Some generating functions for Laguerre and Hermite polynomials. Canadian J. Math. 9, 180—187 (1957).

Verf. gibt sieben erzeugende Funktionen für die Laguerreschen bzw. Hermite'schen Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ bzw. $H_n(x)$ an, von denen wir nur eine typische herausgreifen:

$$\exp(2xt - t^2 - v^2 t^2) \cosh(2vt(x-t)) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_2F_1 \left[-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; v^2 \right] \frac{H_n(x) t^n}{n!},$$

wobei zu bemerken ist, daß sich in diesem Fall ${}_2F_1[]$ auf die Tschebyscheffschen Polynome mit dem Argument $(1-v^2)^{-1/2}$ reduziert. K. Prachar.

Drazin, M. P.: Another note on Hermite polynomials. Amer. math. Monthly 64, 89—91 (1957).

Beweis der Identität

$$H_m(x) H_n(x) = \sum_r 2^r r! \binom{m}{r} \binom{n}{r} H_{m+n-2r}(x), \quad m, n = 0, 1, \dots$$

durch direkte Koeffizientenvergleichung. O. Volk.

Webster, M. S.: Non-linear recurrence relations for certain classical functions. Amer. math. Monthly 64, 249—252 (1957).

Verf. zeigt, daß gewisse Relationen für Ausdrücke der Turánschen Form $[f_n(x)^2 - f_{n+1}(x)f_{n-1}(x); f'_n(x)^2 - f'_{n+1}(x)f'_{n-1}(x); f'_n(x)^2 - f_n(x)f''_n(x)]$ charakteristisch für die ultrasphärischen, Hermite'schen und verallgemeinerten Laguerreschen Polynome sowie für die Besselschen Funktionen $J_n(x)$ sind. (Siehe L. Carlitz, dies. Zbl. 57, 54; V. R. Thiruvenkatachar und T. S. Nunjundiah, dies. Zbl. 43, 72; H. Skovgaard, dies. Zbl. 55, 299.) [Corrigenda: In Theorem 1, 2, 3 muß es heißen: $\lambda \neq -\frac{1}{2}(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$]. O. Volk.

Al-Salam, Walced A.: Some remarks on the Turán expression. Bull. College Arts Sci., Baghdad 2, 104—111 (1957).

Setzt man $T_n(f) = f_n(x)^2 - f_{n+1}(x)f_{n-1}(x)$, so zeigt Verf.: Ist $f_0(x) = J_0(x)$, $f_1(x) = J_1(x)$, so ist die Beziehung

$$T_n(f) = \frac{2}{x^2} \int_0^x x f_n(x)^2 dx$$

für die Besselschen Funktionen $J_n(x)$ kennzeichnend. Ferner gibt Verf. weitere Integraldarstellungen für $T_n(J)$ sowie solche für $T_n^{(k)}(J)$, $T_n^{(k)}(I)$, $E_n^{(k)}(J)$, $E_n^{(k)}(I)$, wo $T_n^{(k)}(f) = f_{n+k-1}(x)f_{n-k+1}(x) - f_{n+k}(x)f_{n-k}(x)$, $E_n^{(k)}(f) = f_n(x)^2 - f_{n+k}(x)f_{n-k}(x)$ und $I_n(x)$ modifizierte Besselsche Funktionen sind. Endlich beschäftigt sich Verf. mit der Frage, unter welchen Bedingungen für die Koeffizienten einer dreigliedrigen Rekursionslösungen der letzteren die Turánsche Ungleichung $T_n(f) \geq 0$ erfüllen. O. Volk.

Henrici, Peter: On the representation of a certain integral involving Bessel functions by hypergeometric series. J. Math. Physics 36, 151—156 (1957).

Es handelt sich um die Berechnung des Integrals

$$(1) \quad f(a, b, c) = \int_0^\infty J_\mu(at) J_\nu(bt) J_\lambda(ct) dt,$$

das für $\operatorname{Re}(\mu + \nu + \lambda) > -1$ bei beliebigen positiven a, b, c konvergiert. Für $c > a + b$ stellte es Bailey (dies. Zbl. 12, 210) als Produkt zweier hypergeometrischer Reihen (h. R.) dar. Verf. dehnt Baileys Ergebnis auf allgemeine positive Werte von a, b, c aus. Er zeigt, daß, wenn mindestens zwei dieser Zahlen verschieden sind, (1) sich durch „geometrisch konvergente (g. k.)“ h. R. ausdrücken läßt, d. h. solche $\sum a_n$, bei denen $a_{n+1}/a_n \rightarrow q$, $|q| < 1$. — Ist $a = b = c$, so drückt sich (1) durch h. R. mit dem Argument $e^{i\pi/3}$ aus. In dem Sonderfall $\mu = \nu$ kann man diese Reihen hier in g. k. Reihen umformen und für $\mu = \nu = \pm \lambda$ durch Γ -Funktionen geschlossen darstellen. Wegen des fallweise verschiedenen Ausdrucks von (1) sei auf die Arbeit selbst verwiesen.

L. Koschmieder.

Lorch, Lee and Peter Szego: Corrections and a remark to: A singular integral whose kernel involves a Bessel function. Duke math. J. 24, 683 (1957).

Betrifft die in dies. Zbl. 66, 52 besprochene Arbeit.

Pettis, Henry E.: On the evaluation of two functions occurring in Maslen and Moore's theory of strong transverse waves in a circular cylinder. J. aeronaut. Sci. 24, 64—65 (1957).

Es wird gezeigt, daß die inhomogenen Besselschen Differentialgleichungen $L(f) + (n^2/\alpha^2)f = J_n^2(\alpha)$, $L(g) = J_n^2(\alpha)$, $L(y) = y'' + y'/\alpha + 4y$, die partikulären Integrale

$$f_n(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{J_{2n}(2\alpha \cos \vartheta) - J_{2n}(2\alpha)}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta = - \sum_{r=1}^{\infty} J_{n+r}(\alpha) J_{n-r}(\alpha),$$

$$g_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{J_0(2\alpha \cos \vartheta) - J_0(2\alpha)}{\sin^2 \vartheta} \cos(2n\vartheta) d\vartheta = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} J_{n+r}^2(\alpha)$$

besitzen. Im Anhang wird das bekannte Integral $\int_0^\pi \frac{1 - \cos(2r\vartheta)}{\sin^2 \vartheta} \cos(2n\vartheta) d\vartheta$ ausgewertet (siehe dazu z. B. E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, I, § 8, Berlin 1878).

O. Volk.

Klamkin, M. S.: An application of the Gauss multiplication theorem. Amer. math. Monthly 64, 661—663 (1957).

Ausgehend vom Gaußschen Multiplikationstheorem für die Gammafunktion für $n = 3$ und $n = 4$ kommt Verf. bei Anwendung der Mellin-Transformation zur Auswertung folgender Integrale (x reell und positiv):

$$(1) \quad \int_0^\infty e^{-(t^n + \bar{x}t^{-n})} dt = \frac{2}{n} x^{1/2n} K_{1/n}(2\sqrt{x}), \quad n = 2, 3, \dots$$

$$(2) \quad \int_0^\infty e^{-x/u} K_j(2\sqrt{u}) u^{-l} du,$$

$$j = \frac{1}{3}, \quad l = -\frac{3}{2}; \quad j = \frac{2}{3}, \quad l = -1; \quad j = \frac{1}{3}, \quad l = -\frac{1}{2};$$

$$(3) \quad \int_0^\infty K_j(2\sqrt{xu}) K_l(2\sqrt{u}) u^m du,$$

$j = \frac{1}{4}, \quad l = \frac{1}{4}, \quad m = -\frac{1}{2}; \quad j = \frac{3}{4}, \quad l = \frac{1}{4}, \quad m = -1; \quad j = \frac{1}{2}, \quad l = \frac{1}{2}, \quad m = -\frac{3}{4}$. [Ref.: Das Integral (1) ergibt sich unmittelbar durch Umformung; die Substitution $t = x^{1/2n} e^{\pm u/n}$ führt auf das bekannte Integral der Hankelschen Funktion $H_{1/n}(ix)$ siehe z. B. Repertorium der höheren Analysis I, 3. S. 1430 (1929)].

O. Volk.

Ragab, F. M.: On the product of two confluent hypergeometric functions. Monatsh. Math. 61, 312—317 (1957).

Beweis der Relation

$$\int_0^\infty x^{-1/2} {}_1F_1(a; c; -x) {}_1F_1\left(a; c; -\frac{b}{x}\right) dx$$

$$= \pi^{1/2} \frac{\Gamma(a - \frac{1}{2}) \Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(c - \frac{1}{2})} {}_1F_1(2a - 1; 2c - 1; -2b^{1/2}),$$

$\Re(a) > \frac{1}{2}$, b reell und positiv, und der entsprechenden für das $p-1$ -fache Integral

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty {}_1F_1\left(a; c; -\frac{b}{x_1 x_2 \cdots x_{p-1}}\right) \prod_{q=1}^{p-1} x_q^{q/p-1} {}_1F_1(a; c; -x_q) dx_q.$$

Anwendung auf die Whittakerschen Funktionen $M_{k,m}(x)$ ($a = \frac{1}{2} - k + m$, $c = 2m + 1$) und die modifizierten Besselschen Funktionen $I_n(x)$ ($k = 0$, $m = n$). [Anmerkung des Ref.: Die obigen Formeln ergeben sich auch fast unmittelbar durch Grenzübergang aus denen, die Verf. für Produkte aus Gaußschen hypergeometrischen Funktionen ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ (dies. Zbl. 77, 73) abgeleitet hat. In Formel (2) muß es $pc - p + 1$ statt $p\beta - p + 1$ heißen; in Formel (14) ist statt X das Zeichen \times zu setzen.]

O. Volk.

Kreyszig, Erwin: On the zeros of the Fresnel integrals. Canadian J. Math. 9, 118—131 (1957).

Die Arbeit stellt bis auf einige Ergänzungen (Tabelle der Nullstellen, Satz 5 über die Lage der komplexen Nullstellen $z = x + iy$ auf der logarithmischen Kurve $y = \pm \frac{1}{2} \log(2\pi x)$ u. a.) die Wiedergabe früherer Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 42, 303; 50, 73) über die allgemeinen Funktionen $Si(z, \alpha)$, $Ci(z, \alpha)$ dar, die für $\alpha = \frac{1}{2}$ die Fresnelschen Integrale liefern. [Ref. erlaubt sich auf die Darlegungen bei Erdélyi, Higher transcendental functions II (dies. Zbl. 52, 295), S. 149 ff. und H. Buchholz, Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen (dies. Zbl. 50, 74), S. 212 im Zusammenhang mit der unvollständigen Gammafunktion bzw. den konfluenten hypergeometrischen Funktionen und Whittakerschen Funktionen hinzuweisen].

O. Volk.

Anastassiadis, Jean: Sur les solutions logarithmiquement convexes ou concaves d'une équation fonctionnelle. Bull. Sci. math., II. Sér. 81, 78—87 (1957).

Verf. verallgemeinert ein bekanntes Resultat bezüglich der Γ -Funktion [E. Artin, Einführung in die Theorie der Gammafunktion, dies. Zbl. 1, 286; in der vorliegenden Arbeit wird auch eine Variante dieses Beweises auf Grund eines Satzes von P. Montel, J. Math. pur. appl., IX. Sér. 7, 29—60 (1928) gegeben]. Er beweist nämlich, daß die einzige Lösung der Differenzgleichung

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_p)}{(x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_q)} \quad (a_i > 0, b_j > 0, i=1, \dots, p, j=1, \dots, q),$$

die für genügend große x logarithmisch konvex (konkav) bleibt, für $x > 0$

$$f(x) = \Gamma(x) \cdot \frac{\Gamma(x+a_1)\Gamma(x+a_2)\cdots\Gamma(x+a_p)}{\Gamma(1+a_1)\Gamma(1+a_2)\cdots\Gamma(1+a_p)} \cdot \frac{\Gamma(1+b_1)\Gamma(1+b_2)\cdots\Gamma(1+b_q)}{\Gamma(x+b_1)\Gamma(x+b_2)\cdots\Gamma(x+b_q)}$$

ist. Verf. stellt noch die Bedingung $\{p > q-1\}$ oder $\{p = q-1 \text{ und } b_1 + \cdots + b_q > a_1 + \cdots + a_p\}$ bzw. $\{p < q-1\}$ oder $\{p = q-1 \text{ und } b_1 + \cdots + b_q < a_1 + \cdots + a_p\}$; diese braucht er aber nur, um von einer Ungleichungskette, die er schon bewiesen hat, noch zu zeigen, daß die Ungleichung zwischen dem ersten und dem letzten Glied tatsächlich besteht. Diese zusätzliche Bedingung scheint vielmehr dafür notwendig zu sein, daß es überhaupt für genügend große x logarithmisch konvexe (konkave) Lösungen gibt. Es wird auch der Fall, wo die Voraussetzungen $a_i > 0$, $b_j > 0$, $x > 0$ nicht mehr erfüllt sind, untersucht. Hier ist die bezügliche zusätzliche Bedingung schon wesentlicher, da der Beweis der oben erwähnten Ungleichungskette für $x < 0$ nicht mehr richtig ist. Der Beweis ist übrigens klar geführt und leicht verständlich. Als Spezialfälle figurieren die Eulersche Betafunktion und gewisse spezielle hypergeometrische Funktionen. Eine Anzahl von Druckfehlern stört das Lesen. Ref. bemerkt, daß ähnliche Fragen von einem sehr allgemeinen Gesichtspunkt aus schon untersucht wurden (W. Krull, dies. Zbl. 31, 49; 32, 280).

J. Aczél.

Funktionentheorie:

● Giqueaux, M. et A. Oudart: Aide-mémoire des fonctions analytiques. Paris et Liège: Librairie Polytechnique Ch. Béranger 1958. 35 p.

Les AA. semblent avoir recherché avant tout une extrême concision. Il en résulte une certaine imprécision dans les définitions et dans les hypothèses qui sont à la base des propriétés énoncées. Les démonstrations sont seulement esquissées. Le Ref. considère donc cet Ouvrage comme un formulaire à l'usage exclusif de l'Ingénieur. — Les questions abordées sont les suivantes: 1. théorème de Cauchy; 2. expression d'une fonction analytique en un point connaissant sa valeur sur un contour fermé (formules de Cauchy et de Poisson); 3. série de Laurent; 4. notions de point singulier et de résidu; 5. représentation conforme avec des exemples élémentaires (parmi lesquels les transformations de Joukowski et de Schwartz). — Les développements les plus importants concernent les nos 2 (8 pages) et 5 (18 pages).

J. Dufresnoy.

Leont'ev, A. F.: Zur Frage der Interpolation in der Klasse der ganzen Funktionen endlicher Ordnung. Mat. Sbornik, n. Ser. **41** (83), 81—96 (1957) [Russisch].

On cherche une fonction entière, appartenant au plus au type moyen de l'ordre donné ϱ , prenant des valeurs données a_n aux points donnés λ_n ($0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$, $\dots \lambda_n \rightarrow \infty$). L'A. établit une condition nécessaire et suffisante, portant sur les λ_n , pour que ce problème d'interpolation admette au moins une solution pour tout choix des a_n satisfaisant à la condition évidemment nécessaire $|a_n| < e^{O(1)|\lambda_n|^\varrho}$. — Des cas particuliers ont été traités dans deux Notes antérieures de l'A. (voir ce Zbl. **41**, 404; **34**, 50).

G. Bourion.

Džrbašjan, M. M.: Über die Entwicklung analytischer Funktionen in eine Reihe nach rationalen Funktionen mit einer vorgegebenen Menge von Polen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk **10**, Nr. 1, 21—29 (1957) [Russisch].

Le domaine D du plan z est l'intérieur d'une courbe de Jordan L ; le complémentaire de \bar{D} est représenté sur $|w| > 1$ par $w = \Phi(z)$, $z = \Psi(w)$ [$\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty)$ positif]; $\{\omega_n\}$ étant une suite de points de ce complémentaire, soit $\{\varphi_n(w)\}$ le système des fonctions rationnelles de Walsh, orthonormales sur $|w| = 1$, formées avec les pôles $\Phi(\omega_n)$; la fraction rationnelle $M_n(z)$ est la somme des parties principales de $\varphi_n[\Phi(z)]$ relatives aux pôles $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ (si tous les ω_n sont au point à l'infini, on retrouve donc les polynômes de Faber). Moyennant des hypothèses convenables sur L et sur les ω_n , toute fonction holomorphe dans D et continue sur \bar{D} admet un développement $\sum c_n M_n(z)$ qui converge uniformément à l'intérieur de D .

G. Bourion.

Hummel, J. A.: Complete orthonormal sequences of functions uniformly small on a subset. Proc. Amer. math. Soc. **8**, 492—495 (1957).

Verf. zeigt: Es sei D ein beschränktes Gebiet der komplexen Ebene, $L^2(D)$ der Hilbertraum der in D quadratintegrierbaren analytischen Funktionen. Es sei K eine kompakte Teilmenge von D . Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\Phi_n(z)\}$, so daß a) $\|\Phi_n\|_K = \int_K |\Phi_n|^2 dx dy < \varepsilon$ und b) $|\Phi_n(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in K$ und alle n . Als Korollar ergibt sich: Es seien D ein beschränktes Gebiet, K ein kompaktes Teilgebiet von D und $K_D(z, w)$ die Bergmansche Kernfunktion. Es sei ferner $0 < 2\varepsilon < \max_{z \in K} K_D(z, \bar{z})$. Dann

gilt: Während für alle Orthonormalsysteme $\{\Phi_n(z)\}$: $K_D(z, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(z) \overline{\Phi_n(w)}$ ist, so existiert doch keine ganze Zahl N , unabhängig von $\{\Phi_n\}$, so daß für alle Systeme $\{\Phi_n(z)\}$ gilt:

$$\left| K_D(z, w) - \sum_{n=1}^N \Phi_n(z) \overline{\Phi_n(w)} \right| < \varepsilon$$

für alle $z, w \in K$. Der Beweis dieser beachtlichen Resultate ist kurz und bleibt für allgemeinere Hilberträume gültig. Er benutzt S. Bergmans „doppeltorthogonale“ Funktionen.

H. J. Bremermann.

Motzkín, T. S. and J. L. Walsh: Underpolynomials and infrapolynomials. Illinois J. Math. **1**, 406—426 (1957).

E sei eine kompakte Punktmenge der komplexen Zahlenebene; ein Infrapolynom auf E ist ein normiertes Polynom f , zu welchem es kein Unterpolynom gibt, das ist ein normiertes gleichgradiges Polynom g mit $|g(z)| < |f(z)|$ für $z \in E$ und $f(z) \neq 0$, $g(z) = 0$ für $z \in E$ und $f(z) = 0$. Die Arbeit enthält eine systematische Theorie der Infrapolynome. Von den zahlreichen Ergebnissen seien nur die allgemeinsten angeführt; sie beziehen sich auf den Fall, daß die Mächtigkeit von E den Grad der betrachteten Polynome übersteigt. Der Raum der Infrapolynome festen Grades auf E ist in bezug auf kompakte Konvergenz abgeschlossen und zusammenhängend. Unter den Unterpolynomen eines beliebigen normierten Nicht-Infrapolynoms gibt es stets Infrapolynome.

H. Tietz.

Nassif, M.: On the convergence of the product series of simple sets of polynomials in a general region. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **60**, 598—607 (1957).

Zur Terminologie vgl. Whittaker, dies. Zbl. **38**, 228. Es seien die Basen $\{p_n^{(1)}(z)\}$ und $\{p_n^{(2)}(z)\}$ in dem durch die geschlossene Kurve C berandeten Gebiet $D(C)$ effektiv; die Koeffizienten von z^n seien vom Betrage eins. Verf. betrachtet die Produktbasis $\{p_n^{(1)}(z) p_n^{(2)}(z)\}$. Durch diese läßt sich in $D(C)$ jede Funktion darstellen, die in einem gewissen Gebiet $D(C_1)$ regulär ist. Der Hauptsatz der Arbeit betrifft den Zusammenhang von C und C_1 . Die Aussage über $D(C_1)$ läßt sich allgemein nicht verbessern. Bei spezielleren Annahmen über C kann man mehr aussagen; ist z. B. C die Ellipse mit den Halbachsen $a > b > 0$, so ist C_1 die Ellipse mit den Halbachsen $a_1 = k(2a - 3b)$, $b_1 = k(2a - b)$, $k = [1 + 4(a - b)/(a + b)]^{-1/2}$. Für die Beweise wird die von Newns (dies. Zbl. **50**, 77) entwickelte Theorie der Faserschen Polynome herangezogen.

W. Hahn.

Nassif, M.: Note on convergence of the product of basic sets of polynomials. Amer. J. Math. **79**, 943—948 (1957).

Berichtigung einiger Ergebnisse aus einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **34**, 49, unter dem Namen M. N. Ghabbour) auf Grund der von Newns (dies. Zbl. **50**, 77) geübten Kritik.

W. Hahn.

Gaier, Dieter: Note on some gap theorems. Proc. Amer. math. Soc. **8**, 24—28 (1957).

Es sei $\sum_0^\infty a_m$ eine Lückenreihe mit $a_m = 0$ für $m_k < m \leq M_k$, $m_k \nearrow \infty$, $M_k \geq m_k(1 + \delta)$ für ein $\delta > 0$. Ist $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ regulär für $|z| < 1$, ist ferner $f(z)$ beschränkt in $|z - \alpha| < 1 - \alpha$ für ein $0 < \alpha < 1$ und ist $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = s$, so

gilt $\sum_0^{m_k} a_m \rightarrow s$. — Dieses Ergebnis enthält frühere Resultate von M. A. Evgrafov (dies. Zbl. **47**, 311), wo Stetigkeit von $f(z)$ für $|z - \alpha| \leq 1 - \alpha$ verlangt wird und dem Verf. und W. Meyer-König (dies. Zbl. **71**, 286), wo Beschränktheit von $f(z)$ für $|\arg z| < \varepsilon$, $0 < |z| < 1$ und die Existenz des $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$ verlangt wird. Zum Beweis wird ein zum Zygmundschen Satz (dies. Zbl. **2**, 189) analoger Satz bewiesen, indem $C_1 T_\alpha$ -Summierbarkeit anstatt B -Summierbarkeit verwendet wird.

A. Peyerimhoff.

Erdős, Paul: Über eine Fragestellung von Gaier und Meyer-König. J.-Ber. Deutsch. Math. Verein. **60**, 89—92 (1957).

Der Verf. liefert ein Beispiel einer Potenzreihe $f(z) = \sum a_k z^{n_k}$ vom Konvergenzradius 1 mit $n_{k+1} - n_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) (Fabry-Lücken), $a_k > 0$ und $\sum a_k = \infty$, so daß $f(z)$ für jedes $\delta > 0$ in $M_\delta = \{r e^{i\varphi} \text{ mit } 0 \leq r < 1, |\varphi| > \delta\}$ beschränkt ist. Dies bedeutet, daß der Fabrysche Lückensatz für einen von Ref. und Meyer-König

(dies. Zbl. 71, 286) eingeführten abgeänderten Singularitätsbegriff (lokale Unbeschränktheit am Rande von $|z| < 1$) nicht mehr richtig ist. *D. Gaier.*

Rényi, Catherine: On periodic entire functions. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 8, 227—233 (1957).

Let $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ be a transcendental integral function, $Z_a(n) = \text{no. of } a_s (s=0, 1, 2, \dots, n) \text{ which are zero, } a \neq b, \Delta(n) = Z_a(n) + Z_b(n) - n$. Then (Theorem I), (1) if $f(z)$ is of order ≥ 1 , (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1+1/(e+\varepsilon)} \Delta(n) \leq 0$ for any $\varepsilon > 0$, and (3) if $f(z)$ is also of finite type $T \geq 0$, (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1+1/e} \Delta(n) \leq \frac{1}{2} |b-a| e^2 (T/e)^{1/e}$.

Hence (Theorem II), if $g(z)$ is a periodic integral function, and $\lambda(n) = Z_a(n) - \frac{1}{2} n$, then (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \lambda(n) \leq 0$, (whence the power series of $g(z)$ cannot have Fabry gaps):

(ii) from (1), (3) for $g(z)$ follow (2), (4) respectively with λ, P (period) in place of $\Delta, 2|b-a|$ respectively. Again, (Theorem III), for the real function $h(x)$, defined on the real axis, of period 2π and L -integrable, we have $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} Z(n) \leq \frac{1}{2}$, where $Z(n)$

denotes the no. of $c_s (s=0, 1, 2, \dots, n)$ which are zero in the Hermite expansion $h(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x)$.

$$[\text{Here } H_n(x) = \frac{e^{x^2/2} d^n e^{-x^2/2}}{n! dx^n}, c_n = \frac{n!}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) H_n(x) e^{-x^2/2} dx].$$

Theorem IV. There exist periodic integral functions for which $\lambda(n) \rightarrow \infty$.

N. A. Bowen.

Kövari, T.: A note on entire functions. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 8, 87—90 (1957).

It is shown that the integral function $f(z)$ of order $\rho (0 < \rho < \infty)$, type $\sigma (0 < \sigma < \infty)$, satisfies

$$(i) 1 \leq \lim_{r \rightarrow \infty} (M(r) \sigma \rho r^{\rho-1})^{-1} M'(r) \leq e, \quad (ii) 1 \leq \lim_{r \rightarrow \infty} (M(r) \sigma \rho r^{\rho-1})^{-1} M_1(r) \leq e,$$

and none of these bounds can be improved. [Definitions: $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $M'(r) = dM(r)/dr$ (which exists almost everywhere), $M_1(r) = \max_{|z|=r} |f'(z)|$] (ii) is stronger than Shah's result

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\log r)^{-1} \log (r M_1(r)/M(r)) = \rho. \quad \text{N. A. Bowen.}$$

Boas jr., R. P.: Growth of derivatives of entire functions. Math. Z. 68, 296—298 (1957).

Ist $f(z)$ eine ganze Funktion mit $(1) \log |f(z)| = O(|z|)$ (Exponentialtyp), so folgt aus $f(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty)$ stets $f'(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty)$. Dieses Ergebnis stammt von Plancherel und Pólya (dies. Zbl. 16, 360), und wurde vom Ref. unabhängig neu bewiesen und zur Lösung des Problems der Indexverschiebung beim Borel-Verfahren verwendet (dies. Zbl. 50, 284); der Satz ist auch in einem allgemeineren Ergebnis von Delange und Ref. [Arch. der Math. 7, 135—142 (1956)] enthalten. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, ob (1) abgeschwächt werden kann. Daß $\log |f(z)| = O(|z|^{1+\varepsilon}) (\varepsilon > 0)$ nicht hinreicht, war bekannt (Ref., dies. Zbl. 66, 305). Jetzt wird ganz allgemein bewiesen: Zu jeder stetig differenzierbaren Funktion $\mu(t)$ mit $\mu(t) \geq 2\pi$, $\mu(t) \nearrow \infty$, $\mu'(t) \searrow 0$, $\mu'(t) = o(1/t) (t \rightarrow \infty)$ gibt es eine ganze Funktion $f(z)$ so, daß $\log |f(z)| = O(|z| \cdot \mu(|z|))$ und $f(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty)$ gelten, während jedoch $f'(x) (x > 0)$ nicht beschränkt ist. Die Bedingung (1) und die entsprechende Bedingung bei der Invexverschiebung [$a_n = O(K^n)$ für ein $K > 0$] sind also bestmöglich.

D. Gaier.

Srivastav, R. P.: On the derivatives of integral functions. Math. Student 25, 11—15 (1957).

Let $M^{(n)}(r)$ denote the maximum modulus on $|z| = r$ of $f^{(n)}(z)$, where $f(z)$ is an integral function of order ρ , lower order λ . Let $\Phi(r, n)$ denote

$$(\log r)^{-1} \log [r \{M^{(n)}(r)/M(r)\}^{1/n}].$$

The following results, based on theorems of Bose and Shah, are obtained. If the sequence $M^{(n)}(r)$, $n = 0, 1, \dots$, is non-increasing, then $\lambda < 1$; if non-decreasing, then $\rho > 1$. $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r, n) = \rho$ if $f(z)$ is of regular growth. $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r, n) = \rho$ if $\lambda > 1$. $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r, n) = \lambda$. $M(r) r^{(\lambda - \epsilon - 1)n} < M^{(n)}(r) < M(r) r^{(\rho + \epsilon - 1)n}$ for $r > r_0(f)$.

N. A. Bowen.

Erdős, P. and A. Rényi: On the number of zeros of successive derivatives of entire functions of finite order. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 8, 223—225 (1957).

Set $f(z)$ be an integral function, $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $x = H(y)$ the inverse function of $y = \log M(x)$, $N_k(f(z), 1)$ the number of zeros of $f^{(k)}(z)$ in the unit circle. Then $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} N_k(f(z), 1) H(k) \leq e^{2-e^{-1}}$ when $f(z)$ is of finite order $\rho \geq 1$. Compare the authors' paper (see this Zbl. 70, 296), where e^2 appears on the R. H. S. of the inequality and ρ is unrestricted.

N. A. Bowen.

Biernacki, Mieczysław: Sur la caractéristique $T(f)$ des fonctions méromorphes dans un cercle. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 9, 99—119 und poln. u. russ. Zusammenfassg. 119—125 (1957).

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe pour $|z| < 1$ et soit $T(r, f)$ sa caractéristique. R. Nevanlinna a démontré que, si l'on pose $\liminf_{r \rightarrow 1} [T(r, f)/\log(1-r)^{-1}] = k$,

$\liminf_{r \rightarrow 1} [T(r, f')/\log(1-r)^{-1}] = k_1$, on a, quand $r \rightarrow 1$ en dehors de certains intervalles exceptionnels, $\limsup [T(r, f')/T(r, f)] = K$ avec $K \leq 3 + 1/k$ et $K \leq 3k_1/(k_1 - 1)$ si $k_1 > 1$; si $f(z)$ est holomorphe on a les résultats plus précis $K \leq 1 + 1/k$ et $K \leq k_1/(k_1 - 1)$. On démontre de même que, si $f(z)$ est holomorphe et dépourvue de zéros, on a, quand $r \rightarrow 1$ en dehors de certains intervalles exceptionnels, $\limsup [T(r, f)/T(r, f')] = L$ avec $L \leq 1 + 1/k$ et $L \leq k_1/(k_1 - 1)$. C'est cette dernière propriété que l'A. cherche à étendre à des fonctions holomorphes $f(z)$ présentant des zéros. Citons les résultats suivants: Si $f(z)$ est holomorphe et si $\lim_{r \rightarrow 1} [T(r, f)/\log_2(1-r)^{-1}] = \infty$ ou $\lim_{r \rightarrow 1} [T(r, f')/\log_2(1-r)^{-1}] = \infty$, on a $\limsup_{r \rightarrow 1} [\log T(r, f)/\log T(r, f')] \leq 1$. — Si $f(z)$ est holomorphe et si la \liminf et la \limsup de $(1-r) T'(r, f')/T(r, f)$ sont m et M , on a $\limsup_{r \rightarrow 1} [T(r, f)/T(r, f')] < 2e(M+1)/m$.

— Si $f(z)$ est holomorphe, si $T(r, f')$ n'est pas borné et si

$$\limsup_{r \rightarrow 1} [T(r, f') T''(r, f')/T'^2(r, f')] = N, \text{ on a } \limsup_{r \rightarrow 1} [T(r, f)/T(r, f')] \leq 2eN.$$

Dans la dernière partie du travail l'A. donne des majorations, quand $r \rightarrow 1$, de

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \left| \Re \frac{z f'(z)}{f(z)} \right| \frac{dz}{z}.$$

J. Dufresnoy.

Wilson, R.: Hadamard multiplication of integral functions of finite order and mean type. J. London math. Soc. 32, 421—429 (1957).

Let $F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1n} z^n$, $F_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^n$, be two integral functions of orders ρ_1, ρ_2 , types h_1, h_2 , ($0 < h_1 < \infty$, $0 < h_2 < \infty$), respectively, let h be determined by $[h/(\sigma_1 + \sigma_2)]^{\sigma_1 + \sigma_2} = (h_1/\sigma_1)^{\sigma_1} (h_2/\sigma_2)^{\sigma_2}$, ($\sigma_1 = \rho_1^{-1}$, $\sigma_2 = \rho_2^{-1}$), and let $F(z)$ denote the Hadamard composition function $\sum_{n=0}^{\infty} a_{1n} a_{2n} z^n$. Th. Let F_1 have

only one direction of strongest growth $\arg z = \theta_1$, and let $\arg z = \theta_2$ be one of the directions of strongest growth of F_2 . Then F is of order $\varrho_1 \varrho_2 / (\varrho_1 + \varrho_2)$, type h , and $\arg z = \theta_1 + \theta_2$ is a direction of strongest growth of F in cases: (i) F_1 a generalized exponential function; (ii) θ_1 an isolated direction of strongest growth, θ_2 of any kind except perhaps an interior member of a continuous set of directions of strongest growth; (iii) θ_1 an accessible direction of strongest growth, θ_2 any kind of isolable direction of strongest growth. This result is extended; it holds as long as $\theta_{1\mu} + \theta_{2\nu} \neq \theta_{1\mu'} + \theta_{2\nu'}$ for every pair (μ, ν) , (μ', ν') , where $\theta_{1\mu}$ ($\mu = 1, 2, \dots$), $\theta_{2\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots$), are the directions of strongest growth of F_1, F_2 , respectively. The proof follows from a consideration of the singularities on the circle of convergence of the Hadamard composition function of the generalized Laplace transforms $f_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{pn} \Gamma(n\sigma_p + \sigma_p) z^{-n-1}$ of $F_p(z)$, ($p = 1, 2$), in relation to the singularities of f_1 and f_2 on their respective circles of convergence; since directions of strongest growth of an F correspond to singular directions of its f . N. A. Bowen.

Peyerimhoff, Alexander und Hans-Egon Richert: Über das Anwachsen analytischer Funktionen auf vertikalen Geraden. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 11, 125—134 (1957).

Eine für $t \geq T_0$ definierte Funktion $\varphi(t) > 0$ heißt normal oszillierend, wenn mit zwei Konstanten C und γ für $y, t \geq T_0$ gilt: $\varphi(y) \leq C e^{\gamma|y-t|} \varphi(t)$. In Verallgemeinerung bekannter Sätze von Lindelöf und Carlson wird bewiesen: Satz 1. $f(s)$ sei in dem Halbstreifen $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, $t \geq T_0 \geq 0$ ($s = \sigma + it$) analytisch. Mit zwei normal oszillierenden Funktionen φ_1, φ_2 sei $|f(\sigma_\nu + it)| \leq \varphi_\nu(t)$ ($\nu = 1, 2$) und $f(\sigma + it) = O(e^{Kt})$ für $t \geq T_0$ gleichmäßig in $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$. Dann ist

$$f(\sigma + it) = O(\varphi_1(t)^{(\sigma_2 - \sigma)/(\sigma_2 - \sigma_1)} \varphi_2(t)^{(\sigma - \sigma_1)/(\sigma_2 - \sigma_1)}).$$

Satz 2. Wird die Voraussetzung über $f(\sigma_\nu + it)$ ersetzt durch ($p \geq 1$):

$$\left(\int_{T_0}^T |f(\sigma_\nu + it)|^p dt \right)^{1/p} \leq \varphi_\nu(T), \text{ so ist } \left(\int_{T_0}^T |f(\sigma + it)|^p dt \right)^{1/p} = O(\varphi_1(T)^{(\sigma_2 - \sigma)/(\sigma_2 - \sigma_1)} \varphi_2(T)^{(\sigma - \sigma_1)/(\sigma_2 - \sigma_1)}).$$

Aus Satz 1 ergibt sich, daß die Abschätzung für Laplace-Integrale: $f(\sigma + it) = o(t^{k+1})$ für $\sigma \geq \sigma_k + \varepsilon$ (σ_k = Abszisse der C_k -Summabilität) nicht zu $f(\sigma + it) = O(t^{k+1}/\eta(t))$, $\eta(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$, verbessert werden kann. G. Doetsch.

Biernacki, Mieczyslaw and Jan Krzyż: On the monotony of certain functionals in the theory of analytic functions. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 9, 135—145, poln. u. russ. Zusammenfassg. 146—147 (1957).

The purpose of this paper is to study certain functionals defined for functions regular in the circle $|z| < R$ which are, the function $f(z)$ being fixed, real and monotonic functions of the variable $r = |z|$ in the open interval $(0, R)$. The authors prove: If $f(z)$ is regular for $|z| < R$ and $f(z) \neq 0$, then the quotient $r^2 I_2(r, f')/I_2(r, f)$, where $I_2(r, f) = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$, is a strictly increasing function of r in $(0, R)$, unless $f(z) = a_n z^n$ ($a_n \neq 0$; $n \geq 0$, entire). Next, they prove: Suppose that the function $f(z)$, regular for $|z| < R$ and non-vanishing identically, maps the circle $|z| = r < R$ onto the curve C_r . If $\Phi(\theta) = \arg f(re^{i\theta})$ on C_r , then

$$\left(\int_{C_r} |f(re^{i\theta})|^p d\Phi(\theta) \right) / \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)$$

is an increasing function of r in $(0, R)$ for any p . Further, the authors prove a result which yields a simple geometrical interpretation to the Hadamard's three circles theorem. Finally they prove: If $f(z)$ is a function regular for $|z| < R$ and if $f'(z) \neq 0$

for $|z| < R$, then $\delta(r) = L^2(r) - 4\pi S(r)$, where

$$L(r) = \int_0^{2\pi} |f'(r e^{i\theta})| r d\theta \quad \text{and} \quad S(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |f'(r e^{i\theta})|^2 r dr d\theta,$$

increases strictly for $r \in (0, R)$, unless $f(z) = (az + b)/(cz + d)$, ($ad - bc \neq 0$). Some conjectures are also stated.

K. Noshiro.

Tanaka, Chuji: An extension of Kintchine-Ostrowski's theorem and its applications. Kodai math. Sem. Reports 9, 97–104 (1957).

Folgende, bereits auf Ostrowski zurückgehende Verallgemeinerung des Satzes von Khintchine-Ostrowski wird hier neu bewiesen (vgl. auch Privalov, Rand-eigenschaften analytischer Funktionen, Berlin 1956, S. 83): Sind die Funktionen $f_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) in $|z| < 1$ regulär und von gleichmäßig beschränkter Charakteristik, und konvergiert ferner $\{f_n(e^{i\varphi})\}$ auf einer φ -Menge von positivem Maß, so konvergiert $\{f_n(z)\}$ in jedem abgeschlossenen Teil von $|z| < 1$ gleichmäßig. Als Anwendung werden zwei Verallgemeinerungen eines klassischen Montelschen Satzes gegeben, wovon ein Beispiel genannt sei. Die Funktion $f(z)$ ($z = x + iy$) sei im Streifen $\alpha < x < \beta$ regulär, und es gelte dort $\log^+ |f(z)| \leq h(z)$ für eine positive harmonische Funktion $h(z)$, welche an den Stellen $z = x_0 + in2\pi$ ($n = 1, 2, \dots$; $\alpha < x_0 < \beta$, x_0 fest) beschränkt sei. Ferner sei E eine mit $2\pi i$ periodische Punktmenge auf $\Re(z) = \alpha$ von positivem Maß. Gilt dann für die fast überall existierenden Randwerte $\lim_{z \rightarrow \infty, z \in E} f(z) = a$ ($\neq \infty$), so konvergiert $f(z)$ gleichmäßig gegen a für $z \rightarrow \infty$ in jedem Streifen $\alpha + \varepsilon \leq x \leq \beta - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Beweis durch Betrachtung einer geeigneten Funktionenfolge und unter Verwendung einer Charakterisierung der Funktionen, die in $|z| < 1$ regulär und von gleichmäßig beschränkter Charakteristik sind (Rudin, dies. Zbl. 64, 312).

D. Gaier.

Terzioğlu, A. Nazim und Suzan Kahramaner: Über das Argument der analytischen Funktionen. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 21, 145–153 (1957).

Let $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ be regular and univalent in $|z| < 1$ and let $F(z) = z/f(z)$. The authors prove: If there exists a finite positive number λ such that, for the function $F(z)$, the relation $|\arg F(z)| < \lambda$ is satisfied in the whole disc $|z| < 1$, then $\pi(\log 4)/\log x_0 \leq \lambda$. Here x_0 denotes the greatest zero-point of the equation $m_k \log x - 2(x-1)(x+1)^{-1} = 0$, with $m_k = |a_k|/2 \log 4$, a_k being the first non-vanishing coefficient of $f(z)$. Moreover, they prove: If such a number λ does not exist, then $|\arg F(z)| \leq C|z|/(1-|z|^2)$, where $C = \log 16$. For these estimations, the extremal functions are given.

K. Noshiro.

Singh, Vikramaditya: Interior variations and some extremal problems for certain classes of univalent functions. Pacific J. Math. 7, 1485–1504 (1957).

Die effektive Methode der inneren Variation von Schiffer wird hier in der Behandlung einiger Extremalprobleme der schlichten Funktionen verwendet. Erstens: V_1 sei die Klasse der im Einheitskreis U schlichten, regulär-analytischen Funktionen $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ und V diejenige Unterklasse von V_1 , deren Funktionen reelle Koeffizienten haben. Die Funktion $\varphi(a_2, \dots, a_n; a_2, \dots, a_n)$ sei reell sowie symmetrisch und analytisch in a_r und \bar{a}_r . Es wird gezeigt, daß es entweder mehrere Funktionen der Klasse V_1 gibt, welche der Funktion φ den Maximumwert geben, oder daß die extremale Funktion zu der Klasse V gehört. Zweitens betrachtet der Verf. die Klasse derjenigen in U beschränkten schlichten regulär-analytischen Funktionen $f(z)$, für welche die folgenden Normierungsbedingungen gelten: $f(0) = 0$, $|f(z)| \leq 1$ in U und $f(\zeta) = \omega$, wo ζ ein Punkt in U ist. Diejenigen Funktionen dieser Klasse, welche den Wert $|f'(\zeta)|$ zum Maximum bzw. Minimum machen, werden bestimmt. Zum Schluß wird die Klasse der in U beschränkten symmetrischen schlichten regulär-analytischen Funktionen betrachtet, für deren Funktionen die Normierungen

$f(0) = 0$, $|f(z)| \leq 1$ und $f(\zeta) = \omega$ mit reellem Wert ζ in U gelten. Es werden diejenigen Funktionen gefunden, welche dem Wert $f(\eta)$, wo η reell und in U ist, den Extremalwert geben. *Y. Juve.*

Perron, Oskar: Über eine Schlichtheitschranke von James S. Thale. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1956, 233—236 (1957).

Es handelt sich um die Widerlegung einer Vermutung von J. S. Thale (dies. Zbl. 71, 291). Es ist bekannt, daß $F(z) = \frac{1}{1} + \frac{a_1 z}{1} + \frac{a_2 z^2}{1} + \dots$ ($|a_\nu| \leq \frac{1}{4}$; $\nu = 1, 2, \dots$) für $|z| \leq 1$ gleichmäßig konvergiert und folglich für $|z| < 1$ analytisch ist. J. S. Thale hat bewiesen, daß $F(z)$ den Kreis $|z| < 12\sqrt{2} - 16 = 0,97 \dots$ schlicht abbildet, und vermutet, daß sogar der ganze Kreis $|z| < 1$ schlicht abgebildet wird. Diese Vermutung erweist sich aber als falsch, der Kreis $|z| < 12\sqrt{2} - 16$ ist der größte, der durch $F(z)$ schlicht abgebildet wird. Denn wählt man a_1 beliebig, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_\nu = -\frac{1}{4}$ für $\nu = 3, 4, \dots$, so wird bewiesen, daß $F(z_1) = F(z_2)$ für solche z_1 und z_2 , welche den Gleichungen

$$z_1 / (1 + \sqrt{1 - z_1})^2 = 2^{-1/2} e^\alpha; \quad z_2 / (1 + \sqrt{1 - z_2})^2 = 2^{-1/2} e^{-\alpha}$$

genügen. Diese liefern zwei verschiedene z_1 und z_2 , falls $\alpha \neq 0$ ist, und diese z_1 und z_2 sind, für hinreichend kleines $|\alpha|$, beliebig nahe dem Wert $12\sqrt{2} - 16$.

S. Fenyő.

Tamura, Jirô: On the maximal Riemann surface. Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo 7, 19—22 (1957).

Nach einem bekannten Satz von Bochner-Heins gibt es für jede Riemannsche Fläche F eine Maximalfortsetzung; das heißt eine solche, die nicht weiter fortgesetzt werden kann. Verf. stellt folgenden Satz auf: Es sei $[G]$ eine Familie von Riemannschen Flächen, von denen vorausgesetzt wird: 1. Jede $G \in [G]$ ist „frei von I “, das heißt es gibt keine auf G einfach zusammenhängende Kurve, die die Fläche in zwei Teile teilt, von welchen einer schlichtartig und mehrfach zusammenhängend ist, 2. wenn $G_n \in [G]$ und $G_n \subset G_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$), so ist $\bigcup G_n \in [G]$ und 3. Es gibt eine beschränkte reellwertige Funktion μ_G für $G \in [G]$ definiert, so daß: (i) aus $G \subset G'$, $\mu_G \leq \mu_{G'}$ folgt und (ii) wenn G fortsetzbar ist, es ein G' gibt, so daß $G \subset G'$, und $\mu_G < \mu_{G'}$. Dann gibt es in $[G]$ eine maximale Fläche. Nimmt man als $[G]$ die Gesamtheit aller „frei von I “ Fortsetzungen von F , und für μ das harmonische Maß, so bekommt man den Satz von Bochner-Heins. Verf. gibt noch andere Anwendungen seines obigen Satzes.

S. Stoilow.

Wintner, Aurel: On the local domains of regularity of functions defined by implicit conditions. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 5, 275—287 (1957).

L'A. osserva che ragionando come in una sua precedente memoria (questo Zbl. 72, 87) sussiste il teorema: Sia $f(z, w) = \sum_{m,n} c_{m,n} z^m w^n$ regolare per $|z| < a$, $|w| < b$; $\varphi(r, s)$ una funzione reale definita per $0 \leq r < a$, $0 \leq s < b$, e si abbia $|f(z, w)| \leq \varphi(|z|, |w|)$. Se l'equazione $s = r \varphi(r, s)$ possiede una soluzione $s = s(r)$ definita per $0 \leq r < \alpha$, ($0 < \alpha \leq a$; $s(0) = 0$) allora l'equazione (*) $w = z f(z, w)$ possiede una soluzione regolare ed una sola $w = w(z)$ definita per $|z| < \alpha$. Risultati più raffinati relativi all'equazione (*) collegati ad un'altra ricerca dell'A. (questo Zbl. 71, 299) sono ottenuti quando si supponga $|f(z, w)|$ limitata per $|z| < a$, $|w| < s$, con $s < b$. Un altro espressivo risultato che l'A. pone in confronto con antichi risultati di Landau è il seguente: Se $f(z, w)$ è regolare nel bicilindro $|z| < 1$, $|w| < 1$. e ivi in modulo maggiore di 1, allora la soluzione $w = w(z)$ della (*) è in valore assoluto minore di 1 e semplice nel cerchio $|z| < \frac{1}{4} |f(0, 0)|^{-2}$. *G. Sansone.*

Pirl, Udo: Über isotherme Kurvenscharen vorgegebenen topologischen Verlaufes und ein zugehöriges Extremalproblem der konformen Abbildung. Math. Ann. 133, 91—117 (1957).

Die Dissertation des Verf. (vgl. dies. Zbl. 66, 58) wird in dem Sinne verallgemeinert, daß jetzt ebenfalls „Zwischenstreifen“ zugelassen werden; d. h. es werden auch zweifach zusammenhängende Teilgebiete berücksichtigt, welche an kein Randkontinuum grenzen und vielmehr mehrere Randkontinuen von mehreren anderen trennen (im Fall $n \geq 4$). — Als erstes stellt sich also ein topologisches Problem: die Aufzählung der möglichen Einteilungen eines n -fach zusammenhängenden Gebiets B_n der Ebene in zweifach zusammenhängende. Zu $p < n - 3$ bereits vorhandenen (genügend schmalen) Zwischenstreifen kann man genau $n - 3 - p$ weitere so unterbringen, daß diese $n - 3$ Zwischenstreifen einander nicht überlappen und paarweise verschiedene Systeme von Randkomponenten voneinander trennen. Mit den n Randstreifen zusammen haben wir also genau $2n - 3$ Streifen. — Zweitens wird wesentlich das analytische Problem behandelt: Nennen wir $\mu = (1/2\pi) \log R$ den Modul des Kreises $1 < |z| < R$; sei μ_v der Modul des zweifach zusammenhängenden Teilgebietes G_v ; in jeder „topologischen Klasse“ soll das System der G_v so gewählt werden, daß $\sum_{v=1}^{2n-3} \alpha_v^2 \mu_v$ (die α_v sind vorgegeben) maximal wird (Fall ohne punktförmige Randkomponente). Es wird gezeigt: In jeder topologischen Klasse gibt es genau ein extremales System von G_v (dabei reduzieren sich einige der G_v oft auf eine Linie: „Verschwindungsfälle“). Diese extremalen G_v bedecken ganz B_n ; ihre Grenzlinien sind analytisch und bilden das singuläre Netz einer in B_n einheitlichen isothermen Kurvenschar, bestehend aus den „Modullinien“ (Niveaulinien) der einzelnen G_v . Analoges gilt im Fall einiger punktförmiger Randkomponenten. Die Beweise beruhen auf der Grötzschen Flächenstreifenmethode. — Es wird eine Übertragung des Problems und der verwendeten Methoden auf Flächen höheren Geschlechts angedeutet.

J. Hersch.

Grunsky, Helmut: Über konforme Abbildungen, die gewisse Gebietsfunktionen in elementare Funktionen transformieren. II. Math. Z. 67, 223—228 (1957).

Der Verf. bildet die im Teil I (dies. Zbl. 77, 79) der obigen Untersuchung verwendete Methode im Teil II weiter und gewinnt so gewisse allgemeinere Resultate. Die im Teil I betrachtete harmonische Funktion — eine lineare Kombination von gewissen Greenschen Funktionen des Gebiets und harmonischen Maßen der Randkurven — ist so eingeschränkt, daß ihre Ableitung nach der äußeren Randnormalen auf keiner Randkurve das Vorzeichen wechselt. Im Teil II läßt Verf. diese Voraussetzung wegfallen und führt diesen allgemeineren Fall auf den vorigen Fall zurück. Durch Spezialisierung beweist Verf. dazu gewisse andere Ergebnisse über die kanonischen Abbildungen endlich vielfach zusammenhängender Gebiete; er leitet z. B. einen Satz von Julia als Folgerung her (vgl. Julia, dies. Zbl. 4, 65).

Y. Juve.

Komatu, Yûsaku: On conformal mapping of polygonal domains. Proc. Japan. Acad. 33, 279—283 (1957).

Formule analogue à celle de Schwarz-Christoffel, pour la fonction représentant $1 > |z| > q > 0$ sur un domaine plan contenant le point ∞ et limité par deux polygones rectilignes. Remarques permettant l'extension au cas où le point ∞ est contenu dans le domaine, de formules du même genre.

S. Stoilow.

Komatu, Yûsaku: Integraldarstellungen für gewisse analytische Funktionen nebst den Anwendungen auf konforme Abbildung. Kôdai math. Sem. Reports 9, 69—86 (1957).

Nach Herleitung von gewissen Integraldarstellungen für in einem Kreis oder in einem Kreisring analytische Funktionen wird die bekannte Schwarz-Christoffelsche Formel verallgemeinert. Die betrachteten, hier einfach oder zweifach zusammenhängenden Polygonalgebiete, auf welche Kreis oder Kreisring konform abgebildet werden, sind im allgemeinen endlich vielblättrig. Die Kompliziertheit der Formeln erlaubt es nicht, auf diese hier näher einzugehen.

S. Stoilow.

Šmul'jan (Shmulian), Ju. L. (Y. L.): Finite-dimensional operators analytically depending on a parameter. Ukrain mat. Žurn. 9, 195—204, engl. Zusammenfassg. 204 (1957) [Russisch].

Sei ζ ein Punkt, variabel im Gebiet G der komplexen Ebene. Falls die ersten r_ζ , und keine weiteren, des Systems $x_1(\zeta), \dots, x_n(\zeta)$ von analytischen Vektorfunktionen mit Werten in einem Banachschen Raum E' linear unabhängig sind, nennt man r_ζ den Rang des Systems im Punkte ζ . Wenn $r = \max_{\zeta \in G} r_\zeta$, so sei ζ_0 ein Punkt, derart,

daß $r_{\zeta_0} = r$. Alsdann kann man r lineare Funktionale f_i angeben, derart, daß $f_i(x_k(\zeta_0)) = \delta_{ik}$; die Determinante der Matrix $(f_i(x_k(\zeta)))$ ist dann eine analytische Funktion von ζ , welche nur in den Punkten ζ_1, ζ_2, \dots , einer Menge S von isolierten Punkten in G verschwinden kann. In solchen Punkten ist $r_{\zeta_m} < r$; sie heißen die Ausartungspunkte des Systems $x_1(\zeta), \dots, x_r(\zeta)$. Gibt es keine Ausartungspunkte für ein System, so heißt es „nicht-ausgeartet“. Es ist nicht schwer einzusehen, daß im Falle eines nicht-ausgearteten Systems von analytischen Vektorfunktionen $x_1(\zeta), \dots, x_n(\zeta)$, definiert in einer Menge M mit Häufungspunkten in G , die Funktionen $\tilde{C}_k(\zeta)$, mit denen $y(\zeta) = \sum_{k=1}^n \tilde{C}_k(\zeta) x_k(\zeta)$ eine in G analytische Vektorfunktion darstellt, ebenfalls in G regulär sind. — Nunmehr wird das „Problem der Ausgleichung“ aufgestellt: Zu einem gegebenen System $x_1(\zeta), \dots, x_n(\zeta)$ vom Rang n mit einer Menge S von Ausartungspunkten in G soll ein in G nicht-ausgeartetetes System $y_1(\zeta), \dots, y_n(\zeta)$ vom Rang n gefunden werden derart, daß für alle $\zeta \in G - S$ die beiden Systeme x und y „linear äquivalent“ sind, d. h. $x_i(\zeta) = \sum_{k=1}^n C_{ik}(\zeta) y_k(\zeta)$, oder kurz

$x = C y$, wo für alle $\zeta \in G - S$ die Determinante $|C| = \det C_{ik}(\zeta) \neq 0$ ist. Zwei verschiedene Lösungen y und z des Ausgleichungsproblems sind dann durch eine nicht-ausgeartete lineare homogene Transformation verbunden: $y = A z$ und $z = B y$ mit $B = A^{-1}$; die Elemente der Matrizen A und B sind regulär in G . Im Falle $n = 1$ ist die Lösung des Problems nach bekannten Prinzipien der Funktionentheorie sehr einfach. Durch Induktion und Verallgemeinerung dieser Prinzipien wird das Problem im Falle $n > 1$ gelöst. — Sei nun $A(\zeta)$ ein von $\zeta \in G$ analytisch abhängender, endlich-dimensionaler linearer Operator im Banachschen Raum E (vgl. die frühere Arbeit des Verf. dies. Zbl. 52, 86); es gibt dann ein nicht-ausgeartetetes System analytischer Vektorfunktionen $x_1(\zeta), \dots, x_r(\zeta)$ (Elemente des Bildraumes E' von E) vom Rang r , und ein System von r linearen Funktionalen $f_i = f_i(\zeta; x)$, analytisch für $\zeta \in G$, derart,

daß $A(\zeta) x = \sum_{i=1}^r f_i(\zeta; x) x_i(\zeta)$ ($x \in E$), wobei $r = \sup_{\zeta \in G} r_\zeta$ und r_ζ die Dimension des Wertebereiches von $A(\zeta)$ ist. Als Anwendung wird ein Satz über Produktdarstellung von Matrizen gebracht, welcher dem in der vorstehend genannten Abhandlung des Verf. angegebenen Satz analog ist.

H. Schwerdtfeger.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzgleichungen:

Kukles (Kookless), I. S.: On Frommer's method in singular point investigations. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 367—370 (1957) [Russisch].

On considère l'équation $dy/dx = [Y_n(x, y) + Y(x, y)]/[X_n(x, y) + X(x, y)]$, X_n, Y_n polynômes homogènes de degré n , X, Y de degré supérieur et analytiques. Si (x, y) sont les coordonnées d'un point sur une courbe intégrale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x^\lambda} = k(\lambda)$ existe (finie ou infinie). Soit $E_1 = \{\lambda, k(\lambda) = 0\}$, $E_2 = \{\lambda, k(\lambda) = \infty\}$. Si E_2 est vide on pose $\lambda = \infty$ si E_1 est vide on pose $\lambda = -\infty$ et si E_1 et E_2 sont non vides on pose $\lambda = \sup E_1$; λ sera appelé l'ordre de courbure de la courbe intégrale et $k(\lambda)$ la mesure de la courbure. L'A. propose un schème pour établir les ordres de courbure et les mesures de la courbure. L'ordre de courbure est appelé ordinaire s'il y a un nombre fini de mesures de la cour-

bure que lui correspondent et ces mesures sont finies et non nulles. L'ordre de courbure est appelé quasi-singulier gauche si la mesure correspondante est toujours égale à zero et quasi-singulier droit si la mesure est infinie et il y a une infinité de courbes intégrales qui vont à l'infini. L'ordre est singulier s'il y a une infinité de mesures de la courbure qui lui correspondent et pour toute telle mesure il existe une courbe intégrale et une seule qui va à l'origine avec cette mesure. Le schème proposé par l'A. permet de préciser la nature de l'ordre de courbure. On indique les séries de transformations qui permettent par un nombre fini d'opérations d'étudier le comportement des solutions au voisinage du point singulier et on indique des évaluations supérieures pour le nombre d'opérations. On ne donne pas de démonstrations.

A. Halanay.

Vinograd, R. É. und D. M. Grobman: Zu den Unterscheidungsproblemen von Frommer. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 5 (77), 191—195 (1957) [Russisch].

Soit $dy/dx = [P_n(x, y) + p(x, y)]/[Q_n(x, y) + q(x, y)]$, P_n, Q_n polynômes homogènes de degré n , $p(x, y)$ et $q(x, y)$ de degré supérieur. En passant aux coordonnées polaires on obtient $r dq/dr = [F(\varphi) + f(r, \varphi)]/[G(\varphi) + g(r, \varphi)]$. Les directions exceptionnelles sont les racines de l'équation $F(\varphi) = 0$. En supposant $F(0) = 0$, $G(0) = -1$, on peut écrire $F(\varphi) = a_0 \varphi^k + \dots$, $G(\varphi) = -1 + b \varphi + \dots$. Si k est impair et $a_0 > 0$ il existe au moins une courbe intégrale qui va à l'origine tangente à la droite $\varphi = 0$. Si k est pair il n'y a pas de telles courbes ou il y en a une infinité. Les AA. prouvent que si $f(r, \varphi) = A r + r \Phi(r, \varphi)$, $g(0, \varphi) = \Phi(0, 0) = 0$ et $r \Phi$ et rg satisfont à la condition de Lipschitz dans $r^2 + \varphi^2 \leq \alpha^2$ avec une constante qui tend à zéro avec α on a dans le premier cas l'unicité et dans la second il existe une infinité de courbes intégrales tangentes à la direction exceptionnelle considérée. Ces conditions sont remplies si $p(x, y)$ et $q(x, y)$ appartiennent à la classe C^{n+1} et leurs dérivées jusqu'à l'ordre n s'annulent à l'origine.

A. Halanay.

Diliberto, Stephen P.: A note on linear ordinary differential equations. Proc. Amer. math. Soc. 8, 462—464 (1957).

L'A. riprende un suo precedente teorema (questo Zbl. 39, 94) sulla trasformazione del sistema $dy/dt = A(t)y$, dove $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$ ha per elementi $a_{ij}(t)$ delle funzioni definite per t in $(-\infty, \infty)$, in un sistema $dx/dt = C(t)x$, dove la x è legata alla y dalla relazione $x = B^{-1}(t)y$, essendo $B(t)$ una matrice ortogonale della classe 1 in $(-\infty, \infty)$, e $C(t) = \|c_{ij}(t)\|$, $c_{ij}(t) = 0$ per $j > i$. L'A. mette ora in evidenza l'espressione esplicita degli elementi $c_{ij}(t)$: $c_{ij}(t) = B'^i(A + A')B^j$, dove A' e B' sono le matrici trasposte di A e B , e B^j , B'^i indicano rispettivamente le colonne j , i di B , B' , e ne deduce che se le $a_{ij}(t)$ sono limitate in $(-\infty, \infty)$, anche le $c_{ij}(t)$ sono ivi limitate.

G. Sansone.

Reid, William T.: Remarks on a matrix transformation for linear differential equations. Proc. Amer. math. Soc. 8, 708—712 (1957).

L'A., collegandosi ad alcune ricerche di O. Perrone e di S. P. Diliberto (questo Zbl. 39, 94), prova il seguente teorema. Si consideri il sistema (1) $dy/dx = A(x)y$, dove $A(x) = \|A_{ij}(x)\|$ è una matrice $n \times n$ i cui coefficienti sono funzioni complesse della variabile reale x in un intervallo Δ . Sia $T(x)$ una matrice non singolare $n \times n$ della classe 1, e si consideri il sistema, equivalente al sistema (1), $du/dx = B(x)u$, dove $B(x) = T^{-1}(A T - T')$, essendo u legata ad y dalla relazione $y = T u$. L'A., partendo da un sistema fondamentale di (1), dimostra che può costruirsi T in modo che: i) in $B(x) = \|B_{ij}(x)\|$ risulti $B_{ij}(x) = 0$ per $i > j$, ($B(x)$ è una matrice sopra-triangolare); ii) se $A(x)$ è limitata in Δ anche $B(x)$ è limitata in Δ ; iii) gli elementi diagonali $B_{ii}(x)$ sono reali.

G. Sansone.

Makai, E.: A class of systems of differential equations and its treatment with matrix methods. I. Publ. math., Debrecen 5, 5—37 (1957).

L'A. studia il seguente sistema già incontrato da G. Birkhoff e C. Truesdell

(questo Zbl. 45, 343): (1) $(x - a_i) y'_i = \sum_{k=1}^n a_{i,k} y_k$, ($i = 1, 2, \dots, n$), dove le a_i , $a_{i,k}$ sono costanti complesse, e $a_i \neq 0$, cosicchè il sistema (1) risulta regolare per $x = 0$. Se $A = \|a_{i,k}\|$, y è la matrice $n \times 1$ formata con gli elementi y_1, \dots, y_n , ed è $X = \langle x - a_1, \dots, x - a_n \rangle$, indicando tale simbolo la matrice diagonale $n \times n$ con gli elementi diagonali uguali ordinatamente ad $x - a_1, \dots, x - a_n$, allora il sistema (1) si scrive (2) $X y' = A y$, e ponendo $d_i = 1/a_i$, $b_{i,k} = -a_{i,k}/a_i$, se $B = \|b_{i,k}\|$ e $D = \langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$, il sistema (2) diventa (3) $(1 - D x) y' = B y$. Se c_0 è un vettore iniziale arbitrario, la soluzione del sistema (3) soddisfacente la condizione iniziale $y(0) = c_0$ ha la forma (4) $y = y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$, avendosi per il vettore c_m l'equazione ricorrente

$$c_m = \frac{1}{m} [B + (m-1) D] c_{m-1}.$$

La serie (4) risulta convergente in un cerchio con centro nell'origine che non contiene nel suo interno alcuno punto singolare del sistema (4). L'A. mostra che col suo metodo si ottengono le soluzioni delle più note equazioni del secondo ordine della fisica matematica. Due interessanti paragrafi sono dedicati ai sistemi che ammettono soluzioni polinomiali. G. Sansone.

Heading, J.: The Stokes phenomenon and certain n th-order differential equations. I: Preliminary investigation of the equations. II: The Stokes phenomenon. Proc. Cambridge philos. Soc. 53, 399—418, 419—441 (1957).

I. Es handelt sich um die lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung $d^n u/dz^n = (-1)^n z^m u$. Verf. leitet zunächst n linear unabhängige Lösungen in der Form von Reihen nach Potenzen von z^{m+n} her:

$$u_{r+1} = z^r \sum_{s=0}^{\infty} a_{r,s} z^{(m+n)s} \quad (r = 0, 1, \dots, n-1);$$

für die Koeffizienten $a_{r,s}$ werden explizite Ausdrücke angegeben ($a_{r,0} = 1$). Dabei ist m an die Einschränkung gebunden, daß $(m+n)(s+1) + r - t \neq 0$ ist für alle ganzen r, s, t mit $s \geq 0$, $0 \leq r \leq n-1$, $0 \leq t \leq n-1$. — Sodann werden Lösungen in Form bestimmter Integrale gesucht. Zu dem Zweck wird $z^{m+n} = (m+n)^n w$ gesetzt und der Operator $\vartheta = w d/dw$ eingeführt, mit dessen Hilfe sich die Differentialgleichung so schreiben läßt: $(\vartheta - p_1)(\vartheta - p_2) \cdots (\vartheta - p_n) u = e^{\pi i} u w$, wobei $p_r = (r-1)/(m+n)$ ist. Verf. betrachtet aber diese Gleichung gleich für beliebige Werte von p_r und löst sie durch Integrale der Form

$$\int \Gamma(s + p_1) \Gamma(s + p_2) \cdots \Gamma(s + p_n) w^{-s} ds.$$

Mit $I_r(w)$ wird der Wert des Integrals bezeichnet, wenn der Weg eine unendliche Schleife ist, die um die vom Punkt $-p_r$ parallel zur reellen Achse nach $-\infty$ gezogene Halbgerade herumführt. Die $I_r(w)$ sind n linear unabhängige Integrale. Dabei ist der Fall auszuschließen, daß zwei der p_r eine ganzzahlige Differenz haben, was bei den obigen speziellen p_r darauf hinausläuft, daß m wieder an die gleiche Einschränkung wie oben gebunden ist. Die Pole des Integranden sind $s = -p_r - h$, wo $h = 0, 1, 2, \dots$, und die Integrale $I_r(w)$ werden nach dem Residuensatz berechnet, wobei sich für die speziellen p_r wieder die früheren Reihen ergeben. — Die Integrale $I_r(w)$ oder vielmehr gewisse Linearverbindungen lassen aber auch für große Werte von $|w|$ asymptotische Entwicklungen zu, die in verschiedenen Sektoren der w -Ebene verschieden ausfallen und mit Hilfe der Sattelpunktmethode erhalten werden können; doch wird das in Teil I nur skizziert. — Wenn m eine natürliche Zahl ist, so läßt sich die ursprüngliche Differentialgleichung auch mit Hilfe einer Laplace-Transformation lösen, indem man

$$u = (m+n)^{n/(m+n)} \int \exp(z t e^{\pi i n/(m+n)}) v(t) dt$$

setzt. Für v ergibt sich dann die „komplementäre“ Gleichung $d^m v/dt^m = (-1)^m t^n v$, die etwa nach der früheren Methode gelöst werden kann. — Im letzten Paragraphen wird noch kurz eine zunächst ganz anders aussehende Gleichung diskutiert, nämlich $d^n u/dz^n = e^{nz} (e^{az} - 1) u$. Diese geht durch die Substitution $w = a^{-n} e^{az}$, wenn man wieder den Operator $wd/dw = \vartheta$ einführt, über in $(\vartheta^n + e^{n\pi i} a^{-n}) u = e^{n\pi i} w u$, und diese Gleichung fällt unter den oben behandelten Typus $(\vartheta - p_1) \cdots (\vartheta - p_n) u = e^{n\pi i} w u$. — II. Die in Teil I nur skizzierten Betrachtungen über die asymptotischen Reihen werden hier näher ausgeführt. Es gibt n verschiedene asymptotische Entwicklungen vom Exponentialtypus. Für jede gibt es einen bestimmten Strahl, vom Verf. als Stokes-Strahl bezeichnet, auf dem sie die maximale Größenordnung hat, und so ist jeder Stokes-Strahl von einem gewissen Sektor umgeben, in dem die betreffende asymptotische Reihe die anderen überwiegt, so daß letztere unterdrückt werden können. Gegen den Rand eines Sektors hin nimmt die Größenordnung ab. Zwei benachbarte Sektoren, in denen etwa die Funktionen u_1 bzw. u_2 dominieren, werden durch einen „Anti-Stokes-Strahl“ getrennt, auf dem keine der beiden dominiert, so daß keine vernachlässigt werden darf. So würden z. B. bei der Funktion $e^z + e^{-2z}$ auf jedem Strahl der Halbebene $\Re(z) > 0$ der erste Summand, auf jedem Strahl der Halbebene $\Re(z) < 0$ der zweite Summand dominieren. Die positiv und negativ reelle Achse wären die Stokes-Strahlen; die zugehörigen Sektoren wären die Halbebenen $\Re(z) > 0$ und $\Re(z) < 0$. Sie werden getrennt durch die positiv und negativ imaginären Achsen, auf denen keiner der Summanden dominiert; das wären die Anti-Stokes-Strahlen. Bei den aktuellen Funktionen der Arbeit sind die Exponenten von e etwas komplizierter als in diesem Beispiel; sie haben die Form $c z^{k/n}$, was aber nichts an dem charakteristischen Wechselspiel von Stokes-Strahlen und Anti-Stokes-Strahlen ändert.

O. Perron.

Barbuti, Ugo: Sulla nozione di t_∞ -similitudine tra matrici e sulla stabilità dei sistemi differenziali lineari. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 12, 61—66 (1957).

In relation to the definition of t_∞ -similarity given by Conti (this Zbl. 67, 314, last review) the author proves the following criterion: If the matrix $A(t)$ is of bounded variation in $[0, \infty)$, if the limit L of $A(t)$ as $t \rightarrow \infty$ exists and has only simple characteristic roots, then A is t_∞ -similar to its Jordan normal form. Another more complicated case is also considered.

J. L. Massera.

Vinograd, R. É.: Über den zentralen charakteristischen Exponenten eines Systems von Differentialgleichungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 42 (84), 207—222 (1957) [Russisch].

Es sei ein System von n linearen Differentialgleichungen (1) $dx/dt = A(t)x$ gegeben, wobei die Matrix $A(t)$ für $0 \leq t < \infty$ stückweise stetig und beschränkt ist. Bezeichnen $X(t)$ ein Hauptsystem der Lösungen von (1), G die Klasse der Funktionen $g(t)$, die für alle t und $\tau < t$ die Ungleichung $|X(t)X^{-1}(\tau)| \leq C \exp \left\{ \int_\tau^t g(\xi) d\xi \right\}$ erfüllen und $L(\delta)$ die Klasse der Perturbationen $f(t, x)$, welche stetig sind und die Bedingung $|f(t, x)| \leq \delta_1 |x|$, $0 \leq \delta_1 \leq \delta$ erfüllen. Es sei $\Omega_g = \varlimsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t g(\xi) d\xi$ und $\Omega = \inf_{g \in G} \Omega_g$ (der sogenannte zentrale charakteristische Exponent des Systems (1)).

Der Verf. betrachtet das System (2) $dx/dt = A(t)x + f(t, x)$, f stetig und $f(t, 0) \equiv 0$ und beweist folgende Sätze: 1. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein solches $\delta > 0$, so daß jede Lösung $x(t)$ von (2) mit $f(t, x) \in L(\delta)$ die Ungleichung

$$|x(t)| \leq |x(0)| B_\varepsilon \exp \{(\Omega + \varepsilon)t\}$$

erfüllt, wobei B_ε nur von ε abhängt. 2. Wenn $\Omega < 0$ gilt und die Perturbation $f(t, x)$ die Ungleichung $|f(t, x)| \leq K|x|^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$ für kleine x erfüllt, so ist die triviale

Lösung von (2) $x \equiv 0$ asymptotisch stabil. Bezeichnen wir $\lambda_f = \sup \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|$, wobei $x(t)$ die Menge der Lösungen von (2) durchläuft, $A_\delta = \sup_{f \in L(\delta)} \lambda_f$, $A = \lim_{\delta \rightarrow 0} A_\delta$. Aus dem Satz 1 folgt $A \leq \Omega$. Es werden Beispiele eingeführt, in welchen $\lambda_f \geq \Omega$ gilt. M. Ráb.

Loud, W. S.: Some growth theorems for linear ordinary differential equations. Trans. Amer. math. Soc. 85, 257—264 (1957).

Let $\lambda(x)$ be Perron's order number of a solution of the system $x^{(n)} = A(t)x$ with $A(t)$ real, piecewise continuous and $|A(t)| \leq A^n$ for $t \geq 0$. The author shows that if $x^{(j)}(0) = a_j$ ($0 \leq j \leq n-1$) then $|x(t)| \leq \varphi(t)$ where φ is the solution of $\varphi^{(n)} = A^n \varphi$ satisfying $\varphi^{(j)}(0) = |a_j|$; hence $\lambda(x) \leq A$. For the scalar equation $x'' + a(t)x = 0$ with $\alpha \leq a(t) \leq \beta$ for $t \geq 0$ he obtains $\lambda(x) \leq |x|^{1/2}$ if $3\alpha + \beta \leq 0$, $\lambda(x) \leq 2^{-3/2}(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)^{-1/2}$ if $3\alpha + \beta \geq 0$; when $a(t)$ is periodic these are bounds on the real part of the characteristic exponents. It follows that if $x'' + c x' + a(t)x = 0$ and $\alpha > 0$, $c > \beta^{1/2} - \alpha^{1/2}$ then $x(t), x'(t) \rightarrow 0$ exponentially as $t \rightarrow \infty$. H. A. Antosiewicz.

Demidovič, B. P.: Über die Beschränktheit der monotonen Lösungen eines Systems von linearen Differentialgleichungen. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 2 (74), 143—146 (1957) [Russisch].

On considère le système $\frac{dx}{dt} = p(t)x$. Si $\left| \int_{t_0}^{\infty} p_{ij}(t) dt \right| < \infty$ toutes les solutions monotones pour $t \rightarrow \infty$ du système sont bornées. Une solution est appelée monotone pour $t \rightarrow \infty$ s'il existe T tel que pour $t \geq T$ les fonctions $x_k(t)$ soient monotones. A. Halanay.

Saltykow, M. N.: Le théorème de A. M. Liapounoff sur la stabilité des solutions d'équations différentielles. J. pur. appl., IX. Sér. 36, 229—234 (1957).

Verf. skizziert einen Beweis des Satzes von der Stabilität nach der ersten Näherung, der im wesentlichen auf der Konstruktion einer „Ljapunovschen Funktion“ beruht, allerdings ohne daß das gesagt wird. Ref. bemerkt, daß Beweise für den genannten Satz, sogar mit weitergehenden Aussagen, mittels der direkten Methode von Ljapunov schon anderweitig veröffentlicht worden sind, z. B. bei Malkin, Theorie der Stabilität der Bewegung, dies. Zbl. 48, 328. W. Hahn.

Rjabov, Ju. A.: Über die periodischen Lösungen von Differentialgleichungen, die einen kleinen Parameter enthalten. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 11, Nr. 2, 3—12 (1957) [Russisch].

The author considers (*) $\dot{x} = X(t, x, \varepsilon)$ where X is continuous and periodic in t and holomorphic in x and ε for x in some region and ε sufficiently small in absolute value. Assuming that (*) has for $\varepsilon = 0$ a periodic solution $x = \varphi(t)$, he proves that if a series $x = \varphi(t) + \varepsilon^{1/\nu} x_1(t) + \varepsilon^{2/\nu} x_2(t) + \dots$ with ν an integer and $x_k(t)$ periodic satisfies (*) formally, then the series converges absolutely and represents a periodic solution of (*). This continues earlier work of the author [Moskovsk. gosudarst. Univ., učenyje Zapiski 165, Mat. 7, 131—150 (1954)] in which he generalizes results due to Ljapunov (Problème général de la stabilité du mouvement, Princeton, 1947). H. A. Antosiewicz.

Berstein (Berštejn), I.: On the problem of periodical solutions of non-linear systems with a small parameter. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 9—11 (1957) [Russisch].

Let (1) $\dot{x} = X(x, t) + \mu Y(x, t, \mu)$ where X, Y are periodic in t with period ω and sufficiently smooth so that for any μ with $|\mu|$ small enough there exists for all t a unique solution depending continuously upon μ and the initial point, and suppose $X(0, t) \equiv 0$. The author proves that if the trivial solution of (2) $\dot{x} = X(x, t)$ is asymptotically (hence uniform-asymptotically) stable, then (1) has for any μ with

$|\mu|$ sufficiently small a periodic solution with period ω , which tends to zero with μ . The proof depends upon consideration of a Ljapunov function for (2) and upon the lemma that if φ is a continuous mapping of a polyhedron on itself such that φ^k , for some integer k , is homotopic (even if only homologically) to the identity map, then φ has a fixed point. This extends results of Farnell, Langenhop and Levinson (this Zbl. 42, 99), the reviewer (this Zbl. 50, 91; 316) Diliberto [Ann. Math. Studies 36, 237—241 (1956)] and Halanay [Acad. Republ. popul. Romine, Bul. sti., Sect. Sti. mat. fiz. 6, 483—488 (1954)].

H. A. Antosiewicz.

Lykova, O. B.: Sur les vibrations à une fréquence avec les paramètres aux lents changements. Ukrain. mat. Žurn. 9, 155—161, französ. Zufssg. 162 (1957) [Russisch].

(Der obige Titel des Resümé ist eine verstümmelte Übersetzung. Der vollständige Titel lautet: Über die monochromatischen Schwingungen von Systemen mit sich langsam ändernden Parametern.)

Das System (1): $dx/dt = X(\tau, x)$, wo $\tau = \varepsilon t$ die „langsame“ Zeit bezeichnet, besitze eine von zwei Konstanten a und φ und dem Parameter τ abhängige periodische Lösung (2): $x = x^0(\omega t + \varphi, a, \tau)$, $\omega = \omega(\tau, a)$. Die rechten Seiten des Systems (3): $dx/dt = X(\tau, x) + \varepsilon X^*(\tau, \theta, x, \varepsilon)$ seien in einer Umgebung von (2) unendlich oft differenzierbar und mögen in θ die Periode 2π besitzen. Unter einigen weiteren Voraussetzungen konstruiert die Verf. eine von zwei Parametern abhängige Lösung von (3), die bei kleinem ε in der Nähe von (2) verläuft. Das Konstruktionsverfahren ist rein formell und wird nicht streng begründet.

P. Sagirow.

Voznjuk (Vozniuk), L. L.: Investigations sur la stabilité des solutions périodiques des équations du haut ordre. Ukrain. mat. Žurn. 9, 235—251, französ. Zusammenfassg. 251 (1957) [Russisch].

Suppose $R(D)z = \varepsilon \Phi(z, \varepsilon)$, where $R(w)$ is analytic for all complex w and $\Phi(z, \varepsilon)$ is sufficiently smooth in z and analytic in ε for small enough $\varepsilon > 0$, has the periodic solution $z(\omega t)$ with period $2\pi/\omega$. The author obtains, by the method of Krylov-Bogoljubov, the characteristic equation for the variation equation (*) $R(D)x = \varepsilon \Phi'[z(\omega t), \varepsilon]x$ and proves, under further hypotheses, that the solutions of (*) are analytic in ε for small enough $\varepsilon > 0$. These results are extended to the case $\Phi[z, S(D)z, \varepsilon]$ where $S(w)$ behaves as $R(w)$.

H. A. Antosiewicz.

Olech, C.: On surfaces filled up by asymptotic integrals of a system of ordinary differential equations. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 935—941 (1957).

The author continues his study of the equation $x' = Ax + \varphi(t, x) + p(t, x) + F(t, x)$ in complex n -space E (this Zbl. 72, 94 where notation is defined). He introduces subspaces of E slightly different from the earlier ones and reformulates his principal result accordingly. He then proves, under further conditions too lengthy to be stated here, the set of solutions with the asymptotic property proved earlier is homeomorphic to a certain hyperplane.

H. H. Antosiewicz.

Gillies, A. W.: On a class of differential equation governing non-linear vibrations. Quart. J. Mech. appl. Math. 10, 342—359 (1957).

In der vorliegenden Arbeit setzt Verf. frühere Untersuchungen (dies. Zbl. 65, 173; 77, 177) fort und behandelt eine Differentialgleichung der Form $f(D)x + g(D)y = F(t)$, worin y eine Funktion von x ist, die sich in eine Potenzreihe entwickeln läßt: $y = c_1 x + c_2 \mu x^2 + c_3 \mu^2 x^3 + \dots$; $F(t)$ ist eine einfache periodische Funktion $2B \cos \omega t$ und D der Operator d/dt . $f(D)$ und $g(D)$ sind Polynome in D , und μ ist ein kleiner positiver Parameter, der die Größe der nichtlinearen Glieder festlegt. Verf. nimmt an, daß im linearisierten System schwach gedämpfte freie Schwingungen auftreten können, so daß $G(z) = f(z) + c_1 g(z) = [(z - \varepsilon)^2 + 1] \cdot h(z)$ mit $\varepsilon \ll 1$ ist. Für den Fall, daß keine Resonanz vorliegt, wird eine periodische Lösung in der Gestalt $x = x^{(1)} B + x^{(2)} B^2 + \dots$ gesucht, wobei $x^{(2n)} = A_{-2n}^{(2n)} e^{-2nj\omega t} + A_{-2(n-1)}^{(2n)} e^{-2(n-1)j\omega t} + \dots + A_0^{(2n)} + \dots + A_{2(n-1)}^{(2n)} e^{2(n-1)j\omega t} + A_{2n}^{(2n)} e^{2nj\omega t}$ und $x^{(2n+1)} = A_{-(2n+1)}^{(2n+1)} e^{-(2n+1)j\omega t} + \dots + A_{-1}^{(2n+1)} e^{-j\omega t} + A_1^{(2n+1)} e^{j\omega t} + \dots$

$\dots + A_{2n+1}^{(2n+1)} e^{(2n+1)j\omega t}$ mit $A_r^{(k)} = \overline{A_{-r}^{(k)}}$ ist. Bei der Bestimmung der Koeffizienten A stellt sich heraus, daß $A_r^{(k)}$ den Faktor μ^{k-1} enthält, so daß gleichzeitig eine Entwicklung der periodischen Lösung nach Potenzen von μ vorliegt. Verf. beweist hierfür die absolute und bezüglich t gleichförmige Konvergenz. Danach betrachtet er den Resonanzfall und setzt hier die Lösung mit der Grundharmonischen $2b \cos(\omega t + \varphi)$ in der Form $x = x^{(1)}b + x^{(2)}b^2 + \dots$ an, wobei die Funktionen $x^{(n)}$ ähnlich wie zuvor beschaffen sind, mit der einzigen Ausnahme, daß alle Glieder mit $e^{j\omega t}$ und $e^{-j\omega t}$ bereits in $x^{(1)}$ zu $2 \cos(\omega t + \varphi)$ zusammengefaßt sind. In der Annahme $|\varepsilon| = \mu^2$, $B = \mu^2 E$, $\omega - 1 = \mu^2 \sigma$ werden Gleichungen für die Amplitude b und die Phasenverschiebung φ aufgestellt. Schließlich wird für die Lösungen, bei denen b und φ langsam veränderliche Funktionen der Zeit sind, ein autonomes System von Variationsgleichungen bestimmt und der qualitative Charakter seiner Lösungen erörtert.

R. Reißig.

Faure, Robert: Sur certaines solutions périodiques d'équations différentielles non linéaires (suite). Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 43, 84—95 (1957).

In the real differential equation $y'' + k_1 y' + k_2 y = f(y, y', t)$ let k_1 and k_2 be non-zero constants and let $f(y, y', t) = \sum a_{pq} y^p y'^q$ be analytic in y, y', t and of period T in t . Conditions on the coefficient functions $a_{pq}(t)$ are given to insure the existence of periodic solutions of this differential equation. Bounds on amplitudes are secured and sufficient conditions are given for y and y' of a solution to tend to 0 as $t \rightarrow \infty$. The author has used similar methods in an earlier paper (this Zbl. 71, 304).

W. R. Utz.

Klotter, K. und E. Kreyszig: Über eine besondere Klasse selbsterregter Schwingungen. Ingenieur-Arch. 25, 389—403 (1957).

Die Verff. gehen von der van-der-Polschen Differentialgleichung

$$q'' - \delta q' (1 - \alpha^2 q^2) + \kappa^2 q = 0$$

aus, deren Lösungsmannigfaltigkeit bekanntlich eine (bis auf willkürliche Zeitverschiebungen) eindeutig bestimmte Selbstschwingung enthält, zu der alle anderen Bewegungen asymptotisch hinstreben. Die Lösungen dieser Gleichung lassen sich nicht exakt berechnen, sondern nur mit Hilfe von Näherungsverfahren bestimmen. Aus diesem Grunde ist es eine nützliche Aufgabe, Differentialgleichungen zu suchen, deren Lösungen sich ähnlich verhalten, aber analytisch besser erfassen lassen. Dabei gelangen die Verff. zu der Gleichung $q'' - (\operatorname{sgn} q') \frac{1}{2} \beta (1 - \alpha^2 q^2) q'^2 + \kappa^2 f(q) = 0$, die sie als modifizierte van der Polsche Gleichung bezeichnen. Mit $V = q'^2$ gewinnen sie daraus $dV/dq - (\operatorname{sgn} q') \beta (1 - \alpha^2 q^2) V + 2 \kappa^2 f(q) = 0$. Dem Studium dieser Gleichung ist die vorliegende Arbeit gewidmet. Nach einer kurzen Diskussion der Gleichung wird eine Beziehung für die sukzessiven Amplituden des Übergangsprozesses, die zu einer „Grenzamplitude“ (der Amplitude der Selbstschwingung) hinstreben, abgeleitet. Für diese werden untere Schranken angegeben. Es folgt der Nachweis für die Beschränktheit der Amplituden des Übergangsprozesses sowie für die Existenz der Grenzamplitude, für die nun obere Schranken berechnet werden. Außerdem findet man eine asymptotische Darstellung, die für große Werte von α gilt. Für einen speziellen Fall ist das „Amplitudendiagramm“ angegeben, aus dem man die Amplitudenfolge bei vorgegebener Anfangsamplitude entnehmen kann. Nach dem Isoklinenverfahren konstruieren die Verff. in der (q, v) -Phasenebene ($v = q'$) eine Bahn, die einem Übergangsprozeß entspricht und schon nach wenigen Umläufen um den Ursprung deutlich zum Grenzzyklus hinstrebt. Zum Schluß berechnen sie noch eine Näherungslösung der Grundgleichungen für kleine Werte von β und lineare Rückstellkraft.

R. Reißig.

Sansone, Giovanni: Sopra un'equazione che si presenta nella determinazione delle orbite di un sincrotrone. Rend. Accad. naz. XL, Ser. IV 8, 74 p. (1957).

Der Verf. studiert das Verhalten der Lösungen einer Differentialgleichung, auf die man bei der Bestimmung der Bahnen in einem Synchrotron stößt. Das Problem, für das sich der Physiker in diesem Zusammenhang interessiert, kann man folgendermaßen schematisieren: In der Gleichung $x'' + \varphi(x)x = p(t)$, $x' = dx/dt$, sei $\varphi(x) = \lambda^2 + \varphi_1(x)$ mit konstantem $\lambda > 0$ und $\varphi_1(x) = 0$ für $-a \leq x \leq +a$; $\varphi_1(x) = m(x-a)$, $m > 0$, für $x \geq a$; $\varphi_1(x) = m(x+a)$ für $x \leq -a$. Ferner gelte $p(t) = (a_1 \sin t + b_1 \cos t) + \dots + (a_6 \sin 6t + b_6 \cos 6t)$. Die Funktion $x(t)$ möge in den Intervallen zwischen den Zeitpunkten $k\pi/2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) der Grundgleichung genügen und außer der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$, $x'(0) = y_0$ noch die weiteren Bedingungen $x(k\pi/2) = x_-(k\pi/2) + c x'_-(k\pi/2)$, $x'(k\pi/2) = x'_-(k\pi/2)$ erfüllen; dabei sei $c > 0$ eine vorgegebene Konstante. Dann ist die Punktmenge (x_0, y_0) zu konstruieren, für die die eben konstruierte Funktion $x(t)$ im Zeitintervall $0 \leq t < +\infty$ definiert und beschränkt ist. Der Verf. behandelt zuerst die Aufgabe für die allgemeinere Gleichung $x'' + f(t)x\varphi(x) = p(t)$, in der auch die Voraussetzungen über die Funktionen $\varphi(x)$ und $p(t)$ weniger einschränkend sind und bestimmt eine Punktmenge (x_0, y_0) mit der Eigenschaft: In den Punkten (x_0, y_0) entspringen keine beschränkten Lösungen dieser Differentialgleichung; die Funktionen $x(t)$ mit dem erwähnten Bildungsgesetz streben zusammen mit ihrer ersten Ableitung in endlicher Zeit nach $-\infty$. Daraufhin wendet sich der Verf. dem der ersten Differentialgleichung entsprechenden System zu (das entsteht, wenn $x' = y$ gesetzt wird) und untersucht in der Annahme, daß $p(t)$ konstant ist, den Verlauf der Phasenbahnen in der $x y$ -Phasenebene. Auf der Grundlage der gewonnenen Resultate bestimmt er nun für den Fall, daß $p(t)$ beschränkt ist, Bereiche (x_0, y_0) mit der analogen Eigenschaft wie oben. Schließlich widmet er sich dem eingehenden Studium der Lösungen der Grundgleichung, stellt einige allgemeine Sätze über ihr Verhalten auf und beschäftigt sich insbesondere mit der Existenz periodischer Integrale im Falle einer periodischen Erregerfunktion $p(t)$.

R. Reißig.

Koval', P. L.: Sur la stabilité des solutions des systèmes des équations linéaires aux différences finies. Ukrain. mat. Žurn. 9, 141—153, französ. Zusammenfassg. 153—154 (1957) [Russisch].

Ausführliche Begründung der in der Voranzeige (dies. Zbl. 64, 342) mitgeteilten Ergebnisse. Diese werden auf das vektorielle Differenzengleichungssystem $a_n x_{s+n} + a_{n-1} x_{s+n-1} + \dots + a_0 x_s = A_{s+k} x_{s+k} + b_{s+k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $s = 1, 2, 3, \dots$) übertragen.

W. Hahn.

Bass, Robert W.: A generalization of the functional relation $Y(t+s) = Y(t) \cdot Y(s)$ to piecewise-linear difference-differential equations. Quart. appl. Math. 14, 415—417 (1957).

Es seien $\eta = \eta(t)$ und $\tilde{f} = \tilde{f}(s)$ n -dimensionale (reelle) Vektorfunktionen der Variablen t bzw. s , η_0 und b konstante n -dimensionale Vektoren, \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{P} , \mathfrak{Q} konstante (reelle) n -reihige Matrizen; $\tilde{f}(s)$ soll stückweise konstant sein, der Abstand je zweier aufeinanderfolgender Sprungstellen soll mindestens $4\tau > 0$ betragen. Schließlich seien $s(t)$ und $s_1(t)$ (reelle) Funktionen, welche den Beziehungen $s(t) = b' \mathfrak{B} \eta(t)$ bzw. $s_1(t) = b' \mathfrak{B} \{\mathfrak{P} \eta(t) + \mathfrak{Q} \tilde{f}(s_1(t-\tau))\}$ genügen. Es wird bewiesen: 1. In einem t -Intervall, in welchem $\tilde{f}(s(t)) = \tilde{f}(s_1(t-\tau)) = \tilde{f}_0$ gilt, stimmt das „verzögerte“ System $d\eta/dt = \mathfrak{A} \eta + \tilde{f}(s_1(t-\tau))$ mit dem „idealen“ System $d\eta/dt = \mathfrak{A} \eta + \tilde{f}(s(t))$ überein und die gemeinsame Lösung mit dem Anfangswert η_0 lautet $\eta(t) =$

$\mathfrak{Y}(t) \eta_0 + \mathfrak{Z}(t) \tilde{f}_0$ mit $\mathfrak{Y}(t) = e^{\mathfrak{A}t}$ und $\mathfrak{Z}(t) = \int_0^t e^{\mathfrak{A}(t-u)} du$ (wegen der Bezeichnung vgl. dies. Zbl. 53, 247). 2. Sofern auch $t + \tau$ noch in dem oben angegebenen Intervall liegt, gilt die Funktionalgleichung $\eta(t+\tau) = \mathfrak{Y}(\tau) \eta(t) + \mathfrak{Z}(\tau) \tilde{f}_0$; für $\tilde{f}(s) = 0$ reduziert sie sich auf die im Titel angegebene Relation. 3. Setzt man $\mathfrak{B} = \mathfrak{Y}(\tau)$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Z}(\tau)$, so gilt infolge 2. $s_1(t) = s(t+\tau)$, insbesondere liegt also wieder der

Fall 1. vor. Die unter 2. gefundene Relation soll nützliche Dienste bei der Berechnung von Relais- und Schwarz-Weiß-Reglern leisten. *S. Schottlaender.*

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Egorov, V. G.: The stability of the solutions of periodical systems of total differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR **114**, 11—13 (1957) [Russisch].

Mitteilung einiger Ergebnisse (ohne Beweise) über das System $dx = p(u) x du + q(v) x dv$; die Matrizen $p(u)$ und $q(v)$ sind periodisch und vertauschbar. Das System ist in diesem Fall „reduzibel“, d. h. es kann linear in ein System mit konstanten Koeffizienten transformiert werden. Die Stabilitätsaussagen sind von ähnlichem Charakter wie die in einer früheren Note des Verf. (dies. Zbl. **64**, 336). *W. Hahn.*

Ficken, F. A. and B. A. Fleishman: Initial value problems and time-periodic solutions for a nonlinear wave equation. Commun. pure appl. Math. **10**, 331—356 (1957).

Verff. behandeln das nichtlineare Anfangswertproblem $u_{tt} - u_{xx} + 2\kappa u_t + \alpha u + \varepsilon u^2 = b(x, t)$, $t = 0: u = f(x)$, $u_t = g(x)$, $-\infty < x < +\infty$, $\kappa \neq 0$. Die Aufgabe wird auf eine algebraische Integralgleichung mit der Besselschen Funktion nullter Ordnung als Kern zurückgeführt. Insbesondere werden Lösungen untersucht, die in einem bestimmten Sinn in x und t beschränkt sind. Hat die äußere Kraft $b(x, t)$ in t die Periode T und existiert eine beschränkte Lösung, so ist sie eindeutig und hat ebenfalls die Periode T . Zum Beweis dieses Satzes braucht man zahlreiche Abschätzungen, für deren Gültigkeit die Voraussetzung $\kappa \neq 0$ notwendig ist.

A. Weigand.

Levitan, B. M.: Brief an die Redaktion. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **21**, 599 (1957) [Russisch].

Completions and corrections to a previous paper by the author (this Zbl. **70**, 317). *L. Gårding.*

Pini, Bruno: Sul primo problema di valori al contorno per l'equazione parabolica non lineare del secondo ordine. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **27**, 149—161 (1957).

L'A. introduit un opérateur \mathfrak{M}^* analogue à celui de Blaschke et constituant une généralisation de l'opérateur parabolique \mathfrak{M} défini par la formule $\mathfrak{M}[u(P)] = u_{xx}(P) + u_y(P)$. Soit R le rectangle $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq h$ et S la frontière de R dépourvue du segment $0 < x < 1$, $y = 0$. L'A. considère le problème (1) $\mathfrak{M}^*[u] = f(P, u, u_x)$ pour $P \in R - S$, $u = u_0$ pour $P \in S$. Une fonction $u(P)$ continue dans R , admettant la dérivée u_x continue dans $R - S$ et telle que $\mathfrak{M}^*[u]$ y existe, est dite régulière dans R . L'A. démontre que si la fonction $f(P, z, p)$ est définie pour $P \in R$, $-\infty < z$, $p < +\infty$ et est non décroissante par rapport à z , alors il existe une solution au plus du problème (1) régulière dans R . L'A. démontre ensuite un théorème d'existence relatif au problème (1). Dans la démonstration de ce dernier théorème l'A. applique la méthode du point fixe de l'opération fonctionnelle.

M. Krzyżański.

Olejnijk, O. A. und T. D. Ventcel': Die erste Randwertaufgabe und das Cauchy'sche Problem für quasilineare Gleichungen vom parabolischen Typus. Mat. Sbornik, n. Ser. **41** (83), 105—128 (1957) [Russisch].

Les AA. présentent les détails concernant les résultats contenus dans leur note (v. ce Zbl. **55**, 326) et exposent certaines généralisations de ces résultats.

M. Krzyżański.

Pagni, Mauro: Su un problema al contorno tipico per l'equazione del calore. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. **11**, 73—115 (1957).

L'A., applicando, estendendo ed adattando metodi e risultati di Picone (questo Zbl. **20**, 352), Amerio, Fichera (questo Zbl. **35**, 348), Magenes (questo Zbl. **66**, 85), studia le soluzioni in „senso forte“ di un generale problema al contorno per l'equa-

zione parabolica non omogenea (1) $u_{xx} + u_{yy} - u_t = f$, in un cilindro retto C di dominio base D sul piano caratteristico $t = 0$, o in un dominio da questo ottenuto per deformazione continua della sua superficie laterale s in modo che il piano tangente, supposto esistente in ogni punto della superficie deformata, faccia con i piani caratteristici un angolo superiore ad un prefissato non nullo, quando su D è assegnata la u e su s la derivata della u secondo una generica direzione l (derivata obliqua). Dato un teorema di unicità e determinata una soluzione „debole“, questa viene regolarizzata mediante un teorema di inversione di una formula analoga a quella di Green. La soluzione trovata è ora „forte“ in quanto verifica la (1) in ogni punto interno a C , ma resta tuttora „debole“ per quanto si riferisce alle condizioni al contorno, che verifica solamente „quasi ovunque“. Con la introduzione di alcuni integrali singolari, che hanno richiesto una indagine minuziosa, l'A. riesce a trasformare il suo problema al contorno in una ordinaria equazione integrale del tipo di Volterra-Fredholm, ottenendo così la ricercata soluzione in „senso forte“. *G. Sestini.*

Friedman, Avner: On classes of solutions of elliptic linear partial differential equations. Proc. Amer. math. Soc. 8, 418—427 (1957).

Definitionen: Es seien (M_n) , (M'_n) zwei Folgen positiver Zahlen. Die Funktion $F(x, v)$, definiert für $x \in \Omega_N$, $v \in \Omega_\mu$ (Ω_k -beschränkter Bereich des k -dimensionalen Raumes E_k), gehört der Klasse $C(M_{n-a}, \Omega_N | M'_{n-a}, \Omega_\mu)$, (a ganz) an, wenn 1. $F \in C^\infty$, 2. für jedes Paar abgeschlossener Mengen $\Omega_N^\circ \subset \Omega_N$, $\Omega_\mu^\circ \subset \Omega_\mu$ solche positive Konstante H_0, H existieren, daß für $x \in \Omega_N^\circ$, $v \in \Omega_\mu^\circ$

$$\left| \frac{\partial^j | + |k| F(x, v)}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_N^{j_N} \partial v_1^{k_1} \dots \partial v_\mu^{k_\mu}} \right| \leq H_0 H^{|j| + |k|} M_{|j| - a} M'_{|k| - a}$$

$|j| = \sum j_\nu$, $|k| = \sum k_\nu$ ($M_{-i} = 1$ für $i = 1, 2, \dots$). Wenn $F(x, v) \equiv f(x)$, dann schreibt man einfach $f \in C(M_{n-a}, \Omega_N)$. [Bemerkung: $C(n!, \Omega_N)$ ist die Klasse aller in Ω_N analytischen Funktionen.] Durch Anwendung der Ergebnisse von Lopatinski (vgl. dies. Zbl. 45, 371 unten) beweist Verf. folgenden Satz: Wenn die Koeffizienten eines allgemeinen linearen elliptischen Gleichungssystems $\in C(M_n, \Omega_N)$ und die M_n der folgenden Bedingung: $\binom{n-s+2}{i} M_i M_{n+2-i} \leq A \cdot n \cdot M_{n+1}$ ($i = 2, 3, \dots, n-s+2$; $A = \text{const.}$) genügen, dann gehört die Lösung derselben Klasse $C(M_n, \Omega_N)$ an. Im Falle der Gleichung $\Delta^m u + \sum_k P_k(x) \Delta^{m-k} u = 0$ — wo $P_k(x)$ ein Polynom k -ten Grades ist — wird ein etwas schärferes Ergebnis erreicht.

K. Maurin.

Friedman, Avner: On the regularity of the solutions of nonlinear elliptic and parabolic systems of partial differential equations. J. Math. Mech. 7, 43—59 (1958).

Der Verf. verallgemeinert seine im vorstehenden Referat wiedergegeben Ergebnisse auf nichtlineare elliptische Gleichungssysteme. Diese Ergebnisse enthalten Sätze über Analytizität der Lösungen sowohl im Inneren als auch am Rande. Es sei

$$(S) \quad \Phi_j(x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_k, \dots, D^{s_j} u_{\alpha_1}, \dots, D^{s_j + t_k} u_k) = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

ein elliptisches Gleichungssystem; $D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}$ (der Bezeichnungen wegen vgl. vorstehendes Referat). Es werden folgende wichtigen Sätze bewiesen: 1. Es sei $u = (u_1, \dots, u_k)$ eine Lösung von (S), wobei

$$\Phi_j \in C(M_{n-3}, \Omega_N | M_{n-3}, \Omega_\mu);$$

dabei genügen die M_n der Bedingung: $\binom{n}{i} M_i M_{n-i} \leq A M_n$ (A const.). Wenn $u_\alpha \in C^{2m+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ ($\alpha = 1, \dots, k$) dann $u_\alpha \in C(M_{n-2m-2}, \Omega_N)$. 2. Wenn außerdem $u_\alpha \in C^{s+t_k-\alpha}$, $s = \max s_j$; dann $u_\alpha \in C(M_{n-s-t_k-1-[N/2]}, \Omega_N)$. 3. Es sei jetzt (S) starkelliptisch (im Sinne von Douglis-Nierenberg, vgl. dies. Zbl. 66, 80). Es sei $\Sigma \subset \partial\Omega_N$, Ω_N^Σ dñ $\Omega_N \cup \Sigma$, $\Sigma: x_N = f(x_1, \dots, x_{N-1})$, $(x_1, \dots, x_{N-1}) \in F_{N-1}$.

Man betrachtet Lösungen von (S), die einer Dirichletbedingung genügen: $D^j u_x|_S = \varphi_{xj}$, $|j| \leq t_k - 1$, $x = 1, \dots, k$. Wenn $\Phi_j \in C(M_{n-3}, \Omega_N^x | M_{n-3}, E_\mu)$, $\varphi_{xj} \in C(M_{n-s-t_k-2}, F_{N-1})$, $f \in C(M_{n-s-t_k-1+[N/2]}, \Omega_N^x)$, $u_x \in C^\infty(\Omega_N^x)$ [es genügt sogar $u_x \in C^{s+t_k+\alpha}$ voranzusetzen], dann ist $u_x \in C(M_{n-s-t_k-1+[N/2]}, \Omega_N^x)$. Es werden einige Sätze über Regularität von Lösungen gewisser quasilinearen parabolischen Systeme — jedoch ohne Beweise — ausgesprochen. K. Maurin.

Kreyszig, Erwin: Relations between properties of solutions of partial differential equations and the coefficients of their power series development. *J. Math. Mech.* 6, 361—381 (1957).

Es wird die partielle Differentialgleichung $(E_0) \Delta v + \alpha(x, y) v_x + \beta(x, y) v_y + \gamma(x, y) v = 0$ mit reell analytischen Koeffizienten mit den von S. Bergman entwickelten Methoden untersucht. Die Bergmanschen Operatoren transformieren analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen in Lösungen von (E_0) . Verf. führt als „elementare Lösungen“ die Transformaten der Funktionen $k_s z^s$ und $k_s(z - \zeta)^{-s}$, $\zeta \neq 0$, $s = 0, 1, \dots, k_s$ Konstante, ein. Es werden (ziemlich technische) Bedingungen dafür angegeben, daß eine Lösung von (E_0) nur endlich viele Singularitäten hat oder als Summe endlich vieler elementarer Lösungen darstellbar ist. Ferner werden Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften der Lösungen und den Koeffizienten von Reihenentwicklungen von Lösungen von (E_0) untersucht.

H. J. Bremermann.

Henrici, Peter: A survey of I. N. Vekua's theory of elliptic partial differential equations with analytic coefficients. *Z. angew. Math. Phys.* 8, 169—203 (1957).

Die Arbeit ist eine Einführung in die Vekuasche Theorie der partiellen Differentialgleichung

$$(E_0) \Delta u + a(x, y) u_x + \beta(x, y) u_y + c(x, y) u = 0,$$

$a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ reell analytisch. (I. N. Vekua, Neue Methoden der Lösung elliptischer Gleichungen, dies. Zbl. 41, 62.) Es werden vor allem die Vekuaschen Resultate bezüglich der analytischen Fortsetzung der Lösungen und ihre Darstellung durch holomorphe Funktionen diskutiert, bereichert um Beispiele und um Resultate des Verf. über singuläre Differentialgleichungen, Additionstheoreme, und über das Cauchysche Anfangswertproblem: Während im allgemeinen für elliptische partielle Differentialgleichungen das Cauchysche Randwertproblem nicht korrekt gestellt ist, gilt: Falls G ein „konform symmetrisches Gebiet“ in bezug auf das Kurvenstück C ist, und falls $f_n(z)$, $g_n(z)$ in G holomorphe Funktionen sind, die gleichmäßig gegen $f(z)$, $g(z)$ konvergieren, dann (existieren und) konvergieren die Lösungen des Problems $u = f_n(z)$, $g_n(z) = du/dv$, ($z = x + iy \in C$, v die Normale) gleichmäßig. Die Fortsetzung von (E_0) ins Komplexe ist auch der Ausgangspunkt der Bergmanschen Theorie von (E_0) . Bergman hat einige sehr ähnliche Resultate erzielt (Vgl. z. B. die vorstehend besprochene Arbeit und die weitere dort angegebene Literatur). Der Zusammenhang mit der Bergmanschen Theorie wird nicht näher diskutiert.

H. J. Bremermann.

Šabat (Shabat), B. V.: Examples of solving the Dirichlet problem for equations of mixed type. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 112, 386—389 (1957) [Russisch].

On considère dans le plan les opérateurs (a) $\partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2$, (b) $\partial^2/\partial x^2 + (\text{sign } y) \partial^2/\partial y^2$, (c) $\varrho^2 \partial^2/\partial \varrho^2 + \varrho \partial/\partial \varrho + \text{sign}(1 - \varrho) \partial^2/\partial t^2$ (coordonnées polaires) et pour chacun de ces opérateurs on cherche à résoudre un „problème de Dirichlet“. Pour (a) on se place dans un ouvert D limité par $[0, 1]$ sur $0x$ et par $L: y = -y(x)$, $0 < y(x)$ si $0 < x < 1$, $y(0) = y(1) = 0$, $|y'(x)| \leq 1$, $y'(x) = \pm 1$ en des points isolés; pour (b) dans un ouvert analogue auquel on ajoute l'intérieur du demi-cercle supérieur de diamètre $[0, 1]$; pour (c) dans le disque $\varrho < h$, $h > 1$. On transforme ces problèmes en équations fonctionnelles ou intégrales. Conclusions variées:

existence d'une infinité non dénombrable de solutions, unicité de la solution, etc. . . selon des propriétés plus précises de L ou selon les valeurs de h pour (c).

J. L. Lions.

Ericksen, J. L.: On the Dirichlet problem for linear differential equations. Proc. Amer. math. Soc. 8, 521—522 (1957).

Bekanntlich ist das System

$$(S) \quad \sum_{k=1}^n ((\lambda + \mu) \partial^2 u_k / \partial x_k \partial x_i + \mu \partial^2 u_i / \partial x_k^2) = 0, \quad i = 1, \dots, n > 1$$

(stark)-elliptisch dann und nur dann falls $(\lambda + 2\mu)\mu \neq 0$ (> 0). Der Verf. gibt eine einfache Konstruktion einer Lösung des Dirichletschen Problems für (S) im Falle $(\lambda + 2\mu)\mu < 0$, die am Rande eines Gebietes Ω_N vorgeschriebenen Durchmessers verschwindet und analytisch im Ω_N ist. Nämlich:

$$u_1 = (n-1)\mu x_1^2 - (\lambda + 2\mu) \sum_{k=0}^2 x_k^2 - \varepsilon \mu; \quad u_2 = \dots = u_n = 0,$$

wo $\varepsilon > 0$. Dann ist die Fläche $u_1 = 0$ ein Ellipsoid, und man kann ε so wählen, daß das Ellipsoid einen vorgeschriebenen Durchmesser besitzt.

K. Maurin.

Ladyženskaja, O. A.: Über das Prinzip der Grenzamplitude. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 3 (75), 161—164 (1957) [Russisch].

Die Verf. beweist den folgenden Satz: Es sei

$$(1) \quad Lu \stackrel{\text{df}}{=} -\Delta u + c(x)u = \omega^2 u + g(x), \quad x \in E^3,$$

wobei c und g beschränkt mit kompakten Trägern sind. Die (einzige) selbstadjungierte Fortsetzung von L besitze kein Punktspektrum. Dann existiert $u \stackrel{\text{df}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} v e^{-it\omega}$,

wo v der Gleichung $\partial^2 v / \partial t^2 - \Delta v + c v = q e^{i\omega t}$ mit verschwindenden Anfangswerten genügt. Der Grenzwert u ist die Lösung von (1), die der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügt.

K. Maurin.

Martirosjan, R. M.: Über das Spektrum des nicht-selbstadjungierten Differentialoperators $-\Delta u + cu$ im dreidimensionalen Raume. Akad. Nauk Armjan. SSR., Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk 10, Nr. 1, 85—111 (1957) [Russisch].

Die Arbeit ist ein Teil der 1954 unter der Leitung von I. M. Gelfand angefertigten Moskauer Dissertation des Verf.; die in ihr behandelten Probleme schließen sich eng an Untersuchungen von Gelfand (dies. Zbl. 48, 96) und Neumark (dies. Zbl. 48, 327; 51, 322). Es wird das Spektrum des Differentialoperators $Tu = -\Delta u + cu$ im Hilbertschen Raum L^2 der Funktionen $u(x, y, z)$ betrachtet; c wird dabei als eine zu L^2 gehörige, komplexwertige Funktion angenommen. Die Behandlung geschieht durch Übergang zu einem Integraloperator. Es wird bewiesen, daß T kein Residualspektrum besitzt, und daß sein kontinuierliches Spektrum mit der positiven reellen Halbachse zusammenfällt. Das ganze Spektrum liegt im Inneren der Parabel $\eta^2 = 4\alpha^2(\xi + \alpha^2)$ mit $\alpha = (8\pi)^{-1} \|c\|^2$, $z = \xi + i\eta$. Das diskrete Spektrum ist beschränkt. Wenn c genügend klein ist, in dem Sinne, daß $|c(Q)e^{er}| \leq \alpha < \infty$, $\int_E |c(Q)e^{er}| dQ = \beta < \infty$ ist (E ist der dreidimensionale Raum, e eine

positive Konstante, $r = \overline{OQ}$), dann besteht das Spektrum aus endlich vielen Punkten. Es werden Bedingungen auch dafür angegeben, daß das diskrete Spektrum leer ist. Eine derartige Bedingung ist die folgende: $\alpha\beta < 4\pi L\varepsilon$, wobei die Größe L

durch die Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k/2} L^k}{k!} = 1$ definiert wird.

B. Sz.-Nagy.

Šnol', É. É.: Über das Verhalten der Eigenfunktionen der Schrödingergleichung. Mat. Sbornik, n. Ser. 42 (84), 273—286 (1957) [Russisch].

Es wird die Differentialgleichung (1) $-\Delta u + q(P)u = \lambda u$ ($u = u(P) = u(x, y, z)$) und der mit dieser verknüpfte Operator $\mathfrak{L}u = -\Delta u + q(P)u$ im

Hilbertraum L^2 betrachtet; es wird vorausgesetzt, daß q so gewählt ist, daß \mathfrak{Q} selbstadjungiert wird. Satz 1: Ist $q(P)$ von unten beschränkt, $q(P) \geq q_0$, und ist $u(P, \lambda)$ eine Lösung der Differentialgleichung (1) von der Eigenschaft, daß $|u(P, \lambda)| \leq C(\varepsilon) e^{(r+\varepsilon)r}$ für jedes $\varepsilon > 0$ besteht ($r = \overline{OP}$), so ist der Abstand des Punktes λ vom Spektrum des Operators \mathfrak{Q} nicht größer als $K(e^\eta - 1)$, wobei K eine nur von q_0 abhängige Konstante ist. — Wenn q von unten nicht beschränkt ist, aber $\lim_{r \rightarrow \infty} q^-(P)/r^2 = 0$

besteht (wobei q^- den negativen Teil von q bedeutet), so wird folgendes behauptet (Satz 2): Ist $u(P, \lambda)$ eine Lösung der Gleichung (1) von der Eigenschaft $|u(P, \lambda)| \leq C r^k$ (C und k sind Konstanten), so ist λ ein Punkt des Spektrums des Operators \mathfrak{Q} .

B. Sz.-Nagy.

Ил'ин, В. А.: **Kerne gebrochener Ordnung.** Mat. Sbornik, n. Ser. **41** (83), 459—480 (1957) [Russisch].

Verf. konstruiert sogenannte Kerne gebrochener Ordnung α , d. h. solche Funktionen $K_\alpha(x, y)$ ($x, y \in \Omega_N$), deren Fourierentwicklung die folgende Form besitzt $\sum \lambda_i^{-\alpha} u_i(x) u_i(y)$, wobei u_i Eigenfunktionen der Randaufgabe: $\Delta u + \lambda u = 0$, am Rande $\partial\Omega_N$ von Ω_N wird $u|_{\partial\Omega_N} = 0$, resp. $\partial u / \partial \nu|_{\partial\Omega_N} = 0$, resp. $(\partial u / \partial \nu + h u)|_{\partial\Omega_N} = 0$. Es gilt der folgende Satz: a) Für jedes $-N < \varepsilon \neq 0, 2, 4, \dots$ existiert ein Kern der Ordnung $\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}\varepsilon$ und besitzt folgende Gestalt:

$$K_{N/2+\varepsilon/2}(x, y) = |x - y|^\varepsilon / C_\varepsilon^{[N]} + \chi_{N/2+\varepsilon/2}(x, y),$$

wobei $C_\varepsilon^{[N]} = (2\pi)^{N/2} \cdot 2^{N/2+\varepsilon} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}\varepsilon) / \Gamma(-\frac{1}{2}\varepsilon)$; die Funktion ist beliebig oft differenzierbar. b) Falls $m = 0, 1, 2, \dots$ dann

$$K_{N/2+m}(x, y) = (1/B_m^{[N]}) |x - y|^{2m} \lg |x - y| + \chi_{N/2+m}(x, y),$$

wobei $B_m^{[N]} = (-1)^{m+1} \pi^{N/2} \cdot 2^{N+2m+1} \cdot m!$.

K. Maurin.

Kishi, Masanori: **Capacities of borelian sets and the continuity of potentials.** Nagoya math. J. **12**, 195—219 (1957).

On considère un espace localement compact Ω dont les compacts sont métrisables et un noyau $\Phi(P, Q)$ continu dans $\Omega \times \Omega$ ($0 < \Phi \leq +\infty$) fini pour $P \neq Q$, symétrique; d'où des capacités, intérieure et extérieure. Une mesure d'équilibre sur un compact K est telle que le potentiel U^μ est ≤ 1 , mais sur K , égal à 1 sauf sur un ensemble de capacité intérieure nulle. Un potentiel U^μ est dit quasi-continu si, pour tout ε , il existe un ouvert ω_ε de capacité $< \varepsilon$ tel que la restriction de U^μ à $\Omega - \omega_\varepsilon$ est continue. On dit que Φ satisfait au principe de continuité (connu, C_1) ou de quasi-continuité (nouveau, C_2) si la continuité de la restriction d'un potentiel à son support entraîne la continuité ou quasi-continuité dans Ω . On montre que l'axiome (A) de l'existence d'une mesure d'équilibre pour tout compact entraîne C_2 . Dans le cas de C_1 ou C_2 , l'A. adapte des propriétés connues des suites de potentiels de mesures en convergence vague. Il s'en sert pour le résultat suivant en vue: En supposant (A), il montre que pour une suite de compacts $K_n \searrow$, $\text{cap}(K_n) \rightarrow \text{cap}(\cap K_n)$ et pour une suite croissante d'ensembles $\alpha_n \subset K$ compact fixe, $\text{cap ext}(\alpha_n) \rightarrow \text{cap ext}(\cup \alpha_n)$. Il en déduit grâce à la théorie des capacités de Choquet (et ce serait en fait immédiat) que tout ensemble K -analytique contenu dans un compact est capacitabile. Enfin l'A. étudie et utilise une notion de E -lim inf. en un point, analogue à la lim-inf. en mesure mais en remplaçant la mesure par la capacité intérieure. Application à l'effilement.

M. Brelot.

Hörmander, L. et J. L. Lions: **Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet.** Math. Scandinav. **4**, 259—270 (1957).

Soit pour les fonctions u indéfiniment dérivables dans $\Omega \subset R^n$ et à support compact, la semi-norme de Dirichlet d'ordre m , $\|u\|_m$ de carré

$$\sum_{q_1, \dots, q_n} \int_{\Omega} |\partial^m u / \partial x_1^{q_1} \dots \partial x_n^{q_n}|^2 dx_1 \dots dx_n \quad (\sum q_i = m).$$

On sait que le problème de Dirichlet pour Δ^m (Δ laplacien) peut être résolu si le complété $\hat{\mathcal{D}}^m(\Omega)$ de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des u , (avec $\|u\|_m$) est sous-espace du dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ (condition notée A). On a déjà étudié le cas $m = 1$ (Deny-Lions, ce Zbl. 65, 99) qu'on généralise ici. (A) a lieu pour tout $\Omega \subset R^n$ si et seulement si $n \geq 2m + 1$. Pour Ω fixé, si n est impair $< 2m$, (A) équivaut à ce que $C\Omega \neq \emptyset$. Pour étudier le cas de n pair, on introduit la notion d'ensemble p -polaire. Si $u \in \mathcal{D}(R^n)$, soit $\|u\|_p^2 = \int |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^p d\xi$ (\hat{u} transformée de Fourier, p réel quelconque). Soit \mathcal{D}^p l'espace de Hilbert complété de $\mathcal{D}(R^n)$ grâce $\|u\|_p$. E fermé dans R^n est dit p -polaire s'il n'y a pas de distribution $\neq 0$ du dual de \mathcal{D}^p , à support dans E . Alors si $n = 2m$ (A) équivaut à $C\Omega$ non $n/2$ -polaire; si n pair $< 2m$ (A) équivaut à $C\Omega$ non $n/2$ -polaire ou non contenu dans un sous-espace propre de R^n . M. Brelot.

Malgrange, B.: Sur l'intégrale de Dirichlet. Math. Scandinav. 4, 271—275 (1957).

L'A. complète un article analysé ci-dessus (Hörmander-Lions) en se plaçant dans Ω ouvert $\subset R^n$. Soit $D^i = \partial^m / \partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}$ ($\sum i_j = m$), $Q = \sum a_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j$ (forme hermitienne avec a_{ij} indéfiniment dérivables), $D(f, g) = \sum a_{ij} D^i f \bar{D}^j g$, $(f, g)_m = \int D(f, g) dx_1 \dots dx_n$ et $\|f\|_m^2 = (f, f)_m$. On note $B\text{-}L_\Omega^m(D)$ l'ensemble des distributions f telles que $D^i f$ est localement de carré sommable et $D(f, f)$ sommable; f est alors une fonction de \mathcal{L}_Ω^m (espace des fonctions localement de carré sommable ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq m$ muni de la topologie de la convergence locale dans L^2 pour les fonctions et ces dérivées). Les éléments de $B\text{-}L_\Omega^m(D)$ annulant la semi-norme $\|f\|_m$ sont les polynômes de degré $\leq m - 1$ (espace P^{m-1}). Alors $B\text{-}L_\Omega^m(D)/P^{m-1}$ est complet pour cette norme et l'application dans $\mathcal{L}_\Omega^m/P^{m-1}$ est continue. On note \mathcal{D}_Ω^m l'espace \mathcal{D}_Ω de Schwartz, avec la norme $\|f\|_m$. On étudie les polynômes p de P^{m-1} tels que, pour chacun, il existe φ_n (indéfiniment dérivable à support compact) satisfaisant à $\|\varphi_n\|_m \rightarrow 0$ et $\varphi_n \rightarrow p$ dans \mathcal{L}_Ω^m . L'ensemble de ces p étant connu, on donne des critères pour que „ D admette un noyau de Green dans $\Omega - K$ “ (K compact) ce qui par définition signifie que l'application de $\mathcal{D}_{\Omega-K}^m(D)$ dans $\mathcal{L}_{\Omega-K}^m$ est continue. M. Brelot.

Hummel, J. A.: Counterexamples to the Poincaré inequality. Proc. Amer. math. Soc. 8, 207—210 (1957)

L'A. construit dans un domaine plan borné simplement connexe 1° une fonction harmonique $\Phi(x, y)$ remplissant les conditions

$$\int_D \Phi dx dy = 0, \quad \int_D \Phi^2 dx dy = \infty, \quad \int_D (\Phi_x^2 + \Phi_y^2) dx dy < \infty,$$

et 2° une fonction analytique $f(z)$ s'annulant en un point z_0 de D et telle que

$$\int_D |f(z)|^2 dx dy = \infty \quad \text{et} \quad \int_D |f'(z)|^2 dx dy < \infty.$$

F. Leja.

Redheffer, R. M.: On pairs of harmonic functions. Proc. Amer. math. Soc. 8, 450—457 (1957).

Soient $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$ deux fonctions harmoniques quelconques définies dans un domaine borné D et continues dans $D +$ la frontière F de D . L'expression $u^2 + v^2$ satisfait dans D au principe de maximum comme dans le cas où u et v sont conjuguées. Posons $m = \min_{D+F} (u^2 + v^2)$ et $M = \max_F (u^2 + v^2)$. Il est clair que $m \leq M$. Si u et v sont conjuguées on sait que l'inégalité $m > 0$ entraîne l'égalité $m = M$ d'après le principe de minimum. Dans le cas général ce dernier principe cesse d'être vraie; néanmoins les quantités $m > 0$ et M ne peuvent pas être quelconques. L'A. démontre entre autres le théorème suivant: Si $0 < m < M$ et si l'on désigne par α et β les fonctions $\alpha = v_x^2 + v_y^2 - u_x^2 - u_y^2$, $\beta = 2(u_x v_x + u_y v_y)$

(s'annulant dans le cas où u et v sont conjuguées) on a toujours l'inégalité

$$\sup_D \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \geq \frac{2m}{d^2} \log \frac{M}{m}$$

où d est le diamètre du domaine D .

F. Leja.

Nicolovius, Rüdiger: Abschätzung der Lösung der ersten Platten-Randwert-aufgabe nach der Methode von Maple-Synge. *Z. angew. Math. Mech.* **37**, 344—349 (1957).

Maple hat (vgl. dies. Zbl. **40**, 346) für die 1. Randwertaufgabe der Potentialtheorie eine Abschätzung unter Verwendung der von Synge eingeführten Hyperkreismethode (vgl. dies. Zbl. **29**, 55) angegeben. Verf. überträgt die Methode auf die 1. Randwertaufgabe der Plattentheorie: $\Delta \Delta w = p(x, y)$ in B ; $w = f(s)$, $w_n = g(s)$ auf Γ (s = Bogenlänge, n = Äußere Normale). Mit dem Skalarprodukt $(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \int_B \Delta \varphi \Delta \psi dx dy$ und der Norm $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ gewinnt man für zwei Funktionen u, v , von denen die erste der Differentialgleichung und die zweite den Randbedingungen genügt, unter Benutzung des Greenschen Satzes die Hyperkugel $\|w - z\|^2 = R^2$ mit $z = \frac{1}{2}(u + v)$, $R^2 = \frac{1}{4}\|u - v\|^2$. Für u und v setzt man an

$$u = u_0 + \sum_{i=1}^m a_i u_i, \quad v = v_0 + \sum_{j=1}^n b_j v_j.$$

Dabei sollen u_0, v_0 den Bedingungen für u, v und u_i, v_j den zugehörigen homogenisierten Bedingungen genügen; letztere orthonormiert man zweckmäßig. Hinsichtlich der a_i, b_j ist dann R zu minimieren. Aus der 3. Greenschen Identität erhält der Verf. für einen inneren Punkt $P = (x_P, y_P)$ von B mit $h = (r^2/8\pi) \ln r$, $r^2 = (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2$, $\|h\|^2 = \|h\|^2 - \sum_{i=1}^m (u_i, h)^2 - \sum_{j=1}^n (v_j, h)^2$, die Abschätzung $\left| w_P - \int_{\Gamma} \left(f \frac{\partial}{\partial n} \Delta h - g \Delta h \right) ds - (h, u + v) \right| \leq \|u - v\| \cdot \|\bar{h}\|$. Für numerisch brauchbare Ergebnisse erweist sich der Arbeitsaufwand als sehr groß.

G. Bertram.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Sachnovič, L. A.: Über die Reduktion Volterrascher Operatoren auf einfachste Form und inverse Probleme. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **21**, 235—262 (1957) [Russisch].

Es wird der Operator

$$(1) \quad Af = i \int_0^x f(t) \beta(z) I dt \beta(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

untersucht, wobei $f(x)$ ein veränderlicher Vektor $[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]$, $\beta(x)$ eine quadratische Matrix und I eine Diagonalmatrix ist. Unter gewissen Bedingungen wird der Operator (1) in die kanonische Form

$$I^{(m)} \varphi = \left[i \int_0^x \varphi_1(t) dt, \dots, i \int_0^x \varphi_m(t) dt, 0, 0, \dots \right]$$

transformiert. Insbesondere werden Bedingungen angegeben, unter welchen sich der Volterrasche Operator

$$(2) \quad Kf = i \int_0^x f(y) K(x, y) dx, \quad f(x) \in L^2[0, b],$$

in die Form

$$I^{(1)} q = i \int_0^x \varphi(t) dt, \quad \varphi(x) \in L^2[0, b],$$

transformieren läßt. Als Anwendung werden die in bezug auf (2) invarianten Unterräume von $L^2 [0, b]$ angegeben. Weitere Anwendungen auf Eindeutigkeitsfragen für Differentialgleichungssysteme.

J. Tagamlitzki.

Slugin, S. N.: Näherungslösung von Integralgleichungen, die in impliziter Form gegeben sind. Mat. Sbornik, n. Ser. 43 (85), 3—8 (1957) [Russisch].

Baluev (dies. Zbl. 46, 134) gab einer Methode von Čaplygin zur Lösung von Gleichungen $P(y) = 0$ eine allgemeine Gestalt (in angeordneten Räumen). Die übliche Iteration $y_{n+1} = y_n - P(y_n)$ wird dabei ersetzt durch $y_{n+1} = y_n - \Gamma^{-1} P(y_n)$, wobei Γ^{-1} ein positiver Operator ist, der außerdem $P'(y) \leq \Gamma$ in einem bestimmten y -Intervall erfüllt. Die Modifikation liefert oft bessere (monotone) Konvergenz, auch kann man so Operationen P zwischen verschiedenen Räumen behandeln. — Verf. wendet das auf die Integralgleichung $P(y) = F(x, y, Y)$ an, wo $y = y(x)$ dem angeordneten Raum der stetigen Funktionen entnommen wird und $Y = \int_a^b K(x, s, y(s)) ds$ ist (in einer Variante wird b durch x ersetzt, also eine Volterra'sche Gleichung behandelt). Mit gewissen Konstanten D, E wählt er

$$\Gamma(y) = y + D \cdot \int_a^b y ds = \varphi, \text{ also } \Gamma^{-1}(\varphi) = \varphi - E \cdot \int_a^b \varphi ds.$$

Unter verschiedenen Voraussetzungen an F (z. B. muß 0 in einem Intervall der Bildmenge von F vorkommen) und die partiellen Ableitungen von F und K konvergieren das Verfahren (geometrische bzw. exponentielle Geschwindigkeit); unter weiteren Voraussetzungen ist nur eine einzige Lösung vorhanden. — Einfachere Gleichungen wurden auf ähnlichem Wege behandelt von Panow (dies. Zbl. 11, 26) und Musina (dies. Zbl. 40, 350).

K. Zeller.

Przeworska-Rolewicz, D.: Sur un système d'équations intégrales non-linéaires de seconde espèce à une infinité de fonctions inconnues à singularité forte. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 467—470 (1957).

In Verallgemeinerung eines Problems von Guséinov (dies. Zbl. 29, 364) untersucht Verf. das unendliche, nichtlineare, stark singuläre Integralgleichungssystem (1) $\varphi_n(t) = \int_L [K_n(t, \tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots)]/(\tau - t) d\tau$ ($n = 1, 2, \dots$). Dabei bezeichne L ein endliches disjunktes System glatter, geschlossener Kurven in der komplexen Ebene, während die K_n Hölder-Bedingungen der Form

$$|K_n(t, \tau, u_1, \dots) - K_n(\tilde{t}, \tilde{\tau}, \tilde{u}_1, \dots)| \leq h_n \left\{ |t - \tilde{t}|^\mu + |\tau - \tilde{\tau}|^\mu + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ni} |u_i - \tilde{u}_i| \right\}$$

erfüllen, mit gewissen Nebenbedingungen für die Größen $\mu, \nu, h_n, \alpha_{ni}$. Es kann dann gezeigt werden, daß das System (1) mindestens eine Lösung $\Phi^* = (\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t), \dots)$ besitzt, deren sämtliche Komponenten $\varphi_\nu^*(t)$ auf L einer Hölder-Bedingung mit dem Exponenten μ genügen. Zum Beweis betrachtet Verf. den Vektorraum \mathfrak{S} aller Folgen $\Phi = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots)$ von Funktionen $\varphi_\nu(t)$, die auf L stetig sind, und metrisiert ihn gemäß der Vorschrift

$$\varrho(\Phi, \Psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|\varphi_n - \psi_n\|}{1 + \|\varphi_n - \psi_n\|}, \quad \|\varphi_n\| = \sup_{t \in L} |\varphi_n(t)|.$$

Mit dieser Metrisierung wird \mathfrak{S} lokalkonvex und vollständig. Verf. führt sodann eine sich als konvex, abgeschlossen und kompakt erweisende Teilmenge \mathfrak{T} von \mathfrak{S} ein, indem an die $\varphi_n(t)$ noch gewisse — an das betrachtete Problem angepaßte — Forderung gestellt werden. Die durch

$$\psi_n(t) = \int_L \frac{K_n(t, \tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots)}{\tau - t} d\tau \quad (n = 1, 2, \dots)$$

eingeführte Transformation (2) $\Psi = \mathfrak{K} \Phi$ ist dann eine stetige Abbildung von \mathfrak{T}

in sich. Mithin sind bez. \mathfrak{S} , \mathfrak{T} und \mathfrak{R} die Voraussetzungen des Tychonoffschen Fixpunktsatzes erfüllt, so daß also die Abbildung (2) mindestens einen Fixpunkt besitzt. Daraus erhellt aber unmittelbar die Gültigkeit des Existenzsatzes für das System (1). H. Pachale.

Sears, D. B.: Integral transforms over certain function spaces. II. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 8, 294—306 (1957).

In der I. Note (dies. Zbl. 77, 306) wurden alle unitären Transformationen zwischen einem Paar von Funktionsräumen sehr allgemeiner Art vom L^2 -Typus, genannt $\mathcal{I}^2(\mu)$, $L^2(\nu)$, durch Integrale mit gewissen Kernen charakterisiert. In der II. Note werden zunächst Kerne angegeben, die unitäre Transformationen T_1 , T_2 zwischen $\mathcal{I}^2(\mu_1)$ und $L^2(\nu_1)$ bzw. zwischen $\mathcal{I}^2(\mu_2)$ und $L^2(\nu_2)$ definieren, und es wird gezeigt, daß die Produkte der Kerne unitäre Transformationen zwischen den Cartesischen Produkträumen $\mathcal{I}^2(\mu_1 \times \mu_2)$, $L^2(\nu_1 \times \nu_2)$ definieren. Ferner werden Ausdrücke für die Kerne der Transformation $T_2(T_1)$ in Abhängigkeit von den Kernen der unitären Transformationen T_1 , T_2 angegeben. G. Doetsch.

Butzer, P. L.: Halbgruppen von linearen Operatoren und das Darstellungs- und Umkehrproblem für Laplace-Transformationen. Math. Ann. 134, 154—166 (1957).

Eine Laplace-Transformierte $y(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma u} x(u) du$, die für $\Re \sigma > 0$ konvergiert, läßt sich bekanntlich in die Reihe $y(\sigma) = \sum_{n=0}^\infty l_n (\sigma - \frac{1}{2})^n / (\sigma + \frac{1}{2})^{n+1}$ mit $l_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k!} y^{(k)}(\frac{1}{2})$ entwickeln. Ihr entspricht durch formale Übersetzung eine Entwicklung der Originalfunktion $x(t)$ in eine Reihe nach Laguerreschen Funktionen $L_n(t) = e^{-t/2} \cdot$ Laguerresches Polynom: $x(t) \sim \sum_{n=0}^\infty l_n L_n(t)$, wobei l_n sich auch als $\int_0^\infty L_n(t) x(t) dt$ ergibt, so daß die Reihe eine Fourier-Laguerre-Reihe ist. Während diese Reihe nicht zu konvergieren braucht, konvergiert $l(t, r) = \sum_{n=0}^\infty l_n L_n(t) r^n$ für $0 \leq r < 1$. In Form der Abelschen Summation kann $l(t, r)$ als Umkehroperator für die Laplace-Transformation benutzt werden: Es ist $\lim_{r \rightarrow 1} l(t, r) = x(t)$ für alle t aus der Lebesgueschen Menge von $x(t)$. A. González Domínguez, vom Verf. irrtümlich als A. G. Domínguez zitiert (dies. Zbl. 22, 14), hat an Hand des Operators $l(t, r)$ Bedingungen dafür formuliert, daß die Originalfunktion zu bestimmten Klassen gehört, z. B.: Damit $y(s)$ die Laplace-Transformierte einer Funktion $x(t) \in L^p(0, \infty)$, $p > 1$, sei, ist die Bedingung $\int_0^\infty |l(t, r)|^p dt < M$ ($0 \leq r < 1$) notwendig und hinreichend. An diese Untersuchungen anknüpfend schreibt Verf. $l(t, r)$ in der Form $l_{\zeta, t}[y(\sigma)] = \sum_{n=0}^\infty l_n L_n(t) e^{-n\zeta} = T(\zeta)[x(t)]$, $\zeta > 0$, wodurch der Operator eine Halbgruppe wird: $T(\zeta_1) T(\zeta_2) = T(\zeta_1 + \zeta_2)$. Die Theorie der einer Halbgruppe zugeordneten Saturationsklasse wird nun dazu verwendet, den Approximationsgrad von x durch $T(\zeta)x$, definiert als $\|T(\zeta)x - x\|$, abzuschätzen, wenn x zum Raum $L^p(0, \infty)$ gehört und die Norm $\|\cdot\|$ in üblicher Weise definiert ist. Satz: Der Operator $l_{\zeta, t} y = T(\zeta)x$ gibt für $x \in L^p$, $p > 1$, einen Approximationsgrad von der Ordnung höchstens $O(\zeta)$, und er ist genau von der Ordnung $O(\zeta)$ für die x mit $g(t) = t x'(t) + x'(t) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}t)x(t) \in L^p$, außer wenn $T(\zeta)x = x$ ist. Ein entsprechender Satz wird für Fourier-Hermite-Reihen bewiesen. G. Doetsch.

Stanković, Bogoljub: Abbildung gewisser Operationen durch die zweidimensionale Laplace-Transformation. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **11**, 1—8 (1957).

Die zweidimensionale Laplace-Transformation werde durch den Operator \mathfrak{L}^2 bezeichnet. Ferner sei

$$\Phi(\mu, \nu; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(\mu + \nu k)}$$

die von E. M. Wright definierte Funktion und

$$g(x, y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Phi(\mu, \nu; -\xi x^\nu) x^{\mu-1} \Phi(\beta, \varrho; -\eta y^\varrho) y^{\beta-1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Dann besteht zwischen $\varphi(u, v) = \mathfrak{L}^2 \{f(x, y)\}$ und $\gamma(u, v) = \mathfrak{L}^2 \{g(x, y)\}$ unter gewissen Voraussetzungen die Beziehung:

$$\gamma(u, v) = u^{-\mu} v^{-\beta} \cdot \varphi(1/u^\nu, 1/v^\varrho).$$

Eine weitere derartige Beziehung ergibt sich für den Fall, daß $g(x, y)$ statt durch ein zweidimensionales durch ein eindimensionales Integral definiert ist.

G. Doetsch.

Kumar, Ram: On generalised Hankel-transform. I, II. Bull. Calcutta math. Soc. **49**, 105—111; 113—118 (1957).

Wenn $J_\lambda^\mu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-x)^r}{r! \Gamma(1 + \lambda + \mu r)} (\mu > 0)$ die Bessel-Maitland-Funktion ist, so

heißt $f(x) = \int_0^{\infty} (xy)^\nu J_\lambda^\mu(xy) g(y) dy$ die verallgemeinerte Hankel-Transformierte von $g(y)$. Es wird ein Satz von folgendem Typus bewiesen: Wenn f mit g durch die verallgemeinerte Hankel-Transformation, g mit ψ durch die Laplace-Transformation und ψ mit φ durch die Hankel-Transformation zusammenhängt, so läßt sich f durch ein gewisses Integral über φ ausdrücken. Vermittels dieses Satzes wird eine Anzahl von bestimmten Integralen ausgewertet. — In Note II wird ein Satz von ähnlichem Typus wie in Note I bewiesen und mit seiner Hilfe eine Anzahl von Integralen berechnet.

G. Doetsch.

Strivastava, Krishna Ji: Fractional integration and Meijer transform. Math. Z. **67**, 404—412 (1957).

Es werden Sätze über die Differentiation und Integration nichtganzer Ordnung bei der Meijer-Transformation

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st/2} W_{k+1/2, m}(st) (st)^{-k-1/2} f(t) dt,$$

symbolisiert durch $f(t) \xrightarrow[k-1/2]{m} F(s)$, bewiesen, z. B. Aus $f(s) \xrightarrow[k+1/2]{m} F(t)$ folgt $s^{\lambda+k-m} I^\alpha \{s^{m-k} f(s)\} \xrightarrow[k+\alpha/2]{m+\alpha/2} F(t)$, wo I^α das Riemann-Liouvillesche Integral ist.

G. Doetsch.

Kilpi, Yrjö: Über das komplexe Momentenproblem. Ann. Acad. Sci. Fennicae Ser. A I **236**, 31 S. (1957).

Verf. setzt seine früheren Untersuchungen zum komplexen Momentenproblem (Y. Kilpi, dies. Zbl. **56**, 345; **66**, 352) fort und knüpft dazu an die im Sinne von Nakano normalen Transformationen N an. Ist nun das genannte Problem lösbar, so kann es durch Konstruktion einer geeigneten komplexen „Spektralfunktion“ $E(\zeta)$ mit einer normalen Transformation assoziiert werden. — Verf. führt sodann die Lösbarkeit des Momentenproblems zurück auf die Möglichkeit, die assoziierte normale Transformation N zu einer hypermaximalen normalen fortsetzen, d. h. zu einer solchen Transformation, für welche Def.-Ber. $(N) = \text{Def.-Ber.}(N^*)$ gilt. Weiterhin wird gezeigt, daß das Problem (im Falle der Lösbarkeit) genau eine oder unendlich

viele Lösungen besitzt, je nachdem die genannte Fortsetzung auf genau eine oder auf unendlich viele Weisen durchführbar ist. Abschließend behandelt der Verf. den speziellen Fall, daß das „Spektrum“ der beim Problem auftretenden „Distributionsfunktion“ (siehe dazu die oben zitierten Arbeiten) im Einheitskreis liegt; es handelt sich dann um das bekannte trigonometrische Momentenproblem von Tschebyscheff.

H. Pachale.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Lowdenslager, D. B.: Duality in vector lattices. Proc. Amer. math. Soc. 8, 476—483 (1957).

Das Hauptresultat der Arbeit ist ein allgemeiner Satz über die Dualität vollständiger Vektorverbände, zu dessen Beweis nur einfache Tatsachen aus der Theorie der Vektorverbände benötigt werden. Aus ihm folgt in wenigen Zeilen die Dualität der Banach-Räume L^p und L^q für $p^{-1} + q^{-1} = 1$ und $1 < p, q < +\infty$. Zunächst sei daran erinnert, daß die Menge E^* aller relativ beschränkten Linearformen auf einem vollständigen Vektorverband (Rieszschen Raum) E bezüglich der üblichen Operationen und Ordnungsrelation selbst ein vollständiger Vektorverband ist. Spezielle Elemente von E^* sind die o -stetigen Linearformen auf E , d. h. die die Ordnungskonvergenz (algebraische Konvergenz) erhaltenden Linearformen. Es seien nun L und M zwei vollständige Vektorverbände und $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ eine Bilinearform auf $L \times M$, die L und M in Dualität setzt. Vorausgesetzt wird, daß die durch $x \rightarrow \langle x, y \rangle$ bzw. $y \rightarrow \langle x, y \rangle$ definierten Linearformen y^* bzw. x^* für jedes $y \in M$ bzw. $x \in L$ o -stetig auf L bzw. M sind, daß ferner stets $[\sup(y, 0)]^* = \sup(y^*, 0)$ und $[\sup(x, 0)]^* = \sup(x^*, 0)$ ist. (Die rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Verbandsoperationen sind hierbei in L^* bzw. M^* auszuführen.) Dann lautet der Hauptsatz: Jede o -stetige Linearform auf M ist das Supremum (in M^*) einer aufsteigend filtrierenden Menge von Linearformen x^* mit $x \in L$. Als Anwendung ergibt sich neben dem bereits erwähnten Beweis der Dualität der Räume L^p und L^q ein Satz von B. Z. Vulich (dies. Zbl. 55, 97) über die Reflexivität von Banach-Verbänden. Neuere Ergebnisse über kommutative $*$ -Algebren von Operatoren auf Hilbert-Räumen lassen vermuten, daß sich der Dualitätssatz auch auf Dedekind-vollständige geordnete Vektorräume übertragen läßt, die nicht notwendig Vektorverbände zu sein brauchen.

H. Bauer.

Kasahara, Shouro: Le problème de la dualité en une forme générale dans la théorie des espaces localement convexes. Math. Japonicae 4, 63—82 (1956).

The author generalizes Mackey's theorem characterizing the topologies of a vector space E compatible with a given duality (see, for instance, Bourbaki, this Zbl. 66, 353, p. 68). The problem here is: given a vector space E , a Banach space F , and a vector space \mathfrak{C} of linear transformation of E into F , to characterize the topologies of E for which \mathfrak{C} is the space of all continuous linear transformation of E into F . The result and the general method are natural analogues of development leading up to Mackey's theorem as it appears in Bourbaki. What is interesting and revealing about this paper is some of the details and the way in which the author solves the new problems, which the more general situation presents. Mackey's theorem itself is the culmination of a theory involving such concepts as (to mention a few) polars, convex sets, equilibrated sets, equicontinuous sets, topology of pointwise convergence of the algebraic dual E^* of E . The proper analogues of these notions had to be defined and the analogues of countless propositions, lemmas and theorems relating them, proved. Several new situations arise which deserve noting. In the first place, a new restriction must be placed on the duality between E and \mathfrak{C} . The composition of an element of \mathfrak{C} by a continuous linear transformation of F into itself is required to be in \mathfrak{C} . This condition is automatically satisfied in the case F is R , the field of real numbers. It is no arbitrary restriction, since, for any topo-

logy of E , the space of all continuous linear transformations of E into F has this property. In various places of the usual theory it is required that a subset of E be closed in the topology of pointwise convergence. The corresponding notion seems to be the slightly weaker concept of point-closed (fermé ponctuellement). We say u is in the point-closure of a set M if, for every $x \in E$, $u(x)$ is in the closure of the set $M(x) = \{u(x) \mid u \in M\}$. The importance of the distinction between these two closures is emphasized by the author by proving that they coincide if and only if $F = R$. Finally, compactness of a certain subset of E^* in the topology of pointwise convergence is essential in the earlier theory. The notion that takes its place is compactness in the weak topology of \mathfrak{U} that one obtains from its topology of pointwise convergence.

J. G. de Lamadrid.

Kasahara, Shouro: Une généralisation du théorème de Mackey. Proc. Japan Acad. **33**, 134—135 (1957).

This note contains the preliminary announcement of the result in the Memoire reviewed above.

J. G. de Lamadrid.

Amemiya, Ichiro: Some examples of (F) and (DF) spaces. Proc. Japan Acad. **33**, 169—171 (1957).

L'A. résout plusieurs problèmes posés par A. Grothendieck en construisant d'ingénieux contre-exemples: I. Il donne un exemple d'espace localement convexe métrisable E tel qu'il y ait dans le complété \hat{E} des ensembles bornés non contenus dans l'adhérence d'une partie bornée de E [un tel exemple avait été déjà construit par le Réf. (v. ce Zbl. **67**, 83), mais en utilisant l'hypothèse du continu]. II. Il donne un exemple d'espace de Fréchet réflexif dans le dual duquel il y a un ensemble borné sur lequel la topologie forte n'est pas métrisable. III. Il montre enfin qu'il y a un espace (DF) bornologique, mais dont le bidual n'est pas bornologique.

J. Dieudonné.

Peleczyński, A.: On the approximation of S -spaces by finite dimensional spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **5**, 879—881 (1957).

L'A. annonce quelques résultats sur les espaces B_0 (au sens de Mazur et Orlicz, ce Zbl. **36**, 78) qui soient du type S (au sens de Grothendieck, ce Zbl. **58**, 98), les démonstrations devant paraître dans un article „On linear metric Montel spaces“ de Studia Math. L'un de ces résultats concerne le degré d'approximation d'un tel espace par des espaces de dimension finie. Une condition nécessaire est donnée, pour que deux espaces B_0 du type S soient isomorphes. Une autre proposition affirme qu'il n'existe pas d'espace B_0 du type S universel, c'est-à-dire, dans lequel tout espace de cette sorte puisse être plongé par isomorphisme.

A. Pereira Gomes.

Orlicz, W. and V. Pták: Some remarks on Saks spaces. Studia math. **16**, 56—68 (1957).

Soient X un espace vectoriel muni d'une norme $\| \cdot \|$, X_s la boule unité, $\| \cdot \|_*$ une F -norme sur X qui définit une métrique sur X_s . On suppose X_s complet pour cette métrique, de sorte que X_s est un espace de Saks (W. Orlicz, ce Zbl. **41**, 436). Les AA. envisagent diverses propriétés de X_s , notamment (A) et (B_3) . (A): si U est une application linéaire de X dans un espace de Banach Z telle que, pour toute $\eta \in Z^*$, $\eta \cdot U$ est continue sur X_s , alors U est continue sur X_s . (B_3) : si (U_n) est une suite d'applications linéaires de X dans un espace de Banach, continues sur X_s , telles que $\lim U_n(x)$ existe pour tout $x \in X_s$, alors les U_n sont équicontinues sur X_s . Théorème: (A) \Rightarrow (B_3) . On donne quelques conditions suffisantes pour que (A) soit satisfaite. On envisage le cas où $\| \cdot \|_*$ est définie par polarité à partir d'une partie convexe fermée de X^* , et on a une condition de compacité de X_s . Exemples tirés des espaces de Banach classiques.

J. Dixmier.

Milnes, Harold Willis: Convexity of Orlicz spaces. Pacific J. Math. **7**, 1451—1483 (1957).

A Banach space is uniformly convex if $\|f'_n\| = \|f''_n\| = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|f'_n + f''_n\| = 1$

imply $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f'_n - f''_n\| = 0$; it is strictly convex if $\|f'\| = \|f''\| = \frac{1}{2} \|f' + f''\| = 1$ imply $\|f' - f''\| = 0$. An Orlicz space is defined as follows. $v = \varphi(u)$ is non-decreasing, left-continuous, not identically zero and defined for $0 \leq u$ with $\varphi(u) = 0$; $u = \psi(v)$ is the inverse function of φ with similar properties as φ ; thereby is $\psi(v) = +\infty$ for all $l \leq v$ if $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = l < \infty$. The corresponding Young func-

tions are $\Phi(u) = \int_0^u \varphi du$, $\Psi(u) = \int_0^u \psi du$. For each function $f(x)$ defined on a measure space Δ , with a σ -finite non-atomic measure μ , and μ -measurable a norm is defined by $\|f\|_\Phi = \sup_{\Delta} \int |f(x)| g(x) d\mu$ for all μ -measurable $g(x) \geq 0$ with

$\int_{\Delta} \Psi(g) d\mu \leq 1$. The functions with finite Φ -norm are the elements of a Banach space, the Orlicz space L_Φ . The author shows that for strict convexity of L_Φ nec. a. suff. conditions are the continuity in the extended sense of $\psi(v)$ and of $\Psi(v)$; that is: for $V_0 = \sup_{\psi(v) < \infty} v$ the functions ψ and Ψ are continuous for $v < V_0$ and $\lim_{v \rightarrow V_0^-} \psi(v) = \lim_{v \rightarrow V_0^-} \Psi(v) = \infty$. More difficult is the derivation of nec. a. suff.

conditions for uniform convexity of L_Φ ; they are extensions of those for strict convexity, alternative according as Δ is of infinite or of finite measure. In the first case there must be a constant $0 < M < \infty$ such that $\Phi(2u)/\Phi(u) \leq M$ for all $0 < u$, and that for each $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ there is a corresponding $1 < R_\varepsilon < \infty$ such that $0 < u$ implies $R_\varepsilon < \varphi(u)/\varphi((1-\varepsilon)u)$; in the second case there is a constant $0 < M < \infty$ such that $\limsup_{u \rightarrow \infty} \Phi(2u)/\Phi(u) \leq M$, and for each $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ there is a constant $1 < R_\varepsilon < \infty$ such that $R_\varepsilon < \liminf_{u \rightarrow \infty} \varphi(u)/\varphi((1-\varepsilon)u)$.

J. Ridder.

Trèves, François: Sur les correspondances vectorielles. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 1200—1203 (1957).

Es seien E ein Vektorraum und F ein normierter Vektorraum. Weiter seien S und T zwei lineare Abbildungen von E in F . Verf. definiert: S dominiert T , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine invertierbare und beschränkte Abbildung A von F auf sich gibt mit $\|A(Tx)\| \leq \varepsilon \|A(Sx)\|$ für alle $x \in E$. Mit Hilfe dieser Dominanzrelation werden weitere Begriffe eingeführt und deren Eigenschaften untersucht. Die Ergebnisse werden auf Differentialoperatoren angewandt. H.-J. Kowalsky.

Weston, J. D.: The decomposition of a continuous linear functional into non-negative components. Math. Scandinav. 5, 54—56 (1957).

Notwendig und hinreichend für die Zerlegbarkeit eines stetigen linearen Funktionals f in stetige, nicht negative Komponenten f_1, f_2 ist die Existenz einer offenen konvexen Umgebung U des Ursprungs mit $f(x) < 1$ für $0 \leq x \leq u$ und $u \in U$. Hierbei wird $u \leq v$ im reellen topologischen Vektorraum X bezüglich einer ausgezeichneten Menge C ($C + C \subset C$, $aC \subset C$ für jedes skalare $a \geq 0$) durch $v - u \in C$ erklärt und nicht negativ heißt, daß $f(x)$ für jedes $x \in C$ nicht negativ ist. Der Nachweis wird unter Verwendung des Hahn-Banachschen Satzes geführt und liefert bei der Voraussetzung, daß X lokal kompakt ist, unmittelbar das Resultat von F. F. Bonsall [Proc. Durham philos. Soc., Ser. A 13, 6—11 (1957)]. F. Selig.

Gleason, Andrew M.: Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. J. Math. Mech. 6, 885—893 (1957).

Es sei H ein separabler (reeller oder komplexer) Hilbertscher Raum, $\dim H \geq 3$. Das Maß μ möge jedem (abgeschlossenen) Unterraum $A \subset H$ eine nichtnegative reelle Zahl $\mu(A)$ zuordnen, und zwar so, daß die Gleichung $\mu(A) = \sum_i \mu(A_i)$ besteht, sobald A den von den paarweise orthogonalen Unterräumen $\{A_i\}$ aufgespannten

Unterraum bezeichnet. Dann existiert ein positiver selbstadjungierter Operator T , für welchen $\mu(A) = \sum_i (T P_A x_i, x_i)$ gilt, wo $\{x_i\}$ ein beliebiges vollständiges orthogonales System (v. o. S.) und P_A die Projektion auf A bezeichnet. Der Beweis beruht auf folgendem Hilfssatz: Unter denselben Annahmen betreffend H sei f eine nichtnegative reelle Funktion, die auf der Einheitskugel $\{x: \|x\| = 1\}$ definiert und so beschaffen ist, daß für jedes v. o. S. $\{x_i\}$ die Gleichung $\sum_i f(x_i) = 1$ besteht; dann existiert ein positiver selbstadjungierter Operator T , für welchen $f(x) = (T x, x)$ gilt, sobald $\|x\| = 1$.

A. Császár.

Mařík, Jan: Les fonctionnelles sur l'ensemble des fonctions continues bornées, définies dans un espace topologique. *Studia math.* 16, 86—94 (1957).

Soient P un espace topologique, Y l'ensemble de toutes les fonctions réelles, finies et continues sur P , Z l'ensemble des fonctions bornées de Y , \mathfrak{F}^* la famille de tous les ensembles $\{x: f(x) = 0\}$ où $f \in Y$, enfin \mathfrak{Q}^* la plus petite σ -algèbre qui contient \mathfrak{F}^* . $\{A_i\}$ et $\{a_i\}$ étant deux suites finies ou infinies d'ensembles $A_i \subset P$ et de nombres $a_i > 0$ respectivement, soit $U(A_i, a_i)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f \in Z$ telles que $x \in A_i$ implique $|f(x)| < a_i$. \mathfrak{A} étant une famille non vide de sous-ensembles de P , on définit sur Z deux topologies $T_\infty(\mathfrak{A})$ et $T(\mathfrak{A})$ en prenant pour voisinages de 0 les ensembles $U(A_i, a_i)$, où $A_i \in \mathfrak{A}$ et $a_i \rightarrow \infty$ ou la suite $\{a_i\}$ est finie, suivant le cas. L'A. démontre, en s'appuyant sur ses résultats antérieurs [*Czechosl. math. J.* 5 (80), 467—487 (1955)], les théorèmes suivants: Si (1) $A \in \mathfrak{A}$, $f \in Y$ entraîne que $f(x)$ est bornée sur A et si (2) la fonctionnelle linéaire J est continue sur l'espace Z muni de la topologie $T_\infty(\mathfrak{A})$, il existe exactement une fonction d'ensemble φ , σ -additive sur \mathfrak{Q}^* , telle que l'on ait $J(f) = \int_P f d\varphi$ pour

$f \in Z$; si J est non-négative, φ est une mesure. La condition (1) étant vérifiée, supposons que (3) à deux ensembles disjoints quelconques $A \in \mathfrak{A}$ et $F \in \mathfrak{F}^*$ corresponde toujours une fonction $f \in Y$ telle que l'on ait $f(x) = 0$ pour $x \in A$ et $f(x) = 1$ pour $x \in F$, et qu'ou bien (2), ou bien la condition suivante (2') soit remplie: (2') la fonctionnelle linéaire J est continue sur Z dans la topologie $T(\mathfrak{A})$; en ce cas il existe une suite $\{A_i\}$, infinie ou finie suivant les deux cas, telle que $A_i \in \mathfrak{A}$, et une fonction φ σ -additive sur la σ -algèbre $A \cap \mathfrak{Q}^*$, où $A = \bigcup A_i$, telles qu'on ait $J(f) = \int_A f d\varphi$

pour $f \in Z$. Réciproquement, si $A = \bigcup_1^\infty A_i$ (ou $A = \bigcup_1^n A_i$), $A_i \in \mathfrak{A}$, et si φ est une fonction σ -additive finie sur $A \cap \mathfrak{Q}^*$, la fonctionnelle $J(f) = \int_A f d\varphi$ remplit

la condition (2) [ou (2')]. Si P est un espace de Hausdorff localement compact et σ -compact, et si la fonctionnelle linéaire J (sur Z) possède la propriété suivante: (4) $J(f_n) \rightarrow 0$ toutefois que $f_n \in Z$ et que $f_n(x) \rightarrow 0$ uniformément sur chaque ensemble $A \subset P$ tel que toute fonction $f \in Y$ soit bornée sur A , il existe un ensemble compact $K \in \mathfrak{F}^*$ et une fonction φ σ -additive sur \mathfrak{Q}^* tels que $J(f) = \int_K f d\varphi$ pour $f \in Z$.

A. Császár.

Dinculeanu, Nicolae: Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires. *C. r. Acad. Sci., Paris* 245, 1203—1205 (1957).

Sei $E(z)$ ein Banachscher Raum, wobei z Element eines lokal kompakten Raumes Z ist, auf dem ein positives Radonsches Maß μ definiert ist. Bezeichne ferner F einen abzählbaren Banachraum und $G(z)$ den Raum der linearen und stetigen Abbildungen von $E(z)$ auf F und \mathfrak{G} die Familie der $(G(z))_{z \in Z}$. Versteht man noch unter $C(\mathfrak{G})$ die Menge der Vektorfelder \mathfrak{x} , die auf Z definiert sind, so daß $\mathfrak{x}(z) \in E(z)$, und \mathfrak{G} eine Familie $(E(z))_{z \in Z}$, dann beweist der Verf. folgendes Theorem: Für jede lineare und stetige Abbildung f aus $L^1_{\mathfrak{M}}$ auf F existiert ein Operatorenfeld $U_f \in C(\mathfrak{G})$, fast

überall lokal bestimmt, so daß $N_\infty(U_f) = \|f\|$ und $f(x) = \int U_f(z) x(z) d\mu(z)$ für $x \in L_{\mathfrak{A}}$. Dabei bedeutet $L_{\mathfrak{A}}^p$ die Menge der Klassen stetiger Vektorfelder, deren Norm durch $N_p(f) = \left\{ \int \|x(\zeta)\|^p d\mu(\zeta) \right\}^{1/p}$ gebildet wird, wobei das Integral das sog. „intégrale supérieure“ (vgl. H. Cartan, dies. Zbl. 26, 227) bedeutet und \mathfrak{A} eine Fundamentalfamilie des stetigen Vektorfeldes darstellt, die dem Axiom von Godement (s. dies. Zbl. 42, 346) genügt, welches fordert, daß ein abzählbarer Teil $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ existiert, so daß für jedes $z \in Z$ die Menge $\{x(z); x \in \mathfrak{A}_0\}$ dicht in $E(z)$ ist. Aus obigem Theorem folgt weiter

$$\|f(x)\| \leq \int \|U_f(z)\| \cdot \|x(z)\| d\mu(z) \leq N_\infty(U_f) N_1(x).$$

Verf. bemerkt u. a., daß im Falle Hilbertscher Räume $E(z)$ der Beweis ohne Heranziehung des Godementschen Axioms durchgeführt werden kann. Ist Z kompakt und $C_{\mathfrak{A}}(Z)$ der Raum aller stetigen, auf eine Fundamentalfamilie \mathfrak{A} bezogenen Vektorfelder x einer Familie der Banachräume $(E(z))_{z \in Z}$ und versehen mit einer Topologie gleichmäßiger Konvergenz, so wird gezeigt: Für jede lineare, stetige und majorisierte Abbildung f von $C_{\mathfrak{A}}(Z)$ auf F existiert ein kleinstes Maß μ_f und ein Operatorenfeld $U_f \in C(\mathfrak{G})$, überall bis auf eine Menge vom μ_f -Maß 0 bestimmt, so daß $N_\infty(U_f, \mu_f) \leq 1$ und $f(x) = \int U_f(z) x(z) d\mu_f(z)$ für $x \in C_{\mathfrak{A}}(Z)$. Dabei heißt f majorisiert, wenn ein positives Radonsches Maß μ existiert, so daß für jedes $x \in C_{\mathfrak{A}}(Z)$ gilt $\|f(x)\| \leq \int \|x(z)\| d\mu(z)$. H. Fieber.

Moppert, Karl-Felix: Funktionenscharen im L_2 . Math. Z. 67, 474—478 (1957).

Let $\{f_\nu(t)\}$, ν real, be a family of real functions $\in L_2$ over $\langle 0, 1 \rangle$. The family is said to be “unconditionally closed” at ν_0 if $f_\nu(t) \rightarrow f_{\nu_0}(t)$, in the L_2 norm, when $\nu \rightarrow \nu_0$ [with similar one-sided meanings]. Next, the family is said to be k -times uniformly L_2 -differentiable at ν_0 , if for ν near ν_0 and $0 \leq \kappa \leq k$, (i) $f_\nu^{(\kappa)}(t) = (\partial/\partial \nu)^{(\kappa)} f_\nu(t)$ exists and $\in L_2$; (ii) $f_{\nu_t}^{(\kappa)}(t) \rightarrow f_{\nu_0}^{(\kappa)}(t)$ in L_2 as $\nu_t \rightarrow \nu_0$. The following theorem is proved: Suppose that, for $\kappa = 0, 1, \dots$, the system $f_\nu^{(\kappa)}(t)$ is closed and that all its Gram-determinants are $\neq 0$. If the family $\{f_\nu(t)\}$, at $\nu = 0$, is arbitrarily often uniformly L_2 -differentiable from the right, then it is also unconditionally closed from the right there. In this connection the author also discusses L_2 -power series $f_\nu(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \nu^\lambda \varphi_\lambda(t)$ where $\varphi_\lambda(t) \in L_2$. W. W. Rogosinski.

Bessaga, C.: Bases in certain spaces of continuous functions. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 11—14, russ. Zusammenfassg. II (1957).

$C(Q|H)$ denotes the Banach space of all real functions $x(t)$ continuous on a compact metric space Q , vanishing on a closed subset $H \subset Q$, and with norm $\|x\| = \sup_{t \in Q} |x(t)|$. It was proved by Vakhner (this Zbl. 64, 109) that $C(Q)$ [that is, H empty] always has a basis in the sense of Schauder. Let D be the sequential Hilbert cube $\{0 \leq \tau_n \leq 1/n\}$, $n = 1, 2, \dots$. The author proves that $C(D|H)$ has a basis $\{e_n\}$ with norm 1; i. e. such that $\|t_1 e_1 + t_2 e_2 + \dots + t_p e_p\| \leq \|t_1 e_1 + t_2 e_2 + \dots + t_q e_q\|$ for all real t_i , whenever $p \leq q$. W. W. Rogosinski.

Koosis, Paul: Approximation of certain functions by exponentials on a half line. Proc. Amer. math. Soc. 8, 428—435 (1957).

Le résultat principal a été généralisé dans un autre travail de l'A. (ce Zbl. 77, 103). Cependant le présent article contient deux exemples qui montrent que, dans un certain sens, ce résultat ne peut pas être amélioré et qui ne figurent pas dans l'autre travail. J. Horváth.

Helson, Henry and Frank Quigley: Maximal algebras of continuous functions. Proc. Amer. math. Soc. 8, 111—114 (1957).

\mathfrak{A} : sous-algèbre fermée maximale de l'algèbre de Banach $C(S)$ des fonctions continues à valeurs complexes sur un compact S . J. Wermer a montré que si S est

un cercle d'une surface de Riemann, les fonctions analytiques à l'extérieur de S et continues sur S constituent une algèbre \mathfrak{A} . (Cf. en particulier ce Zbl. 72, 123.) Les A.A. montrent qu'inversement les algèbres \mathfrak{A} possèdent certaines propriétés des algèbres de fonctions analytiques. On a successivement: 1. \mathfrak{A} est un idéal maximal ou contient les scalaires (seul cas considéré dans la suite). 2. Ou bien \mathfrak{A} consiste des fonctions telles que $f(p) = f(q)$, pour une paire $p \neq q, p, q \in \mathfrak{A}$; ou bien \mathfrak{A} est séparante (seul cas considéré dans la suite). 3. Il existe un sous-ensemble S_0 fermé non vide de S tel que \mathfrak{A} contienne l'idéal \mathfrak{A}_0 des fonctions s'annulant sur S_0 . $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_0$ est une sous-algèbre fermée maximale de $C(S)/\mathfrak{A}_0$ et $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_0$ n'a pas de diviseurs de 0. Nous supposons dans la suite que \mathfrak{A} n'a pas de diviseurs de 0. 4. Un élément de \mathfrak{A} ne peut s'annuler sur un ouvert non vide sans être identiquement nul. 5. Si $\Phi \in \mathfrak{A}$ est réelle, elle est constante. 6. \mathfrak{A} est intégralement fermée, c'est-à-dire, si $\varphi, \psi \in \mathfrak{A}$ ne sont pas identiquement nulles et si la fonction continue f est telle que $\psi = f\varphi$ et vérifie $f^n + \alpha_1 f^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$, $\alpha_i \in \mathfrak{A}$, alors $f \in \mathfrak{A}$. A. Revuz.

Pavel, M.: On quasi normed spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 479—484 (1957).

L'A. généralise aux espaces et aux algèbres quasi-normés complets quelques résultats fondamentaux de la théorie des espaces et des algèbres de Banach.

A. Pereira Gomes.

Olubummo, Adegoke: Left completely continuous $B^\#$ -algebras. J. London math. Soc. 32, 270—276 (1957).

A Banach algebra A is a completely continuous algebra if the mappings $x \rightarrow ax$ and $x \rightarrow xa$ are completely continuous operators in A for each fixed a in A ; A is a left completely continuous algebra if the first of these mappings is completely continuous. The structure of completely continuous B^* -algebras was determined by Kaplansky (this Zbl. 33, 187), and his results are here extended by generalization in two directions. Complete continuity is replaced by left complete continuity, and the B^* condition is replaced by the $B^\#$ condition. A is a $B^\#$ -algebra if for each element a in A there exists a non-zero element $a^\#$ in A (not necessarily unique) such that $\|a^\#\| \cdot \|a\| = \|(a^\# a)^n\|^{1/n}$ ($n = 1, 2, \dots$). It is proved that a Banach algebra is a left completely continuous $B^\#$ -algebra if and only if it is the $B(\infty)$ -sum of simple finite dimensional $B^\#$ -algebras. As a corollary, each left completely continuous $B^\#$ -algebra is completely continuous. F. F. Bonsall.

Schatz, J. A.: Representation of Banach algebras with an involution. Canadian J. Math. 9, 435—442 (1957).

Gelfand and Neumark (this Zbl. 60, 270) showed that a Banach algebra A with an identity and an involution such that for all $a \in A$ 1. $\|a^* a\| = \|a\|^2$ and 2. $(e + a^* a)^{-1}$ exists, is isometric with a self-adjoint algebra of bounded operators on Hilbert space. Since then 2. has been shown superfluous. The author replaces 1. by $\|a^*\| = \|a\|$ and shows that there is a norm reducing (norm preserving on self-adjoint elements) isomorphism onto a self-adjoint algebra of bounded operators on a Banach inner product space, which is a Banach space X with an inner product (x, y) satisfying only i) $(x + \lambda y, z) = (x, z) + \lambda (y, z)$, ii) $(x, y) = (y, x)$, iii) $(x, z) = 0$ for all $z \in X$ implies $x = 0$, and iv) $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$. By using the usual embedding process the result can be extended to the case where there is no identity. If for some $K > 0$ and all $a \in A$, $\|a^* a\| \geq K \|a\|^2$, (a weaker form of 1.), then A has a set of irreducible representations (continuous involution preserving homomorphisms onto bounded operators on a Banach inner product space) which is complete in the sense that for each $0 \neq a \in A$, there is a representation T such that $T_a \neq 0$. J. E. L. Peck.

Foiş, Ciprian: Sur certains théorèmes de J. von Neumann concernant les ensembles spectraux. Acta Sci. math. 18, 15—20 (1957).

Let A be a complex Banach algebra with a norm preserving involution and an identity. Following von Neumann, a set S of complex numbers is called a spectral set of $x \in A$ if for every rational function r , such that $|r(\lambda)| \leq 1$ for $\lambda \in S$, $r(x) \in A$ exists and $\|r(x)\| \leq 1$. If the right half plane $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ is a spectral set of x , then $\operatorname{Re} f(x) \geq 0$ for every positive linear functional f on A . The converse of this statement is a condition which characterises algebras of operators on Hilbert space. Thus if for all $x \in A$, $\operatorname{Re} f(x) \geq 0$ for all positive linear functionals f , implies that $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ is a spectral set of x , then A is isometric and isomorphic with a uniformly closed sub-algebra of the algebra of bounded operators on Hilbert space. The proof uses a representation of reduced Banach algebras with regular norm developed by Gelfand and Najmark (this Zbl. 36, 77). Using a result of Ficken (this Zbl. 60, 262) it is shown that a Banach space X is a Hilbert space if the unit circle $\{\lambda: |\lambda| \leq 1\}$ is a spectral set of every bounded linear operator T on X for which $\|T\| \leq 1$.

J. E. L. Peck.

Vidav, Ivan: Le spectre du produit a^*a de deux éléments a et a^* vérifiant la relation $aa^* - a^*a = e$. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 12, 3—7 (1957).

Es sei A eine lineare Algebra mit dem Einheitsselement e und es existiere in ihr eine Involution, d. h. wird x auf x^* abgebildet, so gilt $(x^*)^* = x$, $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda}x^* + \bar{\mu}y^*$, $(xy)^* = y^*x^*$. Eine komplexe Zahl λ gehört zum diskreten Spektrum eines Elementes $a \in A$, wenn eine positive Form $f(x)$ existiert, so daß $f((a - \lambda e)^* \cdot (a - \lambda e)) = 0$. Eine komplexe Zahl λ , die nicht im diskreten Spektrum von a liegt, gehört zum kontinuierlichen Spektrum, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und ganzem n eine positive Form $f(x)$ gibt, so daß $f((a - \lambda e)^{*n} (a - \lambda e)^n) < \varepsilon$. Hierbei heißt eine Form aus A positiv, wenn $f(x^*x) \geq 0$ für jedes $x \in A$. Verf. betrachtet die Algebra A , die durch zwei Elemente a und a^* erzeugt wird, welche die Relation $aa^* - a^*a = e$ erfüllen, mit anderen Worten, die Algebra, in der sich jedes $x \in A$ in der Form $x = \sum_{n,m} a_{nm} a^{*n} a^m$ mit komplexen a_{nm} darstellen läßt. Das diskrete Spektrum des „selbstadjungierten“ Elementes a^*a wird gebildet von allen nicht negativen ganzen Zahlen $0, 1, 2, \dots$ und diese Werte sind einfach, d. h. es gibt zu jeder Zahl λ nur eine Form $f(x)$ mit obiger Eigenschaft. Das kontinuierliche Spektrum ist leer. Das diskrete Spektrum von a enthält alle komplexen Zahlen. Ist a ein Operator im Hilbertraum und a^* der adjungierte, so sind diese Sätze bekannt (C. R. Putnam, dies. Zbl. 55, 213).

F. Selig.

Warner, Seth: Weakly topologized algebras. Proc. Amer. math. Soc. 8, 314—316 (1957).

Compléments à un article antérieur (ce Zbl. 67, 87). Soit E une algèbre de Banach commutative, semi-simple, self-adjointe. Si la multiplication dans E est faiblement continue, E est de dimension finie.

J. Dixmier.

Widom, Harold: Non isomorphic approximately finite factors. Proc. Amer. math. Soc. 8, 537—540 (1957).

L'A. a défini antérieurement [Trans. Amer. math. Soc. 83, 170—178 (1956)] deux notions ((A) et (B)) de facteurs approximativement finis dans les espaces hilbertiens non nécessairement séparables. Ici, il donne des exemples de facteurs approximativement finis (A) mais non (B). Il utilise pour cela les facteurs associés à un groupe discret et des calculs de cardinaux.

J. Dixmier.

Sz.-Nagy, Béla: Suites faiblement convergentes de transformations normales de l'espace hilbertien. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 8, 295—302 (1957).

Ausgehend von der Aufgabe, ein von P. R. Halmos (vgl. das Referat in dies. Zbl. 41, 232) gefundenes Ergebnis über den Zusammenhang zwischen der Menge der Kontraktionen, der unitären Transformationen, der selbstadjungierten Transformationen A (mit $0 \leq A \leq I$) und der Orthogonalprojektionen eines Hilbert-Raums \mathfrak{H} zu verschärfen, gelangt Verf. zu folgenden Sätzen: I. Zu jeder Kontraktion

T von \mathfrak{H} gibt es eine Folge $\{U_k\}$ von unitären Transformationen U_k mit: $U_k^n \rightarrow T^n$ ($k \rightarrow \infty$; $n = 1, 2, \dots$), und zwar gleichmäßig bezüglich n . Die U_k können dabei als unitär-äquivalent angenommen werden. II. Zu jeder einparametrigen schwach-stetigen Halbgruppe von Kontraktionen $T(s)$ ($s \geq 0$) von \mathfrak{H} gibt es eine Folge $\{U_k(s)\}$ einparametriger stark-stetiger Halbgruppen $U_k(s)$ von unitären Transformationen mit: $U_k(s) \rightarrow T(s)$ ($k \rightarrow \infty$; $s \geq 0$), und zwar gleichmäßig bezüglich s . Die Halbgruppen $U_k(s)$ können dabei als unitär-äquivalent angenommen werden. III. Sei $A(\lambda)$ ($-\infty \leq \lambda \leq +\infty$) eine Schar beschränkter selbstadjungierter Transformationen von \mathfrak{H} . Als Funktion von λ sei $A(\lambda)$ nicht abnehmend und rechtsseitig stetig, ferner gelte $A(-\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = 0$ und $A(+\infty) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = I$.

Dann existiert eine Folge $\{E_k(\lambda)\}$ von Spektralscharen $E_k(\lambda)$, die — jeweils aufgefaßt als Funktionen von λ — die Beziehungen: $E_k(\lambda) \rightarrow A(\lambda)$ ($k \rightarrow \infty$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$) gleichmäßig bezüglich λ erfüllen und die überdies als unitär-äquivalent angenommen werden können. Beim Beweis dieser Sätze stützt sich Verf. wesentlich auf die Theorie der Fortsetzungen von Transformationen eines Hilbert-Raums \mathfrak{H} , die aus diesem herausführen [siehe: B. Sz.-Nagy, *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace*, Anhang zum Buch „Leçons d'analyse fonctionnelle“ von F. Riesz und B. Sz.-Nagy (Besprechung dies. Zbl. 64, 253)]. Als unmittelbare Anwendung des Satzes I. beweist Verf. ein Kriterium dafür, ob eine Abbildung S in \mathfrak{H} subnormal, d. h. zu einer in einem \mathfrak{H} umfassenden Hilbert-Raum \mathfrak{H}' normalen beschränkten Transformation fortsetzbar sei. Abschließend gibt Verf. einen Satz an über die Existenz einer mit gewissen Eigenschaften versehenen Folge unitär-äquivalenter Darstellungen einer *-Halbgruppe (siehe hierzu das „théorème principal“ der oben angegebenen Arbeit des Verf.). H. Pachale.

Segal, I. E.: The structure of a class of representations of the unitary group on a Hilbert space. *Proc. Amer. math. Soc.* 8, 197—203 (1957).

Es seien H und K komplexe Hilbert-Räume. G bezeichne die Gruppe aller unitären Operatoren auf H , versehen mit der starken Operator-Topologie. Γ sei eine stetige unitäre Darstellung von G auf dem Raum K . Die Darstellung Γ wird physikalisch genannt, wenn für jede Projektion P von H auf einen linearen Unterraum von H der selbstadjungierte Erzeuger $d\Gamma(P)$ der ein-parametrigen Gruppe $\{\Gamma(e^{itP}); -\infty < t < +\infty\}$ ein positiver Operator auf K ist. In der Arbeit wird folgender Darstellungssatz bewiesen: Jede physikalische, stetige, unitäre Darstellung Γ von G auf K ist eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen der gleichen Art. Die irreduziblen Summanden sind hierbei unitär äquivalent zu den kanonischen Darstellungen von G auf den Räumen kovarianter Tensoren von maximalem Symmetrie-Typus. (Vgl. hierzu die in diesem Zbl. 70, 340 referierte Arbeit des Verf.) Die Fragestellung hat ihren Ursprung in der mathematischen Theorie der Felder von Elementarteilchen, wo $d\Gamma(P)$ als die Anzahl der Teilchen im Bild von H bei der Projektion P gedeutet wird. H. Bauer.

Ehrman, Joachim B.: On the unitary irreducible representations of the universal covering group of the $3 + 2$ de Sitter group. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 53, 290—303 (1957).

Verf. berichtet ohne Beweise über die Ergebnisse seiner Thesis (Princeton 1954). Dort sind die Beweise nach Angabe des Verf. teilweise durchgeführt. G sei die universelle Überlagerungsgruppe der $3 + 2$ De Sitter-Gruppe, R_n die Drehgruppe des n -dimensionalen Raumes und K^* das direkte Produkt von R_2 und der Spinorgruppe S_3 von R_3 . $L^2(K^*)$ sei der Hilbert-Raum der bezüglich des invarianten Maßes von K^* quadratisch integrierbaren Funktionen. Es werden nicht notwendig unitäre Darstellungen $\pi^{\mu, \nu}$ von G über $L^2(K^*)$ konstruiert. $\pi^{\mu, \nu}$ hängt von den linearen Funktionen μ und ν über einem 1- bzw. 2-dimensionalen Teilraum der komplexen Lie-algebra von G ab, also von 3 komplexen Parametern. Nach Harish-Chandra

(vgl. dies. Zbl. 42, 126; 45, 386; 51, 340; 55, 340) ist jede irreduzible unitäre Darstellung infinitesimal äquivalent zu einer aus $\pi^{\mu, \nu}$ abgeleiteten Darstellung. Verf. gibt notwendige und zum Teil auch hinreichende Bedingungen für μ und ν an, bei denen man aus $\pi^{\mu, \nu}$ irreduzible unitäre Darstellungen erhält. Es wird untersucht, welche dieser abgeleiteten Darstellungen äquivalent sind. Aus den unitären irreduziblen Darstellungen erhält man durch Kontraktion (vgl. E. Inonu und E. P. Wigner, dies. Zbl. 50, 26) Darstellungen der inhomogenen Lorentzgruppe.

E. Thoma.

Domar, Y.: On spectral analysis in the narrow topology. Math. Scandinav. 4, 328—332 (1957).

Let D be the set of bounded continuous complex-valued functions on $(-\infty, \infty)$, and let $\|g\|_a = \sup \{|g(x)| : -a < x < a\}$. Definition: A function h belongs to the narrow closure of D if, for any $\varepsilon > 0$ and any $a > 0$, there exists a function $g \in D$ such that $\|h - g\|_a + \|\|h\|_\infty - \|g\|_\infty\| < \varepsilon$. Theorem: Suppose that f is a uniformly continuous member of D . If f does not vanish everywhere, then at least one character of the additive group $G = (-\infty, \infty)$ belongs to the narrow closure of the linear span of the set of all translates of f . The definition and the theorem are both due to Beurling [Acta Math. 77, 127—136 (1945)]. The theorem still holds when $(-\infty, \infty)$ is replaced by an arbitrary locally compact Abelian group; this was proved by the author (this Zbl. 71, 113). In the present paper, the author gives a more direct proof of the theorem; in contrast to his previous demonstration, this one depends only on classical Fourier-analysis type arguments. Beurling's original proof utilized the theory of analytic functions. G. L. Krabbe.

Day, Mahlon M.: Amenable semigroups. Illinois J. Math. 1, 509—544 (1957).

§§ 1—4. Soient Σ un semi-groupe (= monoïde), $m(\Sigma)$ l'espace de Banach des fonctions numériques bornées sur Σ , $m(\Sigma)^*$ son dual. L'A. dit que Σ est amenable s'il existe une moyenne $\mu \in m(\Sigma)^*$ invariante à gauche et à droite, et rappelle les conditions suffisantes connues pour qu'un semi-groupe soit amenable. § 5. Σ s'identifiant à une partie de $m(\Sigma)^*$, appelons moyenne finie sur Σ un élément de l'enveloppe convexe de E dans $m(\Sigma)^*$. Théorème: si Σ est amenable, il existe un „filtre“ (φ_n) de moyennes finies sur Σ tel que $\lim_n \|\varphi_n \sigma - \varphi_n\| = \lim_n \|\sigma \varphi_n - \varphi_n\| = 0$ pour tout $\sigma \in \Sigma$ ($\varphi_n \sigma$ et $\sigma \varphi_n$ sont les translatés de φ_n par σ). § 6. $m(\Sigma)^*$, étant le bidual de l'algèbre de Banach $l^1(\Sigma)$, est muni d'une structure d'algèbre de Banach prolongeant celle de $l^1(\Sigma)$ (Arens, ce Zbl. 44, 326). L'A. étudie cette structure et trouve que $\mu \cdot \nu = \nu$ si μ est une moyenne et ν une moyenne invariante à gauche. § 7. Un groupe abélien Σ a une moyenne invariante unique si et seulement si Σ est fini. Résultat analogue, mais moins complet, dans le cas non abélien. § 8. Supposons Σ amenable; soit π une représentation bornée de Σ dans un espace de Banach; alors il existe un filtre (A_n) de moyennes finies des $\pi(\sigma)$, $\sigma \in \Sigma$, tel que $\lim_n \|A_n(\pi(\sigma) - 1)\| = \lim_n \|(\pi(\sigma) - 1)A_n\| = 0$ pour tout $\sigma \in \Sigma$; certains résultats ergodiques d'Eberlein (ce Zbl. 34, 64) sont donc applicables. § 9. Supposons Σ amenable. Soit $x \in m(\Sigma)$. Pour que $\mu(x)$ prenne la même valeur pour toute moyenne invariante μ , il faut et il suffit qu'il existe des moyennes finies de translatés bilatères de x convergeant en norme vers une constante. §§ 10—11. Généralisation au cas où on remplace $m(\Sigma)$ par un sous-espace vectoriel bien choisi, par exemple celui des fonctions continues bornées sur Σ lorsque Σ est topologique.

J. Dixmier.

Daleckij, Ju. L.: Über die stetige Drehung von Räumen in einem Banachschen Raum. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 3 (75), 147—154 (1957) [Russisch].

L'A. considère une fonction continue et à variation bornée $P(t)$ ($t \in [a, b]$), à valeurs dans l'espace des projecteurs d'un espace de Banach B . Il construit pour cette fonction une intégrale multiplicative $U(P, t, \tau)$, dont il examine les propriétés.

Si l'on a un nombre fini de telles fonctions P_k ($k = 1, \dots, n$) qui pour tout t réalisent une décomposition orthogonale de l'unité, l'opérateur $U(\tau, t) = \sum_{k=1}^n U(P_k, \tau, t)$ a les propriétés suivantes: $U(\tau, t) = U(\tau, s) U(s, t)$, $U(t, t) = I$, $P_k(\tau) U(\tau, t) = U(\tau, t) P_k(t)$, $dU(\tau, t)/d\tau = \sum_{k=1}^n P'_k(\tau) P_k(\tau) U(\tau, t)$ (si les fonctions P_k sont dérivables). L'A. indique certaines applications à la théorie spectrale. *G. Marinescu.*

Zuchovickij (Zukhovitsky), S. I. and G. I. Éskin: The approximation of abstract continuous functions by unbounded operator functions. Doklady Akad. Nauk SSSR 116, 731—734 (1957) [Russisch].

Soient H_1 et H_2 deux espaces hilbertiens, D un sous-espace dense dans H_1 et $A(q)$ (q appartenant à un compact Q) une famille d'opérations linéaires et fermées définies sur D , prenant les valeurs dans H_2 et telles que l'application $q \rightarrow A(q)x$ soit continue pour tout $x \in D$. Les AA. affirment que la condition

$$\max_{q \in Q} \|A(q)x\| \geq m \|x\| \quad (x \in D)$$

est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un élément $x_0 \in D$, tel que

$$\inf_{x \in D} \max_{q \in Q} \|A(q)x - f(q)\| = \max_{q \in Q} \|A(q)x_0 - f(q)\|$$

(f étant une application continue de Q dans H_2). Ils ne démontrent que la nécessité. On donne aussi des conditions pour l'unicité de l'élément x_0 et on étend les résultats à certains espaces de Banach. *G. Marinescu.*

Butler, John: On the normality of an analytic operator. Proc. Amer. math. Soc. 8, 733—740 (1957).

The main result of the paper is the following theorem. Let $T(z)$ be a closed operator on Hilbert space, depending on a complex parameter z , $|z| < \gamma$, and satisfying the conditions: (a) $T(z)$, $T^*(z)$ have fixed domain \mathfrak{D} for $|z| < \gamma$; (b) $T(z)f$, $T^*(z)f$ are analytic in z for $|z| < \gamma$, $f \in \mathfrak{D}$; (c) $T(0)$ is a normal operator. Then in some complex neighborhood of $z = 0$ the set of points z where $T(z)$ is normal either reduces to the single point $z = 0$, or fills a full neighborhood of $z = 0$, or consists of a finite number of analytic arcs. If, moreover, we suppose that $T(0)$ has a completely continuous inverse, and that $T(x_n)$ is normal on a set of positive real numbers x_n such that $x_n \rightarrow 0$, then there exists a set of functions $\{\mu_i(x)\}$, analytic for $0 \leq x < \delta$, such that for $0 \leq x < \delta$ the spectrum of $T(x)$ is equal to the set $\{\mu_i(x)\}$. *B. Sz.-Nagy.*

Evgrafov, M. A.: Lineare Operatoren im Raum der analytischen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 21, 223—234 (1957) [Russisch].

Im Raum A_R^k der in $|z_i| < R$, $i = 1, 2, \dots, k$ analytischen Funktionen der Veränderlichen z_1, z_2, \dots, z_k werden Operatoren untersucht, die A_R^k auf sich selbst abbilden, sobald $0 \leq R_0 < \varrho \leq R$ ist. Unter gewissen Bedingungen wird für solche Operatoren die Fredholmsche Theorie und z. T. das Eigenfunktionenproblem behandelt. *J. Tagamlitzki.*

Donoghue jr., W. F.: The lattice of invariant subspaces of a completely continuous quasinilpotent transformation. Pacific J. Math. 7, 1031—1035 (1957).

A theorem of Aronszajn and Smith (this Zbl. 56, 113) states that every completely continuous linear transformation on a Hilbert space, with spectrum consisting of 0 alone, has at least one nested (infinite) sequence of invariant subspaces. The author shows that this result is best, by giving examples of such transformations whose full sets of invariant subspaces are ordered respectively by inclusion like: (1) a decreasing sequence; (2) an increasing sequence; (3) a real interval; (4) a non-linearly ordered set. *L. F. Meyers.*

Smart, D. R.: Representation of Hilbert space operators by (nJ) -matrices. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **53**, 304—311 (1957).

An (nJ) -matrix is defined as an infinite Hermitian matrix $H = [h_{ij}]_{i,j \geq 1}$ for which $h_{ij} = 0$ when $i - j > n$, and $h_{ij} \neq 0$ when $i - j = n$. If, in addition, $h_{ij} = 0$, when $0 < i - j < n$, H is called an $(nJ \perp)$ -matrix. Known theorems about the representation of Hilbert space operators by Jacobi matrices are generalized to (nJ) -matrices. The main results are: (a) if a selfadjoint operator T can be represented by an (nJ) -matrix, it can also be represented by a $(pJ \perp)$ -matrix for some $p \leq n$; (b) necessary and sufficient condition for the representability of a selfadjoint operator T by a $(pJ \perp)$ -matrix is that the spectrum of T has multiplicity $q \leq p$.

A. Korányi.

Smart, D. R.: Relations between the spectrum of an infinite matrix and the spectra of its sections. *J. London math. Soc.* **32**, 357—367 (1957).

Given an infinite matrix $H = (h_{ij})$, $i, j \geq 1$, its n -th section H_n is defined as (h_{ij}) , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. Let γ be a set of complex numbers obtained from the sequence of spectra of the H_n by some limiting process. The paper is concerned with the enquiry whether (i) γ includes the spectrum of H ; (ii) γ is included in the spectrum of H ; (iii) γ includes or (iv) γ is included in the spectrum of an operator in Hilbert space defined by H . A. Wintner, *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen* (Leipzig 1929), §§ 64, 65, 102, has dealt with (i); M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space* (this Zbl. **5**, 400) has treated a case of (iii) in his Theorem 10, 42; P. Hartman and A. Wintner (this Zbl. **35**, 198) have given a case of (iv); A. Wonk (this Zbl. **51**, 72) discusses a case of (ii) or (iv). In the present paper problems (iii) and (iv) are treated by a simple unified approach based on an embedding of a sequence of Euclidean spaces in Hilbert space. Theorems valid for wide classes of matrices are proved in § 2. Under strong conditions on H , its spectrum is characterized; under more practical conditions, the derived set of the spectrum is characterized. In § 3 the results are specialized to the case of Jacobi matrices (the case dealt with by Hartman and Wintner, Stone, and Wonk in the references given above). The final section contains an example and some counter-examples.

R. G. Cooke.

Halberg jr., Charles J. A.: The spectra of bounded linear operators on the sequence spaces. *Proc. Amer. math. Soc.* **8**, 728—732 (1957).

Denote by $[l_p]$ the set of all bounded linear operators which map the sequence space l_p into itself. Assume $1 \leq p$ and $1 \leq r$, and suppose that an infinite matrix A defines two operators A_p and A_r such that $A_p \in [l_p]$ and $A_r \in [l_r]$; denote by $\sigma(A_x)$ the spectrum of A_x . This paper is a sequel to the article (this Zbl. **72**, 133), in which the author and A. E. Taylor proved that $\sigma(A_p) \subset \sigma(A_r)$ (the relation $E \subset F$ signifies that any component of E has a non-void intersection with F). If $1 \leq p \leq q \leq r$, then $\sigma(A_q) \subset \sigma(A_p) \cap \sigma(A_r)$ and $\sigma(A_q) \subset \sigma(A_p) \cup \sigma(A_r)$. If q lies between p and $p/(p-1)$, replace A_r in the above by the operator B_p which is defined by the transpose B of the matrix A ; then $\sigma(A_q) \subset \sigma(A_p) \cap \sigma(B_p)$ and $\sigma(A_q) \subset \sigma(A_p) \cup \sigma(B_p)$. If A is the complex conjugate of the matrix B , then $\sigma(A_q) \subset \sigma(A_p)$. Let $|\sigma(A_x)|$ denote the spectral radius of A_x ; this article is based on the fact that $|\sigma(A_q)| \leq |\sigma(A_p)|^n |\sigma(A_r)|^m$ when q is between p and r (for some m and n ; this is a direct consequence of the Riesz convexity theorem). There are two misprints in Theorem 7, p. 731; the hypothesis should read: " $T \in [l_p] \cap [l_r]$ and ...".

G. L. Krabbe.

Allachverdiev, D. É.: Über die Vollständigkeit der Eigenfunktionen und konjugierten Funktionen von nicht-selbstadjungierten Operatoren. *Akad. Nauk Azerbajdz. SSR, Doklady* **13**, 469—472 (1957) [Russisch].

A und H seien vollstetige Operatoren im Hilbertraum \mathfrak{H} . Es wird angenommen, daß H nichtsingulär, normal, und von endlicher Ordnung ϱ ist (d. h. H^ϱ ist die kleinste Potenz von H , die eine endliche absolute Norm hat). Wir sagen, daß ein von 0 aus-

gehender Strahl in der komplexen Ebene zur Klasse K_φ gehört, wenn er einen Winkelbereich der Öffnung 2φ halbiert, der nur endlich viele Eigenwerte von H enthält. Ein System von Strahlen wird ε -dicht genannt, falls jeder Winkelbereich der Öffnung ε mindestens einen Strahl des Systems enthält. Der folgende Satz wird bewiesen: Wenn die Strahlen der Klasse K_φ für irgendein $\varphi > 0$ ε -dicht liegen ($\varepsilon \leq \pi/\varrho$), dann ist das System der Eigenfunktionen und adjungierten Funktionen der Gleichung $y = (A + \lambda H)y + f$ sowie der Gleichung $y = (A^* + \lambda H^*)y + f$ in \S vollständig. Der Beweis benützt den Satz von Phragmén-Lindelöf und einen Satz von Keldyš.

A. Korányi.

Allachverdiev (Allakhverdiev), Dž. Ė. (J. E.): On the completeness of the system of eigen-elements and adjoined elements of non-selfadjoint operators close to normal ones. Doklady Akad. Nauk SSSR **115**, 207—210 (1957) [Russisch].

Die Eigenfunktionen und adjungierten Funktionen der Gleichung $y = (A + \lambda H^{1/n} A_1 + \dots + \lambda^{n-1} H^{(n-1)/n} A_{n-1} + \lambda^n H)y$ werden untersucht, wo A ein beschränkter Operator im Hilbertschen Raum, A_i ($i = 1, \dots, n-1$) vollstetige Operatoren, und H ein vollstetiger nichtsingulärer normaler Operator von endlicher Ordnung ist. Für vollstetige A wurde diese Gleichung durch Keldyš untersucht (dies. Zbl. **45**, 394). Unter etwas komplizierten Annahmen werden hier die Ergebnisse von Keldyš verallgemeinert. Die Methoden und Ergebnisse sind denen des vorstehend besprochenen Artikels ähnlich.

A. Korányi.

Krasnosel'skij (Krasnoselsky), M. A., S. G. Krejn (Krein) and P. E. Sobolevskij (Sobolevsky): On differential equations with unbounded operators in Hilbert space. Doklady Akad. Nauk SSSR **112**, 990—993 (1957) [Russisch].

Die Gleichung (1) $dx/dt + A(t)x = f(t)$ wird betrachtet, wo $A(t)$ ($0 \leq t \leq b$) ein selbstadjungierter Operator, und $f(t)$ eine Funktion mit Werten im Hilbertschen Raum H ist. Im allgemeineren Falle eines Banachschen Raumes ist bereits bekannt [T. Kato, dies. Zbl. **52**, 126; M. A. Krasnosel'skij, S. G. Krejn, P. E. Sobolevskij, Doklady Akad. Nauk SSSR, **111**, 19—22 (1956)], daß die Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung mit der Anfangsbedingung $x(s) = x_0 \in \mathfrak{D}_A$ in der Form $x(t) = U(t, s)x_0$ darstellbar ist, wo der Operator $U(t, s)$ beschränkt und stetig in t und s ist. Für stetig differenzierbare $f(t)$ besitzt dann (1) die Lösung $x(t) =$

$U(t, 0)x_0 + Q f(t)$, mit $Q f(t) = \int_0^t U(t, s) f(s) ds$. In der vorliegenden Arbeit werden noch folgende Annahmen gemacht: a) $A(t)$ ist gleichmäßig in t von unten beschränkt, b) $A^{-\alpha}(t)$ ist stark differenzierbar für $0 \leq \alpha \leq 1$ und $C_\alpha(t) = A^\alpha(t) dA^{-\alpha}(t)/dt$ ist gleichmäßig in α und t beschränkt, c) $C_1(t)$ ist in t stark stetig und beschränkt. Dann geben die obigen Formeln eine Lösung von (1) auch für $x_0 \notin \mathfrak{D}_A$, falls $f(t)$ eine Bedingung $\text{Lip } \varepsilon$ ($\varepsilon \leq 1$) erfüllt. Der Raum C der stetigen Funktionen, und der Raum C_0^1 der stetig differenzierbaren, für $t = 0$ verschwindenden Funktionen mit Werten in H werden eingeführt, und der Operator Q wird in diesen Räumen untersucht. Es gilt z. B., daß Q in C und in C_0^1 vollstetig ist, falls $A^{-1}(t)$ in H für alle t vollstetig ist. Auch die nichtlineare Gleichung (2) $dx/dt + A(t)x = f(t, x)$ wird in Betracht gezogen. Neben a), b), c) wird angenommen, daß $A^{-1}(t)$ für alle t vollstetig ist, und $f(t, x)$ eine verallgemeinerte Lipschitzbedingung erfüllt. Dann gibt es ein Intervall $(0, h]$, in dem (2) eine stetige Lösung besitzt. Dieses Ergebnis ist auf das Problem der beschränkten Lösungen der Aufgabe $\partial u/\partial t = Au + f(t, s, u)$ anwendbar. Ohne Beweise.

A. Korányi.

Chalilov, Z. I.: Über eine Anwendung der Theorie der partiellen Differentialoperatorgleichung. Akad. Nauk Azerbajdz. SSR, Doklady **13**, 465—467 (1957) [Russisch].

In einer Reihe von Noten (vgl. dies. Zbl. **46**, 338) entwickelte der Verf.

eine Theorie der Operatorgleichungen vom Typus

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \sum_{|\alpha| \leq M} A^\alpha(t) D_x^\alpha u(t, x) + f(t, x); \quad u|_{t=0} = \varphi(x)$$

wobei $A^\alpha(t)$ Operatoren im Banachraum B , u, φ, f Vektorfunktionen mit Werten aus B sind; $x \in E^m$; $0 \leq t \leq T$. Diese Theorie soll eine Reihe gemischter Aufgaben für Integro-Differentialgleichungen umfassen. Die Note ist wegen grober Druckfehler und Mangel an Voraussetzungen schwer lesbar. K. Maurin.

Dück, W.: Funktionalanalytische Fassung der Iterationsverfahren bei Eigenwertproblemen. Z. angew. Math. Mech. 37, 248—250 (1957).

In bekannter Weise wird das lineare, selbstadjungierte, volldefinite Eigenwertproblem $My = \lambda Ny$ in einem linearen metrisierten Raum mit dem inneren Produkt $\langle x, y \rangle$ durch Einführung der beiden weiteren Skalarprodukte $\langle x, y \rangle = \langle x, My \rangle$, $[x, y] = \langle x, Ny \rangle$ (in der Arbeit verdickt!) behandelt. Iteration mit Schwarzchen Quotienten. Auf eine angekündigte Arbeit über funktionalanalytisch gewonnene Existenz- und Entwicklungsaussagen darf man gespannt sein. G. Bertram.

Leżański, T.: Approximate method of calculating characteristic elements and values. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 1—3 (1957). Russ. Zusammenfassg. I (1957).

Berechnung der charakteristischen Zahl λ_A eines beschränkten linearen, symmetrischen Operators A in \mathfrak{H} in einem gegebenen Intervall Δ ($\alpha \leq \lambda \leq \beta$) und der orthogonalen Projektion $z_{0(\Delta)}$ eines gegebenen Elements z_0 aus \mathfrak{H}_A , dem zu λ_A gehörigen charakteristischen Raum mit Hilfe einer Minimalbedingung für ein quadratisches Funktional $\Phi(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \|Ax_{\lambda} - \lambda x_{\lambda}\|^2 d\lambda$. Verf. gibt ohne Beweis Abschätzungen

für $|\lambda - \lambda_A|$ und für $\|\bar{x} - z_{0(\Delta)}\|$ an, wobei $\bar{x} = \int_{\alpha}^{\beta} \bar{x}_{\lambda} d\lambda$, $\bar{\lambda} = (A\bar{x}, \bar{x}) \|\bar{x}\|^{-2}$

und \bar{x}_{λ} eine beliebige Funktion mit $\int_{\alpha}^{\beta} \bar{x}_{\lambda} d\lambda \in \mathfrak{H}$ bedeuten. F. Selig.

Leżański, T.: Approximate solution of a linear equation. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 5—6, russ. Zusammenfassg. I (1957).

Hat die Gleichung $Ax = \varphi_0$ mit A als linearem beschränkten Operator, der den Hilbertraum \mathfrak{H} auf einen Hilbertraum \mathfrak{H}_1 abbildet und $\varphi_0 \in \mathfrak{H}_1$, eine eindeutige Lösung $x^* \in \mathfrak{H}$, dann kann stets x^* durch eine „abstrakte Funktion“ $x(t) = e^{-tB}(x_0) + \int_0^t e^{-sB}(z_0) ds$ so approximiert werden, daß $\|Ax(t) - \varphi_0\|^2 \leq (2te)^{-1} \|x^* - x_0\|^2$.

Hier bedeutet $B = \bar{A}A$, \bar{A} der zu A konjugierte Operator, der \mathfrak{H}_1 auf \mathfrak{H} abbildet und $\bar{A}\varphi_0 = z_0 \in \mathfrak{H}$, $x_0 \in \mathfrak{H}$. Also gilt $\|x(t) - x^*\| \rightarrow 0$ mit $t \rightarrow \infty$. Gibt es eine Zahl m so, daß $(x, x) \leq m(Bx, x)$, dann gilt $\|x(t) - x^*\|^2 \leq e^{-2tm} \|x^* - x_0\|^2$. Die Sätze werden ohne Beweis mitgeteilt und sind allgemeiner als das Ergebnis von L. Kantorowicz (dies. Zbl. 34, 212). F. Selig.

Leżański, T.: Approximate calculation of the minimum of a convex functional. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 7—9, russ. Zusammenfassg. II (1957).

Verallgemeinerung der im vorstehenden Referat angegebenen Methode. Für eine reelles, stetiges, beschränktes und konvexes Funktional $\Phi(x) \in \mathfrak{H}$ gilt: Mit $t \rightarrow \infty$ strebt $\Phi(x(t))$ gegen $\min \Phi(x)$, ($x \in \mathfrak{H}$), wenn $x'(t) = -\text{grad } \Phi(x(t))$, oder genauer $\Phi(x(t)) - \inf \Phi(x) \leq \left\{ \frac{t - t_0}{\delta(x(t_0))} - \frac{1}{\psi(x(t_0)) - \inf \varphi(x)} \right\}^{-1}$, wenn für $x \in \mathfrak{H}$ das Funktional $\delta(x)$ das Infimum der Zahlen δ bedeutet, die der Bedingung $\inf \{\Phi(y), \|x - y\| \leq \delta\} = \inf \{\Phi(y), y \in \mathfrak{H}\}$ genügen und $\delta(x(t_0)) > 0$. Die Frage, ob $x(t)$ für $t \rightarrow \infty$ einem Grenzwert zustrebt, bleibt offen, es kann nur eine viel schwächere Behauptung formuliert werden. F. Selig.

Altman, M.: On the method of orthogonal projection. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 229—231 (1957).

In der vorliegenden Arbeit untersucht Verf. die Fehlerabschätzung bei der Methode der Orthogonalprojektion. Gleichzeitig wird ein ökonomisches und in sich abgeschlossenes Rechenschema angegeben, welches auf einer Methode beruht, die früheren Arbeiten des Verf. (M. Altman, dies. Zbl. 77, 319; 320) zugrunde liegt.
H. Pachale.

Altman, M.: On the approximate solution of non-linear functional equations. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 457—460 (1957).

Es sei $F(x)$ ein in einem Banachschen Raum X definiertes nicht notwendig lineares Funktional mit geeigneten Differenzierbarkeitseigenschaften. Zu lösen sei die Gleichung $F(x) = 0$. Der Verf. untersucht zunächst Iterationsverfahren der Form $x_{n+1} = x_n - [f_0(y)]^{-1} F(x_n) y$ ($f_0 = F'(x_0)$) mit festem $y \in X$ unter verschiedenartigen Voraussetzungen über $F(x)$ (z. B. wird in Satz 1 vorausgesetzt: $\|F'(x) - F'(x_0)\| \leq c$, in Satz 2: $\|F'(x) - F'(\tilde{x})\| \leq K \|x - \tilde{x}\|$, in Satz 3: $\|F''(x)\| \leq K$). Die Sätze enthalten Existenz- und Konvergenzaussagen sowie Fehlerabschätzungen. [Offenbar führt dies Verfahren nur zum Ziel, wenn eine Lösung der Form $x^* = x_0 + \alpha y$ ($\alpha = \text{const}$) existiert, und es dient dann zur Berechnung der Konstanten α .] In entsprechender Weise werden Verfahren der Form $x_{n+1} = x_n - [f_n(y_n)]^{-1} F(x_n) y_n$ ($f_n = F'(x_n)$, $y_n \in X$) behandelt, wobei die Existenz von $F''(x)$ vorausgesetzt wird (Satz 4).
J. Schröder.

Altman, M.: Concerning approximate solutions of non-linear functional equations. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 461—465 (1957).

Der Verf. untersucht erneut das Iterationsverfahren (*) $x_{n+1} = x_n - [f_n(y_n)]^{-1} F(x_n) y_n$ (s. vorstehendes Referat). Von den y_n wird dabei vorausgesetzt, daß $\|y_n\| = 1$, $f_n(y_n) = \|f_n\|$ gilt. Satz 1: Es sei $\|f_0\|^{-1} \leq B_0$, $\|x_1 - x_0\| \leq \|f_0\|^{-1} \|F(x_0)\| \leq \eta_0$ und $\|F''(x)\| \leq K$ für alle $x \in X$ mit $\|x - x_0\| \leq r = -h_0^{-1} [1 - \sqrt{1 - 2h_0}] \eta_0$ bei $h_0 = B_0 \eta_0 K \leq \frac{1}{2}$. Dann konvergiert die Folge x_n gegen eine Lösung x^* der Gleichung $F(x) = 0$, und es gilt die Fehlerabschätzung $\|x^* - x_n\| \leq 2^{-n+1} (2h_0)^{2^{n-1}} \eta_0$. — Dieser Satz wird auf das Iterationsverfahren (*) $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \|Q(x_n)\|^{-2} \|P(x_n)\|^2 Q(x_n)$ zur Lösung der Gleichung $P(x) = 0$ angewendet, wobei P ein in einem reellen Hilbertschen Raum H definierter Operator, $Q(x) = \bar{P}'(x) P(x)$ und $\bar{P}'(x)$ der zu $P'(x)$ adjungierte Operator ist (Satz 2). Mit $F(x) = \|P(x)\|^2$ und $y_n = \|Q(x_n)\|^{-1} Q(x_n)$ geht (*) in (*) über. Verf. erläutert ein einfaches Beispiel, bei welchem dies Verfahren zum Ziel führt, das übliche Newtonsche Verfahren mit der gewählten Ausgangsnäherung jedoch nicht durchführbar ist.
J. Schröder.

Altman, M.: On the approximate solutions of operator equations in Hilbert space. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 605—609 (1957).

P bedeute einen in einem reellen Hilbertschen Raum H definierten Operator mit Wertebereich in H und geeigneten Differenzierbarkeitseigenschaften. Das vom Verf. bereits früher (s. vorstehendes Referat) behandelte Iterationsverfahren (*) $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \|Q(x_n)\|^{-2} \|P(x_n)\|^2 Q(x_n)$ zur Lösung der Gleichung $P(x) = 0$ wird bei abgeänderten Voraussetzungen unmittelbar untersucht. Satz 1: Es sei $\|x_1 - x_0\| \leq \eta_0$ und (*) $\|P'(x) y\| \geq B^{-1} \|y\|$ ($B > 0$), $\|Q'(x)\| \leq K$ mit $B^2 K < 4$ für alle $y \in H$ und alle $x \in H$ mit $\|x - x_0\| \leq r = (2 - B\sqrt{K})^{-1} 2 \eta_0$. Dann konvergiert die Folge x_n gegen eine Lösung x^* der Gleichung $P(x) = 0$, und es gilt die Fehlerabschätzung $\|x^* - x_n\| \leq \alpha^n (1 - \alpha)^{-1} \eta_0$ mit $\alpha = \frac{1}{2} B\sqrt{K}$. — Existiert auch $P''(x)$, so kann man $K = A^2 + MD$ verwenden, falls $\|P(x)\| \leq D$, $\|P'(x)\| \leq A$, $\|P''(x)\| \leq M$ in der entsprechenden Kugel gilt (Satz 2). — Der Satz 1 wird auf den Spezialfall $P(x) = L(x) - y$ angewendet, wobei y ein festes

Element $\in H$ ist und L einen linearen beschränkten Operator bedeutet, welcher H in H abbildet und eine beschränkte Inverse besitzt (Satz 3). *J. Schröder.*

Altman, M.: Concerning the approximate solutions of operator equations in Hilbert space. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 711—715 (1957).

Zur Lösung der Gleichung $P(x) = 0$ (s. vorstehendes Referat) wird jetzt das Iterationsverfahren $(\dagger) x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} (P'(x_n) P(x_n))^{-1} \|P(x_n)\|^2 P(x_n)$ angesetzt. Für dieses Verfahren gilt wörtlich das im vorangehenden Referat für das Verfahren $(*)$ genannte Ergebnis, wenn man dort die Forderung $(*)$ durch $|(P'(x)y, y)| \geq B^{-1} \|y\|^2$ ersetzt (Satz 1, 2). — Der Verf. wendet auch dieses Verfahren auf Gleichungen der Form $L(x) = y$ mit auf H definiertem linearen beschränkten Operator L an. Satz 3: Es gelte $(L(x), x) \geq B^{-1} \|x\|^2$ für $x \in H$, und es gebe eine Konstante α mit $\|L\| B \leq 2\alpha < 2$. Dann konvergiert die durch (\dagger) mit $P(x) = L(x) - y$, $P'(x) = L$ definierte Folge x_n bei beliebigem Ausgangselement x_0 gegen eine Lösung x^* der Gleichung $L(x) = y$, und es gilt die Fehlerabschätzung $\|x^* - x_n\| \leq \frac{1}{2} B \|L(x_0) - y\| \alpha^n (1 - \alpha)^{-1}$. *J. Schröder.*

Altman, M.: On the convergence of Galerkin's approximate process in (B_0) -spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 717—720 (1957).

Ergebnisse von N. I. Pol'skij (dies. Zbl. 64, 120) über das Galerkinsche Verfahren in Banach-Räumen werden auf die von S. Mazur und W. Orlicz (dies. Zbl. 35, 78) untersuchten B_0 -Räume übertragen. Der B_0 -Raum X besitze eine Basis $\{e_i\}$, so daß sich jedes $x \in X$ in der Form $x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) e_i$ darstellen läßt, wobei die f_i lineare stetige Funktionale mit $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ bedeuten. A sei ein linearer vollstetiger Operator mit Definitionsbereich und Wertebereich in X . Zu lösen sei die Gleichung $x - hAx = y_0$ ($y_0 \in X$, $h = \text{const}$). Beim Galerkinschen Verfahren berechnet man Näherungen $x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(n)} e_i$, indem man die Konstanten $\alpha_i^{(n)}$ so bestimmt, daß sie die linearen algebraischen Gleichungen $f_j(x_n - hAx_n - y_0) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) erfüllen. Satz: Ist h ein regulärer Wert (d. h. kein Eigenwert) des Operators A , so existieren die Galerkinschen Näherungslösungen x_n , abgesehen höchstens von endlich vielen Indices n , und die Folge x_n konvergiert gegen eine Lösung der gegebenen Aufgabe. *J. Schröder.*

Osserman, Robert: On the solution of $f[f(z)] = e^z - 1$ and its domain of regularity. Proc. Amer. math. Soc. 8, 262—263 (1957).

Mit einfachen funktionentheoretischen Mitteln wird gezeigt: Es gibt keine Funktion $f(z)$ mit folgenden Eigenschaften: 1. $f(z)$ ist eine eindeutige analytische Funktion in einem Gebiet D der Gaußschen z -Ebene. 2. D enthält den Parallelstreifen $|\text{Im}\{z\}| < \pi + \varepsilon$ (mit $\varepsilon > 0$). 3. D enthält das bei der Abbildung $w = f(z)$ entstehende Bild des Parallelstreifens $|\text{Im}\{z\}| < \pi + \varepsilon$. 4. $f(z)$ ist die 0,5-te Iterierte von $F(z) = e^z - 1$, d. h. in D gilt $f[f(z)] = e^z - 1$. — Insbesondere ist also $f(z)$ keine ganze Funktion, wie bereits von Thron (dies. Zbl. 72, 75) bewiesen wurde. *H. Töpfer.*

Bajraktarević, M.: Sur une solution monotone d'une équation fonctionnelle. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 11, 43—52 (1957).

Ziel des Verf. ist eine hinreichende Bedingung dafür zu geben, daß eine Funktionalgleichung der Gestalt $F(z) = f(z, F[g(z)])$ genau eine streng monotone Lösung besitze, die in einem Intervall fast überall definiert ist. Die Bedingung ist zu verwickelt, um hier wiedergegeben zu werden. Wie auch der Verf. bemerkt, wurden ähnliche Fragen u. a. von A. H. Read (dies. Zbl. 47, 113) crörtert. Vgl. auch T. Kitamura, Tôkoku math. J. 49, 305—307 (1943). In der vorliegenden Arbeit wird der Beweis zum Teil skizziert, zum Teil in extenso gegeben. *J. Aczél.*

Praktische Analysis:

Fabian, Václav: Zufälliges Abrunden und die Konvergenz des linearen (Seidelschen) Iterationsverfahrens. *Math. Nachr.* **16**, 265—270 (1957).

Wird bei Anwendung der Seidelschen Iterationsvorschrift $x_{k+1} = A x_k + y$ ($k = 0, 1, 2, \dots$; $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$) auf lineare Gleichungssysteme bei jedem Schritt abgerundet, dann erhält man statt der gegen die Lösung x konvergierenden Folge x_k eine Folge ξ_k , die mit den Abrundungsdefekten ε_{k+1} dem System $\xi_{k+1} = A \xi_k + y + \varepsilon_{k+1}$ ($\xi_0 = x_0$) genügt. Werden Zahlen y abweichend von der üblichen Abrundungsmethode einem Vorschlag von Forsythe folgend mit der Wahrscheinlichkeit $1 - (y - [y])$ auf $[y]$ abgerundet, mit der Wahrscheinlichkeit $y - [y]$ auf $[y] + 1$ aufgerundet, dann folgt aus der Konvergenz $x_n \rightarrow x$ fast sicher $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n \rightarrow x$.

Der Verf. schließt an eine Arbeit von Abramov an, in der die übliche Abrundungsmethode zugrunde gelegt wird und die ε_k als unabhängige zufällige Vektoren angenommen werden, deren Komponenten die mathematische Erwartung 0 und die Streuung σ^2 besitzen. Die Berechtigung dieser Annahme ist zuweilen zweifelhaft.

G. Bertram.

Bodewig, E.: Zum Matrizenkalkül. V. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **60**, 242—247 (1957).

(Teil IV s. dies. Zbl. **77**, 244.) Verf. schlägt an Stelle des Quotienten-Differenzen-Algorithmus des Ref. (dies. Zbl. **55**, 347; **56**, 350; **65**, 357) ein von Aitken (dies. Zbl. **17**, 147) stammendes Verfahren zur Bestimmung der Eigenwerte einer Matrix vor. Dieses besteht darin, daß das Bernoullische Verfahren nach Bestimmung des größten Eigenwerts λ_1 auf die abgeleitete Folge $t_k = s_{k+1} - \lambda_1 s_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) angewendet wird. Dadurch erhält man den zweitgrößten Eigenwert λ_2 und analog kann man auch weitere Eigenwerte $\lambda_3, \lambda_4, \dots$ berechnen, jedoch mit dem für deflatorische Prozesse üblichen Genauigkeitsverlust. Hingegen ist die Methode zur schärferen Bestimmung von λ_1 (und allenfalls von λ_2) durchaus empfehlenswert. — Im übrigen ist aber zu bemerken, daß die Schwarzschen Konstanten s_k für die Berechnung von nicht-dominanten Eigenwerten grundsätzlich nicht geeignet sind. Sie wurden denn auch vom Ref. nur zur Einführung des QD-Algorithmus verwendet; für die praktische Eigenwertbestimmung wurden ausdrücklich andere Varianten des QD-Algorithmus vorgeschlagen.

H. Rutishauser.

Capra, Vincenzo: Valutazione degli errori nella integrazione numerica dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* **91**, 188—203 (1957).

L'évaluation d'erreur pour l'équation $y' = f(x, y)$ est basée sur le résidu, c'est-à-dire la quantité $d = \bar{y}' - f(x, \bar{y})$, $\bar{y}(x)$ désignant une solution approchée. L'A. donne des expressions de d pour la méthode de Milne et pour celle de Runge-Kutta. En ce qui concerne la propagation de l'erreur, il utilise des bornes supérieures de f'_y (ou des quantités analogues dans le cas d'un système). L'extracteur pense que les résultats trouvés seront obligatoirement très pessimistes si $f'_y < 0$ et si l'intégration est longue. Un exemple est donné où les résultats sont bons.

J. Kuntzmann.

Ridley, E. Cicely: A numerical method of solving second-order linear differential equations with two-point boundary conditions. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **53**, 442—447 (1957).

In this paper, the author discusses the numerical solution of the differential equation $y'' + g(x)y = h(x)$ with two point boundary conditions. He begins by considering the boundary conditions (A 1) $dy/dx + \alpha y = A$ at $x = a$, (A 2) $dy/dx + \beta y = B$ at $x = b$. By factoring the operator $D^2 + g(x)$ into the factor $[D + r(x)][D + s(x)]$ he is led to the equations (1) $ds/dx - s^2 = g$, (2) $dv/dx - sv = h$,

where $(D + s)y = v$, (3) $dy/dx + sy = v$. Equation (1) is equivalent to the associated homogeneous equation (4) $d^2y/dx^2 + g(x)y = 0$ as is seen by setting $-(1/y)(dy/dx) = -s$ in (4). Equation (4) has a one parameter infinity of solution from which one satisfying proper boundary conditions can be chosen. Equation (3) has the same form as the boundary conditions (A), hence one may select $s(a) = \alpha v(a) = A$. Equation (1) and (2) can then be integrated by some numerical process to determine $s(b)$ and $v(b)$. Once these are known, it follows from (A2) and (3) that $y(b) = [v(b) - B]/[s(b) - B]$. Now, one is left with the differential equation $dy/dx + s(x)y = v$ to integrate subject to the single point boundary condition $y(b) = [v(b) - B]/[s(b) - B]$. The author next considers the case in which the boundary conditions are $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$. With similar ease he reduces this problem of solving an equation of the form $dy/dx - SgY = gV - h$ subject to the condition $Y(b) = [y_b - V(b)]/S(b)$. The author then shows that the method is completely stable only when the solution of the associated homogeneous equation is numerically increasing. The author also demonstrates a similarity between this method and a matrix method developed by Thomas [Elliptic problems in linear difference equations over a network (Watson Scientific Computing Laboratory Note, 1953)] and Fox [Fox, L. and H. H. Robertson, Proc. Sympos. on Automatic Digital Computation, Nat. Phys. Labor. 1953 (London 1954). p. 141]. R. F. Reeves.

Magnus, K.: Eine Verallgemeinerung der Methode der harmonischen Linearisierung. Z. angew. Math. Mech. 37, 274—275 (1957).

Nach dem Verfahren der harmonischen Balance ersetzt man ein nichtlineares Differentialgleichungssystem der Form $\dot{x}_r = \sum_s f_{rs}(x_s)$ durch ein lineares System $\dot{x}_r = \sum_s a_{rs} x_s$, wobei die Koeffizienten a_{rs} durch folgende endliche Fourier-Transformation gegeben sind:

$a_{rs} = \frac{1}{\pi A_s} \int_0^{2\pi} f_{rs}(A_s \sin u) \sin u \, du$. Die A_s sind die

Amplituden der zu erwartenden Schwingungen $x_s(t)$. Dieses Verfahren läßt sich aus dem Ritz-Galerkinschen Variationsverfahren ableiten, wenn man für jede Komponente x_s einen eingliedrigen Ansatz macht, die Sinusfunktion als Approximationsfunktion wählt und bei der Formulierung des Variationsprinzips an Stelle der Grundgleichungen die linearen Ersatzgleichungen benutzt. Aus dieser Überlegung folgt sogleich eine sinnvolle Verallgemeinerung der harmonischen Balance: Statt der Sinusfunktion kann sich unter Umständen eine nichtharmonische periodische Approximationsfunktion $\Psi(u)$, $\Psi(u + 2\pi) = \Psi(u)$, besser eignen; dann hat man als Koeffizienten der linearisierten Differentialgleichungen die Größen $a_{rs} =$

$$\frac{1}{h A_s} \int_0^{2\pi} f_{rs}[A_s \Psi(u)] \Psi(u) \, du, \quad h = \int_0^{2\pi} \Psi^2(u) \, du. \quad R. Reißig.$$

Mann, W. Robert, C. L. Bradshaw and J. Grady Cox: Improved approximations to differential equations by difference equations. J. Math. Physics 35, 408—415 (1957).

Die Verf. erläutern am Beispiel der Gleichung (*) $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \lambda^2 \varphi = 0$ ein Verfahren, um den Fehler beim Ersetzen von Differentialgleichungen durch Differenzgleichungen ohne Erhöhung der Ordnung der Differenzgleichung zu reduzieren. Dies geschieht, indem das Glied, das die Größenordnung des Fehlers bestimmt, wieder durch einen Differenzenausdruck approximiert wird. Ersetzt man (*) unter Zugrundelegung eines quadratischen Netzes mit der Maschenweite h durch

$$\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} - 4\Phi_{i,j} + \lambda^2 h^2 \Phi_{i,j} = 0$$

bzw.

$$\left(\frac{2}{3} \lambda^2 h^2 - \frac{10}{9}\right) \Phi_{i,j} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{12} \lambda^2 h^2\right) (\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}) + \frac{1}{6} (\Phi_{i+1,j+1} + \Phi_{i+1,j-1} + \Phi_{i-1,j+1} + \Phi_{i-1,j-1}) = 0,$$

so wird der Fehler von der Größenordnung h^4 bzw. h^6 . Es wird auch noch eine Differenzengleichung 2. Ordnung aufgestellt, bei der der Fehler die Ordnung h^8 hat.

W. Schulz.

Schineke, E.: Über Lösungen des dritten Randwertproblems der Potentialtheorie für das Außengebiet des Kreises mittels einer komplexen Differentialgleichung. Z. angew. Math. Mech. 37, 262—263 (1957).

Löst $\varphi(r, \vartheta)$ unter geeigneten Voraussetzungen die gestellte Aufgabe $\Delta\varphi = 0$ in $r > 1$, $k s(\vartheta) \varphi - t(\vartheta) \varphi_r = g(\vartheta)$ auf $r = 1$ ($k > 0$), und ist $\psi(r, \vartheta)$ die konjugierte Funktion, dann genügt $F = \varphi + i\psi = i \sum_{v=1}^{\infty} \frac{A_v}{z^v}$ ($z = r e^{i\vartheta}$) nach H. Schmidt einer Differentialgleichung der Form $F'(z) - p(z)F(z) = q(z)$. Anstatt das allgemeine Integral zur Lösung des Ausgangsproblems zu verwenden, empfiehlt es sich numerisch, $F(z)$ als Limes einer Approximationsfolge vom Typus

$$F_\lambda(z) = i z^k \int_z^\infty \frac{G_\lambda(\eta)}{\eta^{k+1}} d\eta \quad (\lambda = 0, 1, \dots)$$

anzusetzen. Die $G_\lambda(z)$ sind einer Rekursiv-Relation zu entnehmen. Es werden hinreichende Bedingungen für $F(z) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} F_\lambda(z)$ angegeben. Die Anwendung auf einen Sonderfall der Prandtl'schen Integrodifferentialgleichung hat schon früher die Überlegenheit der Methode gegenüber der von Vekua-Magnaradze gezeigt.

G. Bertram.

Babuška, Ivo: Über Schwarzsche Algorithmen in partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Z. angew. Math. Mech. 37, 243—245 (1957).

Ähnlich wie bei dem Referenten [ibid. 36, 255—256 (1956)] wird erkannt, daß sich das klassische Schwarzsche alternierende Verfahren zur Lösung von Randwertaufgaben im Durchschnitt zweier Gebiete bei der Potentialgleichung, der biharmonischen und anderen Differentialgleichung als eine abwechselnde Folge von Projektionen in einem geeigneten Hilbertschen Raum auffassen und somit beweisen läßt. Es werden auch Anwendungen auf Randwertaufgaben erwähnt, für die das behandelte Gebiet, für welches die Randwertaufgabe gelöst wird, ungeändert bleibt, aber abwechselnd verschiedene, mit der ursprünglichen Aufgabe nicht identische Randwertaufgaben gelöst werden.

D. Morgenstern.

Sokolov, Ju. D.: Sur la méthode du moyennage des corrections fonctionnelles. Ukrain. mat. Žurn. 9, 82—99, französ. Zusammenfassg. 99—100 (1957) [Russisch].

Für die lineare Integralgleichung $y(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x, t) y(t) dt$ mit stetigem Kern und stetiger gegebener Funktion $\varphi(x)$ wird ein Iterationsverfahren in Ansatz gebracht mit $y_1 = \varphi + \alpha_1 \int K dt$ als erster Annäherung. Setzt man hier $\alpha_1 = (b-a)^{-1} \int y_1(x) dx$, so ergibt sich $\alpha_1 = D^{-1} \int \varphi(x) dx$, wobei $D = b-a - \int dx \int K(x, t) dt > 0$ angenommen wird. Die n -te Annäherung ist gegeben durch $y_n = \varphi + \int K(x, t) (y_{n-1}(t) + \alpha_n) dt$ wo $\alpha_n = (b-a)^{-1} \int (y_n - y_{n-1}) dx = D^{-1} \int dx \int K(x, t) (y_{n-1} - y_{n-2}) dt - \alpha_{n-1} \int dx \int K(x, t) dt$ zu setzen ist. Die gleichmäßige Konvergenz des Verfahrens wird bewiesen. Vermittels einer Abschätzung der α_n läßt sich eine solche für die Fehlerdifferenz $|y - y_n|$ geben. Es wird darauf hingewiesen, daß die Methode sich auf den mehrdimensionalen Fall ausdehnen läßt. Besonders erwähnt wird auch die Integralgleichung der Randwertaufgabe einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Der größte Teil der Arbeit ist numerischen Beispielen vorbehalten, Randwertaufgaben aus der Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.

H. Schwerdtfeger.

Sokolov (Sokoloff), Ju. D. (G.): Sur l'application de la méthode des corrections fonctionnelles moyennes aux équations intégrales non linéaires. Ukrain. mat. Žurn. 9, 394—411, français. Zusammenfassg. 411—412 (1957) [Russisch].

Die in einer früheren [Doklady Akad. Nauk SSSR 103, 23—26 (1955)] sowie in der vorstehend besprochenen Arbeit des Verf. für lineare Integralgleichungen auseinander-gesetzte Methode der sukzessiven Approximation wird hier auf die nichtlineare Integral-

gleichung $y(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x, s) f(x, s, y(s)) ds$ ausgedehnt. Es wird der erste

Näherungsansatz $y_1(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x, s) f(x, s, \alpha_1) ds$ gemacht, wo $\alpha_1 =$

$(b-a)^{-1} \int_a^b y_1(x) dx$ zu setzen ist. Indem man den Ausdruck für y_1 in dieses Integral

einsetzt, ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für α_1 , von der angenommen wird, daß sie wenigstens eine Wurzel hat. In zweiter Annäherung wird dann $y_2(x) =$

$\varphi(x) + \int_a^b K(x, s) f(x, s, y_1(s) + \alpha_2) ds$ angesetzt mit $\alpha_2 = (b-a)^{-1} \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx$

was wie oben zu einer Bestimmungsgleichung für α_2 führt; usw. Unter der Annahme der Existenz einer unendlichen Folge $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ wird mit Verwendung einer Anzahl dem Ref. unverständlichen Voraussetzungen und Manipulationen die Konvergenz des Verfahrens bewiesen. Es wird auch bemerkt, daß sich die Methode auf den Fall einer mehr-dimensionalen Integralgleichung der angegebenen Art ausdehnen läßt. Zwei Drittel der Abhandlung behandeln numerische Beispiele, meist solche, die aus nicht-linearen Differentialgleichungen entspringen.

H. Schwerdtfeger.

Good, I. J.: On the numerical solution of integral equations. Math. Tables Aids Comput. 11, 82—83 (1957).

Spitzbart, A and N. Macon: Numerical differentiation formulas. Amer. math. Monthly 64, 721—723 (1957).

Coefficients in formulas, which express the derivatives of an interpolation polynomial at a set of equally spaced points, can be obtained in such an explicit form, that their use is in no way restricted to the tabular points. These representations are in terms of Stirling numbers. — Matrix inverses for finding the coefficients can be directly determined.

E. J. Nyström.

Schlechtweg, H.: Zur Abschätzung des Restgliedes der Mittelwertformeln zur genäherten Quadratur. Z. angew. Math. Mech. 37, 353—361 (1957).

Ist $f(x)$ in $\langle 0, 1 \rangle$ stetig differenzierbar, dann läßt sich das Restglied R_n der genäherten Quadratur $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{v=1}^n A_v f(x_v) - R_n$ (x_v in $\langle 0, 1 \rangle$) darstellen in

der Form $R_n = \sum_{v=1}^n A_v \int_0^1 f'(x) \bar{B}_1(x_v - x) dx$. Darin ist $\bar{B}_1(x)$ das erste peri-

odische Bernoullische Polynom $\bar{B}_1(x) = B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ für $0 \leq x < 1$; $\bar{B}_1(x) = \bar{B}_1(x+1)$ für alle x . R_n wird unter Verwendung der x_v und von Nullstellen der $\bar{B}_1(x_v - x)$ und $\bar{B}_1(x_v - x + 1)$ abgeschätzt. Das Newton-Cotes-Verfahren wird ausführlich diskutiert; insbesondere für $n = 3$ bis 7 werden Abschätzungskoeffizienten in Tabellen bereitgestellt. Numerische Erfahrungen werden nicht mitgeteilt.

G. Bertram.

Chovanskij, G. S.: Über den Ersatz des Logarithmus durch eine Potenzfunktion bei der näherungsweise Nomographierung. Vyčislit. Mat. 1, 153—155 (1957) [Russisch].

Verf. bemerkt: die Kurven $y = \ln u$ und $y = u^b$ berühren einander, falls $b = e^{-1} = 0,3679$ und $u = e^e = 15,15$; für $b > 0,3679$ haben die Kurven

keine gemeinsamen Punkte; für $b < 0,3679$ treten zwei Schnittpunkte auf, zwischen denen eine maximale prozentuelle Abweichung für $u_0 = e^{1/b}$ vom Betrage $\delta_0 = 100(1 - eb)$ auftritt. Verf. berechnet die Punkte u_1 und u_2 , für welche die Abweichung $-\delta_0$ ist und erhält also für die Zwischenpunkte eine Abweichung der Kurven kleiner als $|\delta_0|$. Mit Hilfe dieses Resultats stellt Verf. eine approximierende Funktion $y = Ax^B$ für $y = \log x$ auf und gibt Skalennomogramme für die Beziehung zwischen y_2/y , δ_0 , A/y_1 , B/y_1 . Verf. deutet an, wie in gleicher Weise mit $y = f_1(x)$ und $y = f_2(A, B, x)$ verfahren werden könnte. Er gibt ein Flächennomogramm in der (δ, x) -Ebene für

$$\log A + B \log x - \log(1 - \delta/100) - \log \log x = 0,$$

welche die prozentuelle Abweichung δ mit A, B, x für $\log x \approx Ax^B$ verknüpft. Mit Hilfe dieser Resultate läßt sich die Genauigkeit von Näherungsnomogrammen leicht überblicken, insbesondere für Summen und Produkte von Funktionen

$$y = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n) \quad \text{und} \quad y = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n).$$

Eine Anwendung auf Strömungsprobleme wird gegeben und eine Andeutung für die Anwendung in Nomogrammen dritter Ordnung ist beigelegt. *E. M. Bruins.*

Wheeler, R. F.: Solving quadratics quickly. *Math. Gaz.* **41**, 98—101 (1957).

Verf. konstruiert ein Nomogramm für die Lösung quadratischer Gleichungen, das aus zwei linearen parallelen Skalen und dem dazwischen eingepaßten Kreis besteht, indem er $ax^2 + x + b = 0$ an Stelle von $x^2 + ax + b = 0$ betrachtet. Für Einzelablesungen ist eine Graduierung des Kreises nicht notwendig: man kann nämlich mittels einer Hilfsgeraden die gesuchten Wurzeln auch direkt von den linearen Skalen ablesen. *H. Tolle.*

Latwesen, Alexander: Ein Nomogramm „Quadratwurzeln aus komplexen Zahlen“. *Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau* **2**, 225 (1957).

Verf. gibt — ohne Herleitung — ein Nomogramm zur Bestimmung von Quadratwurzeln aus komplexen Zahlen mit genauer Gebrauchsanweisung. *H. Tolle.*

Stammberger, Albert: Noch einmal: Ein Nomogramm „Quadratwurzeln aus komplexen Zahlen“. *Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau* **3**, 13—14 (1957).

Verf. skizziert die Herleitung des Nomogramms zur Bestimmung von Quadratwurzeln aus komplexen Zahlen, das A. Latwesen (s. vorstehendes Referat) angegeben hat, und konstruiert mit Hilfe einer projektiven Transformation ein einfacheres zu handhabendes Nomogramm. *H. Tolle.*

Stammberger, A.: Nomogramme zur Bestimmung der Form- und Regelfaktoren von NTC-Widerständen. *Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau* **2**, 159 (1957).

Verf. entwirft zwei Nomogramme zur Bestimmung der beiden Konstanten in der Abhängigkeitgleichung des Widerstandes von der Temperatur bei Halbleitern, indem er die Gleichung selbst und das Widerstandsverhältnis für verschiedene Temperaturen auf nomographische Normalformen zurückführt. *H. Tolle.*

Stammberger, A.: Nomogramme für das Absorptionsgesetz radioaktiver Strahlen. *Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau* **2**, 161 (1957).

Verf. führt das Absorptionsgesetz durch Logarithmieren auf einen nomographischen Normaltyp zurück und entwirft ein für die üblichen Bereiche geeignetes Nomogramm. Ein einfacheres Nomogramm gilt für die maximal vom Körper ertragbare Strahlenmenge. *H. Tolle.*

Goldstine, Herman H.: On the relation between machine developments and numerical analysis. *Bonner math. Schriften* Nr. **2**, 7 S. (1957).

In dem Vortrag, gehalten im Rahmen des Mathematischen Kolloquiums anlässlich der Einweihung der mathematischen Institute der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn wird die derzeitige Situation der numerischen Mathematik in bezug auf den Stand der Rechengeräteentwicklung untersucht und festgestellt, daß die Grundprinzipien der modernen numerischen Mathematik im Gegen-

satz zu den Grundprinzipien der klassischen numerischen Mathematik stehen. Besonders ergeben sich neue Problemkreise wie die Anhäufung der Abrundungsfehler, die zur numerischen Stabilität bzw. Instabilität der einzelnen Verfahren führen. An einem Beispiel wird anschließend die Problematik näher ausgeführt.

F. A. Willers.

Michel, J. G. L.: Recent developments in differential analyser techniques. Bonner math. Schriften Nr. 3, 12 S. (1957).

In dem Vortrag, gehalten im Rahmen des Mathematischen Kolloquiums anlässlich der Einweihung der mathematischen Institute der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, werden neuere Entwicklungen auf dem Gebiete der Schaltkreistechnik für Integrieranlagen angeführt in Anlehnung an die Arbeiten u. a. von Shannon und Bückner. Besonders wird auf die Schaltkreistechnik des Integrators mit invertierten Integranden eingegangen und der Zusammenhang mit der allgemeinen impliziten Funktionstechnik (in Fig. 7 z statt 2 zu lesen) hergestellt.

F. A. Willers.

Bauer, Friedrich L.: Beiträge zur Entwicklung numerischer Verfahren für programmgesteuerte Rechenanlagen. II. Direkte Faktorisierung eines Polynoms. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1956, 163—203 (1957).

Es handelt sich darum, ein Polynom $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ mit Bezug auf seine Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ in Faktoren $P(x) = u_r(x) \cdot s_r(x)$ zu zerlegen, wobei $|\xi_1| \geq |\xi_2| \geq \dots \geq |\xi_n|$ vorausgesetzt und $s_r(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_r)$ verlangt wird. Zu diesem Zweck knüpft der Verf. an Polynome $u_r^{(i)}(x) = x^{n-r} + \dots$ vom Grade $n-r$ an, die bereits im Teil I der Arbeit (siehe dieses Zbl. 67, 94) untersucht wurden und welche den Relationen $u_0^{(i)}(x) \equiv P(x)$; $u_n^{(i)}(x) \equiv 1$;

$$(a): x \cdot u_r^{(i)} - u_{r-1}^{(i+1)} = q_r^{(i)} \cdot u_r^{(i+1)}; \quad (b): u_r^{(i+1)} - u_r^{(i)} = e_r^{(i)} u_{r+1}^{(i)}$$

genügen. Ordnet man diese Polynome zu einem Schema von Horizontalreihen $u_0^{(i)}, u_1^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}$ an, wobei die Reihen durch $i = 0, 1, \dots$ gekennzeichnet sind, so kann man z. B. aus der ersten Horizontalreihe ($i = 0$) weitere Reihen mit Hilfe von (a) ableiten. Dieses Vorgehen, vom Verf. als Treppenalgorithmus bezeichnet, führt zu folgendem Ergebnis: Existiert die volle erste Horizontalreihe, so konvergieren die Vertikalreihen, d. h. $u_r^{(i)}(x) \rightarrow u_r(x)$ mit $i \rightarrow \infty$, falls $k_r = |\xi_{r+1}/\xi_r| < 1$. Die Konvergenz ist linear mit dem Konvergenzfaktor k_r . Ferner gilt $q_r^{(i)} \rightarrow \xi_r$ falls auch $k_{r-1} < 1$. — Ein anderes Verfahren, als Faktorisierungsalgorithmus bezeichnet, zielt darauf ab, die Polynome $u_r^{(k)}$ gemäß $l_r^{(i)} u_r^{(i+r)} = P(x) - x^r \cdot u_r^{(i)} - \sum_{k=1}^{r-1} l_k^{(i)} x^{r-k} u_r^{(i-k)}$

aus einer Start-Vertikalreihe $u_r^{(0)}, u_r^{(1)}, \dots, u_r^{(r-1)}$ zu entwickeln. Wenn die volle erste Horizontalreihe existiert, gilt das gleiche Ergebnis wie bei der Treppeniteration. Außerdem findet man $s_r^{(i)} = x^r + l_1^{(i)} x^{r-1} + \dots + l_r^{(i)} \rightarrow s_r$. Spezielle Anwendungsfälle dieser allgemeinen Ergebnisse beziehen sich auf die Schrägzeilen $u_k^{(n-k)} = x^{n-k}$; $k = 1, 2, \dots, n$, welche als Startreihen der Treppeniteration benutzt werden können, sowie auf die Vertikalreihe $u_r^{(n-2r+k)} = x^{n-r}$ mit $k = 2, 1, \dots, r$ für den Faktorisierungsalgorithmus. Der letztere wird allgemein auch in Matrixgestalt formuliert. Konvergenzuntersuchungen unter besonderer Berücksichtigung numerischer Stabilität und die Herstellung von Beziehungen zum QD-Algorithmus und der LR-Transformation von Rutishauser beschließen die Arbeit.

H. Bückner.

Dijkstra, E. W.: A method to investigate primality. Math. Tables Aids Comput. 11, 195—196 (1957).

Trachtenbrot, B. A.: On operators realizable in logical nets. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 1005—1007 (1957) [Russisch].

This paper gives a few observations on the operators realizable by finite automata. Let X, Z, Q be three finite sets called respectively the set of input, output and auxi-

liary letters. Let $X^n =$ the set of all sequences $x(1), \dots, x(n)$ whose elements belong to X and let $X^\omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^n$. The operators considered are those maps of $X^\mu \rightarrow Z^\mu$ ($\mu \leq \omega$) which can be defined by a system of equations: $q(0) = q_0$ (given constant) $z(t) = \Phi(x(t), q(t-1))$, $q(t) = \Psi((x(t), q(t-1)))$ for $t = 1, 2, \dots$. Such a map can clearly be realized by an automaton with a set Q of auxiliary states. If k is the least number of auxiliary states necessary for defining an operator we say it has weight k . By using delay channels to store $q(t)$ and then a switching unit to compute $z(t)$ from $x(t), q(t-1)$ we see that $\log_2 k$ binary delay lines are necessary so that $\log_2 k$ is a measure of the memory capacity necessary. If there are $\log_2 m$ input channels then the specific memory of an operator of weight k on X^n is defined to be $\log_2 k/n \log_2 m$. This is clearly ≤ 1 ; however: Theorem 1. For each $\varepsilon > 0$ the proportion of operators on X^n with specific memory $< 1 - \varepsilon$ tends to 0 as $n \rightarrow \infty$. A periodic sequence

$$x(1), x(2), \dots, x(p) \ (x(p+1), \dots, x(r))$$

is said to have period r and reduced length $p + r$. Theorem 2. An operator of weight k sends any periodic input with period r and reduced length $p + r$ into a periodic sequence with period $\leq kr$ and reduced length $\leq p + kr$. Theorem 3. In order that two operators of weight $\leq k$ defined on X^ω coincide it is necessary and sufficient that they coincide as operators on X^{2k-1} . The author notes that theorem 3 is equivalent to a result given by E. F. Moore (C. E. Shannon, J. McCarthy, Automata Studies, Princeton 1956, p. 146).

J. C. Shepherson.

Finikov, B. I.: On a family of classes of functions in the logic algebra and their realization in the class of Π -schemes. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 247—248 (1957) [Russisch].

Verf. beweist, daß jede Boolesche Funktion von n Argumenten, die für genau k Argument- n -Tupel den Wert 1 annimmt, sich durch ein Reihen-Parallel-Schalt-schema (Π -Schema) mit höchstens $2n + k \cdot 2^{k-1}$ Kontakten darstellen läßt, und zieht einige Folgerungen hieraus.

E. Burger.

Fuller, A. T.: Stability criteria for linear systems and realizability criteria for RC networks. Proc. Cambridge philos. Soc. 53, 878—896 (1957).

Ein reelles Polynom in $p = \sigma + i\omega$, dessen Nullstellen alle in der linken p -Halbebene liegen, ist als „Hurwitz-Polynom“ bekannt. Ist die charakteristische Funktion eines linearen Netzwerks ein solches Hurwitzpolynom, so ist das Netzwerk stabil. Hurwitz hat eine Reihe von Determinantenbedingungen angegeben, die von den Koeffizienten eines Hurwitzpolynoms erfüllt sein müssen. Es wird gezeigt, daß die Hälfte dieser Bedingungen schon automatisch erfüllt ist, wenn man weiß, daß gewisse Koeffizienten des Polynoms positiv sind. Es werden weitere Bedingungen für die Koeffizienten von Polynomen angegeben, die nur negative, reelle und einfache Nullstellen haben sollen. Mit Hilfe solcher Kriterien läßt sich entscheiden, ob eine gegebene rationale Funktion in p durch den Scheinwiderstand oder die Übertragungsfunktion eines RC- bzw. RL-Netzwerkes realisiert werden kann. *W. Nonnenmacher.*

Magnus, K.: Stationäre Schwingungen in nichtlinearen dynamischen Systemen mit Totzeiten. Ingenieur-Arch. 24, 341—350 (1956).

Im Anschluß an seine früheren Untersuchungen über nichtlineare Schwingungs- und Regelungssysteme (vgl. dies. Zbl. 66, 71) entwickelt Verf. jetzt das Verfahren der „Harmonischen Balance“ von Krylov-Bogoljubov auch für nichtlineare dynamische Systeme mit Totzeiten (Laufzeiten, Schaltverzug). Im Gegensatz zum linearen Fall ist Verf. wie Ref. auf diesem Gebiet nur die Arbeit von E. P. Popov (vgl. dies. Zbl. 55, 353; 57, 105) bekannt. Verf. zeigt, daß durch eine Modifikation des Popovschen Ansatzes und Kombination des Verfahrens von Krylov-Bogoljubov mit den Routh-Hurwitzschen Stabilitätskriterien nun auch Aussagen über nichtlineare Totzeitprobleme erhalten werden können; diese Aussagen betreffen vor allem Frequenz,

Amplitude und Stabilität von Dauerschwingungen eines nichtlinearen Systems mit Totzeit sowie die Gefährlichkeit bzw. Ungefährlichkeit seiner Stabilitätsgrenze (im Sinne von Bautin). Zwei einfache Beispiele, die auch streng lösbar sind, werden nach dieser neuen Methode durchgerechnet; es zeigt sich dabei durch Vergleich mit der strengen Lösung, daß der gemachte Fehler (allgemeingültige Fehlerabschätzungen sind bisher noch nicht gelungen) erstaunlich gering ist. Ein drittes, nicht mehr elementar lösbares Beispiel ist gesondert behandelt worden (vgl. nachfolgendes Referat).

S. Schottlaender.

Magnus, K.: Schwingungen in einem unstetigen Temperatur-Regelkreis mit Totzeit. Forsch. Gebiete Ingenieurwes. **23**, 169—175 (1957).

Zur Beschreibung eines Temperaturreglers mit Totzeit wird ein System von drei nichtlinearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit z. T. verzögerten Argumenten abgeleitet und an zwei Beispielen eingehend diskutiert. Beide Male handelt es sich um unstetig arbeitende Relais-Regler, im ersten Fall um einen einfachen Schwarz-Weiß-Regler (Zweipunktregler) mit Hysteresis, im zweiten Fall um einen Regler mit Totzone ohne Hysteresis (Dreipunktregler). Es wird der Einfluß der Totzeit und der speziellen Regler-Charakteristik auf Frequenz, Amplitude und Stabilität sowie Gefährlichkeit der sich einstellenden Dauerschwingungen des Systems untersucht. Dabei wird ein in früheren Arbeiten des Verf. (vgl. dies. Zbl. **66**, 71; und vorstehendes Referat) beschriebenes Verfahren verwendet; sechs Diagramme erläutern die Zusammenhänge zwischen den wichtigsten Systemkonstanten.

S. Schottlaender.

Veltman, B. P. Th.: Der derzeitige Stand der Analyse und Synthese von Nichtlinearitäten in Regelungssystemen. Regelungstechnik **5**, 77—87 (1957).

Dieser anläßlich der Fachtagung Regelungstechnik in Heidelberg 1956 gehaltenen Vortrag kann als Führer durch die in den letzten Jahren sehr umfangreich gewordene Literatur auf dem Gebiet nichtlinearer Regelungssysteme dienen. Er zeigt die gegenwärtig vorhandenen Möglichkeiten zur Beschreibung von nichtlinearen Schwingungen auf und weist vor allem auf die Wichtigkeit einer guten theoretischen Behandlung dieser Fragen hin. Eine Anzahl der gebräuchlichsten Methoden wird an einfachen Beispielen erläutert; ferner werden einige in Regelkreisen vorkommende Nichtlinearitäten beschrieben, vor allem die zum Zwecke der Verbesserung der Regelgüte absichtlich eingeführten Nichtlinearitäten. Für die Zukunft wird die Entwicklung von Verfahren gefordert, die speziell für die optimale Dimensionierung von Regelungsanordnungen brauchbar sind. Die Note schließt mit einem Literaturverzeichnis von über 50 Titeln.

S. Schottlaender.

Gumowski, Igor: Un critère de stabilité sous forme d'une équation intégrale. C. r. Acad. Sci., Paris **244**, 2004—2007 (1957).

$H(\omega)$ sei die komplexe Übertragungsfunktion (Wirkung: Ursache) eines linearen elektrischen Netzwerks. Das Netzwerk ist stabil, wenn folgende Integralgleichung erfüllt ist:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ g(t) & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

Dieses Kriterium für die Stabilität ist allgemeiner als die bekannten Kriterien von Bode und Nyquist. Einige Beispiele werden angeführt, die mit den seitherigen Kriterien nicht untersucht werden konnten, während das neue Kriterium unmittelbaren Aufschluß über die Stabilität liefert.

W. Nonnenmacher.

Kaltenecker, H.: Auswahlssysteme zur Erhöhung der Sicherheit von Signalen. Regelungstechnik **6**, 93—96 (1958).

Rauch, L. L. and R. M. Howe: A servo with linear operation in a region about the optimum discontinuous switching curve. Proc. Sympos. nonlinear Circuit Analysis Vol. **6**, 215—223 (1957).

Southard, Thomas H.: Approximation and table of the Weierstrass \wp function in the equianharmonic case for real argument. Math. Tables Aids Comput. 11, 99—100 (1957).

● Vzorova, A. I.: Tafeln zur Lösung der Laplaceschen Gleichung in elliptischen Gebieten. [Tablicy dlja rešenija uravnenija Laplasa v élliptičeskich oblastjach.] (Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Rechenzentrum. Mathematische Tafeln.) Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften 1957. 258 S. R. 30,— [Russisch].

Die Tabellen sind bestimmt zur näherungsweise Lösung der ersten Randwert-aufgabe der Laplaceschen Gleichung $\partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 = 0$ im Innern von Ellipsen $x = a \cos E$, $y = b \sin E$, wobei U auf dem Rande die Werte einer gegebenen stetigen Funktion $f(E)$ annimmt. Wird die Funktion $F(E)$ hinreichend genau durch die n -te

Partialsumme ihrer Fourierreihe $a_0 + \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} \cos k E + a_{2k} \sin k E)$ approximiert, so kann die Näherungslösung U_n der Laplaceschen Gleichung in der Form $U_n = m_0 + \sum_{k=1}^n \binom{r}{a}^k (m_{2k-1} \cos k \varphi + m_{2k} \sin k \varphi)$ dargestellt werden. Hierbei sind r, φ

die Polarkoordinaten des Punktes, in dem der Näherungswert von U bestimmt wird, und m_0, m_1, \dots, m_{2n} sind gewisse Koeffizienten, die von $p = b/a$ und den Randbedingungen abhängen. Zur Bestimmung der Koeffizienten m_i werden im Intervall von 0 bis 2π für E die Werte $E_l = (2l-1)\pi/20$ ($l = 1, 2, \dots, 20$) gewählt, wozu bestimmte Werte φ_l gehören. Es sei $F(E) = f(\varphi)$. Aus den Werten $f(\varphi_l)$ werden gewisse Summen σ gebildet, an denen aus jedem Quadranten ein φ_l beteiligt ist. Die Koeffizienten m lassen sich dann in der Form $m = \sum \gamma \sigma$ darstellen. Ein entsprechender Prozeß wird für die Größen $E'_l = (2l-2)\pi/20$ vorgenommen, der auf Summen $\sum \gamma' \sigma'$ führt. Die Tabellen enthalten nun für 232 Werte von p zwischen 0,1000 und 0,9912 die Gewichte γ und γ' . Die Schrittweite für p ist veränderlich und entspricht ungefähr einer gleichmäßigen Schrittweite für $\ln p$. Weitere Tabellen befassen sich mit dem Fall unzureichender Approximation der Randbedingungen. W. Schulz.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

● Freudenthal, Hans: Wahrscheinlichkeit und Statistik. (Volksuniversiteits Bibliotheek. 2. R. No. 57.) Haarlem: de Erven F. Bohn N. V. 1957. VII, 176 S. f 8,80.

For the general reader, who is interested in the subject of probability and statistics, the A. has written a short survey that notwithstanding its moderate size covers an important section of the field. According to the author's specifications a high-school level (by Dutch standards) should enable one to read at least the greater part of the book. On many points, however, this level is exceeded definitely, either by the extent of the mathematical apparatus — for instance in the chapters 4 (Limit theorems) and 7 (Stochastic processes) — or, more important, by the difficulty of the probabilistic argument, which constitutes for many people an unusual and not readily accepted point of view. Nevertheless, an unprejudiced reader, who has the patience to read and re-read several difficult passages, will find here a highly original and stimulating introduction that will acquaint him not only with the fundamentals of the classical theory of probability, but also with a number of more advanced topics, such as Neyman's theory of testing hypotheses, confidence intervals, Wald's sequential analysis, von Neumann's theory of games and the theory of stochastic processes. Other equally important topics have been omitted (for instance Wald's decision functions and the theory of sampling), that would not have been out of place in this collection of „short stories“ — as the author himself typifies his work — but, as the A. points out, the choice of subjects is largely a matter of taste. The same holds, of course, for the choice of examples, which

is sufficiently varied (although for instance no industrial applications are mentioned) to give the reader a good impression of the versatility of statistical methods.

J. J. Bezem.

● Dresher, M., A. W. Tucker and P. Wolfe (edited by): **Contributions to the theory of games. Vol. III.** (Annals of Mathematics Studies. Nr. 39) Princeton, N. J.: Princeton University Press 1957. 435 p.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Tortrat, Albert: **Sur le produit de composition des mesures singulières.** C. r. Acad. Sci., Paris 244, 1446—1448 (1957).

Verf. gibt Kriterien für die Singularität bzw. die absolute Stetigkeit von gewissen Klassen von Wahrscheinlichkeiten (normierten Maßen), die auf Wahrscheinlichkeitsfeldern definiert sind, deren Elemente durch Teilmengen des Intervalles $[0, 1]$ darstellbar sind. Aus diesen Kriterien werden Beispiele von unabhängigen Zufallsvariablen abgeleitet, die durch singuläre Maße (z. B. durch das klassische Cantorsche singuläre Maß, das mit Hilfe der Cantorsche Menge definiert wird) definiert sind, deren Summe auch eine singuläre Zufallsvariable ist.

D. A. Kappos.

Dubins, L. E.: **Generalized random variables.** Trans. Amer. math. Soc. 84, 273—309 (1957).

L'A. adopte la définition de Ségal des variables aléatoires généralisées à valeurs dans S (cf. Ségal, ce Zbl. 56, 123). S est considéré comme le dual d'un espace vectoriel topologique B qui doit généralement être supposé métrisable, pour la validité des théorèmes démontrés.

R. Feron.

Trybula, S.: **On parameters of the distribution of a random variable with cyclical-ly ordered values.** Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 863—866 (1957).

Pursuing a similar sequel of ideas to be found in the works of Simaika, the author gives the characteristic elements of the distribution of a random variable with values in a non-ordered space, precisely in the space of the real values mod 1. The congruence $x = y \pmod{1}$ defines an equivalence. Let \bar{R} be the set of classes, \bar{x} a generic class, $\varrho(\bar{x}, \bar{y})$ the conveniently defined distance and $\mu(I)$ a normed measure on \bar{R} relative to the random variable X and on the interval I of \bar{R} . The absolute moment of order 1 referring to the point \bar{x} of the random variable X is given by the integral $m_1(\bar{x}) = \int_{\bar{R}} \varrho(\bar{x}, x) \mu(d\bar{x})$ and the moment of order 2 by the integrall

$m_2(\bar{x}) = \int_{\bar{R}} \varrho^2(\bar{x}, \bar{x}) \mu(d\bar{x})$. The median \bar{a} and the mean \bar{s} are defined by the equalities $m_1(a) = \inf_{x \in \bar{R}} m_1(x)$; $m_2(s) = \inf_{x \in \bar{R}} m_2(x)$. Relations between these

characteristic values and the measure $\mu(I)$ are given.

O. Onicescu.

Gettoor, R. K.: **On characteristic functions of Banach space valued random variables.** Pacific J. Math. 7, 885—896 (1957).

The connection between the concept of random variable of a field $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ with values in a Banach space \mathcal{X} and of continuous functions of positive type on \mathcal{X} or \mathcal{X}^* is here studied, using Segal's notion of „weak distributions“. Setting L for this weak distribution it could be put in a one-to-one correspondence with a Fourier transform $\Phi = F(L)$ which is precisely a continuous function of positive type. To the weak distribution L corresponds a stochastic process $L(x; \omega)$ which could be realized in the algebraical dual of \mathcal{X} . The author provides also the necessary and sufficient conditions so that the process may be realizable in \mathcal{X}^* . Using these results the author can give the necessary and sufficient conditions, that a function of positive type $\Phi(l)$ ($l \in \mathcal{X}^*$) would be a characteristic function of a random variable X defined

on \mathfrak{X} assuming that this space is reflexive. The paper deals also with the conditions given by E. Mourier in the case of separability of \mathfrak{X} . *O. Onicescu.*

Šidák, Zbyněk: On relations between strict sense and wide sense conditional expectations. *Teor. Verojatn. Primen.* 2, 283—288, russ. Zusammenfassg. 288 (1957).

Let (X, F, μ) be a probability space, $G \subset F$ a σ -algebra of F and $L_2(G)$ the space of all G -measurable random variables f for which $\int f^2 d\mu < \infty$. According to Bahadur (this Zbl. 66, 110), the subspaces $L_2(G)$ are called measurable. Firstly, it is proved that a system $\mathfrak{M} \subset L_2$ is a measurable subspace if, and only if (i) \mathfrak{M} is a closed linear manifold, (ii) $1 \in \mathfrak{M}$, (iii) if $f \in \mathfrak{M}$, $g \in \mathfrak{M}$, then $\max(f, g) \in \mathfrak{M}$. The importance of this result is reflected by condition (iii). Suppose now that $f \in L_1$ and let $E\{f|G\}$ be the conditional expectation (in the strict sense) of a random variable relative to the σ -algebra G . If \mathfrak{M} is a closed linear manifold in L_2 and $f \in L_2$, let $\hat{E}\{f|\mathfrak{M}\}$ be the conditional expectation in the wide sense. Further, the projection of L_2 on a measurable subspace $L_2(G)$ is called a measurable projection. Using this definition, a one-to-one correspondence exists between conditional expectations $E\{—|G\}$ and measurable projections $\hat{E}\{—|L_2(G)\}$. It is also proved that conditional expectations are just uniquely defined continuous (in the mean of degree 1) extensions (from L_2 to L_1) of all measurable projections. Concerning continuity properties, it is shown that the correspondence between conditional expectations and measurable projections is continuous, i. e. if $E\{f|G_n\} \rightarrow E\{f|G\}$ almost surely for each $f \in L_1$, then $\hat{E}\{f|L_2(G_n)\} \rightarrow \hat{E}\{f|L_2(G)\}$ in the mean of degree 2 for each $f \in L_2$. Furthermore, an example in which the inverse correspondence is not continuous is provided. Finally, a characterization of conditional expectations as transformations of L_2 into itself is given. *O. Onicescu.*

Postnikov, A. G. und I. I. Pjatekij: Im Bernoullischen Sinne normale Zeichenfolgen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* 21, 501—514 (1957) [Russisch].

Unter einem dynamischen System sei verstanden ein Wahrscheinlichkeitsfeld (R, \mathfrak{A}, μ) mit nicht notwendig umkehrbarer Abbildung T von R in sich, wobei für alle $A \in \mathfrak{A}$ gelte: $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$. Das System heiße zerlegbar, wenn es eine Darstellung $R = R_1 + R_2$ mit $R_v \neq 0$, $R_v \in \mathfrak{A}$ und $T^{-1}R_v = R_v$ gibt. Ist $\varphi(p)$ eine (eigentlich) μ -integrable Funktion ($p \in R$), und setzt man $\psi_n(p) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \varphi(T^\nu p)$, so gilt nach Rieß: $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(p) = \psi(p)$ μ -fast überall mit μ -integriertem $\psi(p)$.

Wegen der Totalstetigkeit der ψ_n -Integrale, gleichmäßig in n , und dem Fatouschen Lemma ist $\int \psi d\mu = \int \varphi d\mu$. Für unzerlegbare Systeme gilt überdies $\psi(p) = \text{const}$ μ -fast überall. — Bei der Überpflanzung der Ergebnisfolgen $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ zu abzählbar unendlich oft wiederholten unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit den Wahrscheinlichkeiten p und q resp. für $\alpha = 1$ oder 0 auf das Einheitsintervall $R = [0, 1]$ vermöge der Abbildung $(\alpha_1, \alpha_2, \dots) \rightarrow \alpha = \sum \alpha_r \cdot 2^{-r}$ entsteht ein Wahrscheinlichkeitsfeld (R, \mathfrak{A}, μ) mit Borelschen $A \in \mathfrak{A}$ (im Falle $p = \frac{1}{2}$ bekanntlich mit Lebesgue-Maß μ). Wird T als der Dualbruchanteil von $2 \cdot \alpha$ definiert, so bildet dieses Feld mit T ein unzerlegbares dynamisches System. Die Anwendung oben genannter Sätze bei Benutzung der charakteristischen Funktion $\varphi(p)$ eines Dualintervalles auf R liefert dann bei Rückübertragung auf die Folgen $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ einen neuen Beweis für die auch aus Ergodensätzen der Theorie der Markoffschen Prozesse ableitbare Verallgemeinerung des starken Gesetzes der großen Zahlen: Es sei Δ eine Folge $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$ aus Zahlen 0 oder 1, j die Anzahl der $\varepsilon_\sigma = 1$, $N_P(\alpha, \Delta)$ die Anzahl der Sequenzen der Länge s aus α , die mit α_ν , $\nu = 1, \dots, P$, beginnen und mit Δ übereinstimmen; dann gilt für μ -fast alle α die Beziehung $\lim_{P \rightarrow \infty} (1/P) N(\alpha, \Delta) = p^j q^{s-j}$ bei beliebigem Δ . Man sagt, daß μ -fast alle α „normal“ seien. — Es wird weiter be-

wiesen, daß die Existenz eines C mit $\limsup_{P \rightarrow \infty} (N_P(\alpha, \Delta)/P) < C p^j q^{s-j}$ für alle Δ hinreichend für die Normalität von α ist, und es wird ein Verfahren angegeben, normale α zu konstruieren. H. Richter.

Linnik, Ju. V. (Yu. V.): Determining the probability distribution by a statistic's distribution. Teor. Verojatn. Primen. 1, 466—478, engl. Zusammenfassg. 478 (1957) [Russisch].

Es seien x_1, \dots, x_n unabhängige, eindimensionale Zufallsvariable mit übereinstimmender Verteilungsfunktion $F(x)$; $Q(x_1, \dots, x_n)$ eine Statistik mit der aus $F(x)$ folgenden Verteilungsfunktion $F_Q(x)$. Problem: Von $F(x)$ sei bekannt, daß es zu einer Klasse D gehört; $F_Q(x)$ gehöre zu einem $F(x)$ aus einer Unterklasse $D_1 \subset D$; ist $F(x)$ umgekehrt durch $F_Q(x)$ festgelegt? Dabei erfülle Q die folgenden Bedingungen: homogen von positiver Dimension; die Niveaulächen sind stückweise glatt, beschränkt und sternförmig. Die Klassen D besitzen neben später genannten stets die folgenden Eigenschaften: Für ein geeignetes — evtl. ausgeartetes — Intervall $\mathfrak{J} \supset \{x=0\}$ ist $p(\mathfrak{J}) = 1$ für alle $F \in D$; \mathfrak{J} läßt sich in endlich viele Teilintervalle \mathfrak{J}_r zerlegen, so daß jedes $F \in D$ auf \mathfrak{J}_r eine stetige Wahrscheinlichkeitsdichte $y(x)$ besitzt; je zwei verschiedene $y(x) \in D$ stimmen auf jedem abgeschlossenen Teilintervall eines jeden \mathfrak{J}_r in höchstens endlich vielen Punkten überein; $y(x) = y(-x)$. — Die Aufgabe führt auf eine Integro-Funktionalgleichung, deren eindeutige Lösbarkeit unter Verwendung der Eigenschaften von D festgestellt wird. Die eindeutige Bestimmtheit von F durch F_Q wird in den folgenden Fällen bewiesen: (1) $\mathfrak{J} = [-\alpha, \alpha]$, alle $y(x) \in D$ sind stetig; aus $y(x) \in D_1$ folgt zusätzlich $y(x) > 0$ im Innern von \mathfrak{J} ; (2) $\mathfrak{J} = [-\alpha, \alpha]$, $D = D_1$, alle $y(x) \in D$ sind stetig mit höchstens abzählbar vielen Nullstellen; (3) $\mathfrak{J} = (-\infty, +\infty)$, alle $y(x) \in D$ sind „vollsymmetrisch“ und von beschränkter Variation in einer Umgebung des Nullpunktes, alle $y(x) \in D_1$ sind zusätzlich holomorph für alle reellen x ; dabei heißt $y(x)$ vollsymmetrisch, wenn es die Dichte der Differenz zweier identisch verteilter, unabhängiger Zufallsgrößen mit quadratintegrierbarer Dichte ist. — Für den Beweis von Theorem (3) wird das folgende Lemma bewiesen: Es seien $\varphi(y)$ und $g(x)$ reell und positiv definit, $\varphi(x)$ zusätzlich holomorph in einer Umgebung des Nullpunktes; wenn $\varphi(x_n) = g(x_n)$ für eine Folge x_1, x_2, \dots mit $x_n \neq 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ gilt, so ist $\varphi(x) \equiv g(x)$. Beweis durch Fouriertransformation. H. Richter.

Sanov, I. N.: Über die Wahrscheinlichkeit großer Abweichungen von Zufallsgrößen. Mat. Sbornik, n. Ser. 42 (84), 11—44 (1957) [Russisch].

$F(x)$ sei die wahre und $F_N(x)$ die empirische Verteilungsfunktion bei N unabhängigen Beobachtungen einer Zufallsgröße. Es werden asymptotische Formeln (bei $N \rightarrow \infty$) für die Wahrscheinlichkeit angegeben, daß F_N in einer vorgegebenen Gesamtheit Ω von Verteilungsfunktionen liegt. Diese Formeln finden Verwendung zur Konstruktion von Vertrauensbereichen für F bei bekanntem F_N und zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeit großer Abweichungen. — Ist $F(x)$ eine Multinomialverteilung mit den Grundwahrscheinlichkeiten p_1, \dots, p_n und Ω ein Bereich der relativen Häufigkeiten $v = (v_1, \dots, v_n)$, so gilt unter gewissen Voraussetzungen über Ω die Formel $P(v \in \Omega) = \exp N \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln \left(\frac{p_i}{\lambda_i} \right) + o(1) \right]$, wobei die λ_i die Funktion $\sum v_i \ln (p_i/v_i)$ auf Ω maximieren. Eine analoge Formel gilt allgemeiner für $P(G(v) \geq 0)$, wenn $G(v)$ stetige Ableitungen 2. Ordnung besitzt. — Bei der Übertragung dieser Ergebnisse auf beliebiges $F(x)$ wird $\sum v_i \ln (p_i/v_i)$ durch $\int \ln [dF(x)/d\Phi(x)] d\Phi(x)$ für die $\Phi(x) \in \Omega$ ersetzt, wobei dieses Integral elementar definiert wird unter Diskussion seiner Eigenschaften. Die Einführung von $P(F_N \in \Omega)$ geschieht durch Approximation des Ω von innen durch Streifen V zwischen endlichen Treppenfunktionen. Ω heiße „ F -trennbar“, wenn gilt: $\omega_F(\Omega) = \sup_{\Phi \in \Omega} \int \ln [dF/d\Phi] d\Phi$

$> -\infty$; zu beliebigem $\eta > 0$ gibt es ein $V \subset \Omega$ mit $\omega_F(V) > \omega_F(\Omega) - \eta$ und weiter eine Überdeckung von Ω mit höchstens $\exp o(N)$ vielen V_i bei $\omega_F(V_i) < \omega_F(\Omega) + \eta$. Üblicherweise in der Statistik auftretende Ω erfüllen diese Bedingungen. Für die F -trennbaren Ω gilt die Formel $P(F_N \in \Phi) = \exp N [\omega_F(\Omega) + o(1)]$. Hieraus läßt sich für beliebige Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ mit $\int \ln(dF/d\Phi) d\Phi > -\infty$ folgern: $P\left(\sup_x |F_N(x) - \Phi(x)| < \varepsilon\right) = \exp N \left[\int \ln(dF/d\Phi) d\Phi + \gamma_\varepsilon + \mu_{N,\varepsilon}\right]$, wobei $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon = 0$ und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_{N,\varepsilon} = 0$ ist.

H. Richter.

Barra, Jean-Renée: Sur une propriété des fonctions de répartition empiriques considérées comme „estimations“ des fonctions de répartition théoriques. C. r. Acad. Sci., Paris **244**, 3020—3022 (1957).

Im Falle einer Zufallsvariablen besteht zwischen ihrer Verteilungsfunktion $F(z)$ und derjenigen einer Stichprobe $F_n^*(z)$ der folgende Zusammenhang: Für jedes z konvergiert $F_n^*(z)$ nach Wahrscheinlichkeit nach $F(z)$. $F_n^*(z) = F(z) + [\delta_n^*(z)/\sqrt{n}]$. $\delta_n^*(z)$ strebt nach Wahrscheinlichkeit gegen eine bestimmte Normal-Verteilung. Der Verf. überträgt diesen Satz auf mehrdimensionale Verteilungen unter Angabe einer Beweis-Skizze.

W. Saxer.

Ibragimov, I. A.: A theorem in the theory of infinitely divisible laws. Teor. Veroyatn. Primen. **1**, 485—489, engl. Zusammenfassg. 489 (1957) [Russisch].

Verf. untersucht die Klasse \mathfrak{F} aller unbeschränkt teilbaren Verteilungen F mit der folgenden Eigenschaft: Ist $F * H = Q$ und Q unbeschränkt teilbar, so ist es auch H . Es wird gezeigt: \mathfrak{F} ist identisch mit der Gesamtheit der Normalverteilungen.

W. Richter.

Dwass, Meyer and Henry Teicher: On infinitely divisible random vectors. Ann. math. Statistics **28**, 461—470 (1957).

Die Hauptfrage der Arbeit ist: Wann läßt sich der als unbeschränkt zerlegbar vorausgesetzte Zufallsvektor X in der Form AY darstellen, wo A eine Konstantenmatrix und Y ein Zufallsvektor mit unabhängigen unbeschränkt zerlegbaren Komponenten ist? Wegen der bekannten Form der P. Lévy'schen kanonischen Darstellung genügt es sich auf den „Poisson-artigen“ Bestandteil zu beschränken und es wird die notwendige und hinreichende Bedingung aufgezeigt, daß das in der kanonischen Darstellung auftretende Maß auf Strahlen durch den Ursprung konzentriert ist. Weitere Untersuchungen beschreiben insbesondere die Approximierbarkeit durch eigentliche Poisson-Prozesse und die Darstellung Poissonscher Prozesse.

D. Morgenstern.

Barton, D. E.: The modality of Neyman's contagious distribution of type A . Trabajos Estadíst. **8**, 13—22 u. spanische Zusammenfassg. 22 (1957).

The author divides the parameter space of the above contagious distributions, a plane, into regions where the number of modes possessed by the distributions are the same. A graph is given and the calculations are discussed.

L. Cote.

Rizzi, Alfredo: Osservazioni sulle classi di Fréchet delle funzioni di ripartizione a più variabili. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **12**, 269—277 (1957).

Vengono introdotte „le classi di Fréchet“ come insieme di funzioni di ripartizione H -ple, $\Gamma(\Phi(x_1, \dots, x_n))$, aventi come funzioni marginali s funzioni di ripartizione $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$, rispettivamente di dimensione h_1, h_2, \dots, h_s ($h_1 + h_2 + \dots + h_s = H$). In particolare viene studiato il caso $H = 3$ come l'insieme delle funzioni di ripartizione triple, $\Gamma(\Phi(x, y, z))$, aventi come funzioni marginali tre funzioni di ripartizione semplice $\varphi(x), \psi(y), \vartheta(z)$. Viene dimostrato che la funzione che assume in ogni punto dello spazio il massimo valore è la $\Phi_2(x, y, z) = \text{Minore tra } \{\varphi(x), \psi(y), \vartheta(z)\}$ ed è di ripartizione. Contrariamente al caso bidimensionale, la funzione della classe che assume in ogni punto dello spazio il minimo valore: $\Phi_1(x, y, z) = \text{Maggiore tra } \{0, \varphi(x) + \psi(y) + \vartheta(z) - 2\}$ non è di ripartizione. Se sono assegnate la

$\varphi(x, y)$ e $\vartheta(z)$ la funzione $\Phi(x, y, z) = \text{Min} \{ \varphi(x, y), \vartheta(z) \}$ non è di ripartizione. Alla stessa conclusione si arriva, nel caso quadridimensionale, quando sono date due funzioni marginali doppie. *T. Salvemini.*

Gumbel, Émile J.: Fonctions de probabilités à deux variables extrémales indépendantes. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 49—50 (1958).

Nehmen wir mit dem Verf. an, daß der jeweilige Hochstand und Tiefstand einer Flut, als zufällige Größe betrachtet, einer vom anderen unabhängig ist. Dann ist die Dichte der Wahrscheinlichkeit, daß in einem Jahre der Hochstand kleiner als x und der Tiefstand kleiner als z sei, durch eine Formel der Art $H(x, z) = \exp \{ 1 - e^{-\alpha(x-u)} \} [1 - \exp \{ (-z-\varepsilon)/(u'-\varepsilon) \}]$ gegeben. Die Werte der Parameter $\alpha, u, u', \varepsilon$ und k hängen von der Erfahrung ab. Andere Wahrscheinlichkeiten können in der gleichen Weise konstruiert sein, indem man die asymptotischen Wahrscheinlichkeiten der größten und der kleinsten Werte der beiden gegebenen zufälligen Größen und derer angenommene Unabhängigkeit verwendet. *O. Onicescu.*

Kac, M.: Uniform distribution on a sphere. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **5**, 485—486 (1957).

Satz: Sei $P(t)$ ein auf der Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ wandernder Punkt. Für jede Projektion p auf einen Durchmesser sei die Bewegung $p P(t)$ gleichverteilt. Dann ist $P(t)$ gleichverteilt auf der Kugelfläche. — Beweis durch harmonische Analyse. *K. Jacobs.*

Cook, J. M.: Rational formulae for the production of a spherically symmetric probability distribution. Math. Tables Aids Comput. **11**, 81—82 (1957).

Tedeschi, Bruno: Sulle limitazioni più convenienti della probabilità che una variabile casuale a più dimensioni assuma un valore appartenente a un campo assegnato. Scritti mat. in Onore di F. Sibirani, 261—279 (1957).

Übertragung der Čebyševschen Ungleichung und ihrer Erweiterungen auf zweidimensionale zufällige Variable. Allerdings ist der Gedanke einer solchen Verallgemeinerung nicht neu. Vgl. P. O. Berge, dies. Zbl. **18**, 263 und D. N. Lal, dies. Zbl. **67**, 362. *L. Schmetterer.*

Bergström, Harald: On the limit theorems for convolutions of distribution functions. I: An analysis in the Weierstrass norm. J. reine angew. Math. **198**, 121—142 (1957).

In dieser bemerkenswerten Untersuchung werden klassische Grenzwertsätze verallgemeinert und mit einer neuen, sehr allgemeinen, im wesentlichen elementaren Methode bewiesen. Voraussetzung: Gegeben Folgen $X_1(n), X_2(n), \dots, X_k(n), \dots$ ($n = 1, 2, \dots$) von in jeder Folge unabhängigen Zufallsvariablen. $X_{\lambda, k}(n) = X_{\lambda+1}(n) + \dots + X_k(n)$ ($0 \leq \lambda < k \leq k_n$). Verf. untersucht die Frage, wann schwache Konvergenz von $X_{0, k_n}(n)$ gegen eine Verteilungsfunktion (V. f.) $G(x)$ besteht, unter folgenden Voraussetzung: Wenn $n \rightarrow \infty$, sollen die V. f. von $X_k(n)$ gleichmäßig in k in allen gemeinsamen Stetigkeitspunkten schwach gegen eine V. f. $F_k(x)$ konvergieren. Die Folge $F_k(x)$ konvergiere ihrerseits gegen $E(x)$, wobei $E(x) = 0$ für $x < 0$, $= \frac{1}{2}$ für $x = 0$, $= 1$ für $x > 0$ (Verallgemeinerte Voraussetzungen gegenüber Bowly, Khintchine u. a.). Definitionen: 1. W -Norm $N_\sigma[f(x)]$ einer V. f. $f(x)$.

$$N_\sigma[f(x)] = \sup_{-\infty < x < +\infty} \left| f(x) * \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right| \quad (\Phi \text{ normale V. f.}).$$

2. Eine Folge von V. f. $f_n(x)$, deren W -Normen existieren, wird als Cauchy-konvergent in der W -Norm bezeichnet, wenn $N_\sigma[f_n - f_m] \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty; m \rightarrow \infty$).
3. Quasi-V. f.: Alle für X endlichen Funktionen, die für alle $x \neq 0$ zunehmend sind. (Beispiel: V. f.).
4. Normale Quasi-V. f. Klasse Q : Für Funktionen $f(x)$ dieser Klasse gilt $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$. Im vorliegenden Teil I werden die beiden folgenden Hauptsätze formuliert: Satz I: Eine Folge $\{f_n(x)\}$, $f_n(x) \in G_0$ ist Cauchy-konvergent (beschränkte Funktion der Klasse Q) in der W -Norm dann und nur dann, wenn $f_n(x)$

schwach gegen eine normale Quasi-V. f. $f(x)$ konvergiert. Die gestutzten zentralen Momente $\int_{|x| \leq \eta} x^\nu df_n(x)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) konvergieren gegen endliche Werte $a_\nu(\eta)$, wenn $n \rightarrow \infty$ für alle η , in denen $f(x)$ stetig. Satz II: Es sei

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{|x| \leq \eta} x dF_k(n, x) \right| < \infty \text{ für } \eta < \infty,$$

$f_{0,k_n}(n, x) = [F_1(n, x) - E(x)] + [F_2(n, x) - E(x)] + \dots + [F_{k_n}(n, x) - E(x)]$. Damit $F_{0,k}(x)$ bzw. $F_{k,k_n}(n, x)$ schwach gegen eine V. f. $F^{(1)}(x)$ bzw. $F^{(2)}(x)$ konvergieren, wenn vorerst n und dann k gegen ∞ streben, ist notwendig und hinreichend, daß $f_{0,k_n}(n, x)$ Cauchy-konvergent in der W -Norm. Der Beweis des Satzes I befindet sich im Teil I, der Beweis für den Satz II erscheint in Teil II. *W. Saxer*.

Studnev, Ju. P. (Y. P.): On the role of Lindeberg's conditions. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1958, 239—241, russ. und engl. Zusammenfassung 241—242 (1958) [Ukrainisch].

This paper contains the following basic result: Theorem. Under the conditions of Lyapunov's theorem (formulated by Lindeberg) the following relation holds

$$\max_{-\infty < x < \infty} \left| F'_n(x) - \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz \right| = O \left(\frac{1}{B_n} \int_0^{B_n} L_n(x) dx \right) + O \left(\frac{1}{B_n} \right),$$

where

$$L_n(x) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|z| \geq x} z^2 dF_i(z).$$

This estimation is essential.

Engl. Auszug.

Esseen, C. G.: A moment inequality with an application to the central limit theorem. *Skand. Aktuarietidskr.* 1956, 160—170 (1957).

If X_i is a sequence of independent random variables with the c. d. f. $F(x)$, and $E X_i = 0$, $E X_i^2 = \sigma^2 \neq 0$, $E|X_i|^3 = \beta_3 < \infty$, the Berry-Esseen theorem asserts

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C \beta_3}{\sigma^3 \sqrt{n}}, \text{ where } F_n(x) \text{ is the c. d. f. of } \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \text{ and } \Phi(x) \text{ is}$$

the standard normal c. d. f. After announcing an unpublished result of R. Hoffman that $C \leq 2.890$, the author proves that $C \geq (\sqrt{10} + 3)/6\sqrt{2\pi}$, giving a distribution $F(x)$ for which the equality holds. The proof uses a moment inequality for purely discontinuous distributions.

L. Cole.

Kac, M.: A class of limit theorems. *Trans. Amer. math. Soc.* 84, 459—471 (1957).

Etant donnée une suite de variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, \dots , de même loi de probabilité, possédant une densité de probabilité $\rho(x)$ qui est une fonction paire et dont la fonction caractéristique $\varphi(\xi)$ est intégrable sur $-\infty, +\infty$ et telle que: $\varphi(\xi) \sim 1 - |\xi|^\gamma$ quand $\xi \rightarrow 0$, avec $1 \leq \gamma \leq 2$, l'A. étudie la probabilité $P_n(l, \Omega)$ pour que exactement l des sommes partielles $s_k = X_1 + \dots + X_k$ tombent dans l'ensemble mesurable borné Ω . Il montre que les limites $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-1/\gamma} P_n(l, \Omega)$,

$1 < \gamma \leq 2$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} \log n P_n(l, \Omega)$, $\gamma = 1$, existent et il les calcule. *R. Feron.*

Petrov, V. V.: A local theorem for lattice distributions. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 115, 49—52 (1957) [Russisch].

Es sei X_1, X_2, \dots eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen, die nur ganzzahlige Werte annehmen, $p_{jm} = P\{X_j = m\}$. Es bezeichne $P_n(m) = P\left\{\sum_{j=1}^n X_j = m\right\}$,

$A_n = E \sum_{j=1}^n X_j$, $s_n^2 = D \sum_{j=1}^n X_j$. Es sei o. B. d. A. $p_{j0} \geq p_{jm}$ für alle m und $j = 1, 2, \dots$. Die Folge X_1, X_2, \dots genüge den Bedingungen: α) der größte gemeinsame Teiler aller ganzen j mit $\frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^n p_{j0} p_{im} \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) ist gleich Eins.

$\beta)$ $s_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$); $L_n \leq B s_n^{-\delta}$ für alle n und bei konstantem B . Hier bezeichnet L_n den Ljapunoffschen Bruch $L_n = s_n^{-(2+\delta)} \sum_{j=1}^n \mathbf{E} |X_j - \mathbf{E} X_j|^{2+\delta}$ ($0 < \delta \leq 1$). Verf. beweist: Sind die Bedingungen $\alpha)$ und $\beta)$ erfüllt, so läßt sich der lokale Grenzwertsatz für gitterförmige Verteilungen [vgl. J. Prochorov, dies. Zbl. 58, 122; J. Rozanov, Teor. Verojatn. Primen. 2, 275—280 (1957)] folgendermaßen präzisieren:

$$|s_n P_n(m) - (2\pi)^{-1/2} \exp \{-(m - A_n)^2 / 2 s_n^2\}| \leq C L_n,$$

wobei C eine Konstante ist.

W. Richter.

Bühlmann, Hans: Sur l'indépendance asymptotique des variables aléatoires liées. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 490—493 (1957).

Si X_{ij} ($j = 1, 2, \dots, l$, $l = 1, 2, \dots, n, \dots$) est un demi-tableau de variables aléatoires le problème du comportement asymptotique des sommes $\sum_{j=1, \dots, n} X_{jn} = X_n$ quand $n \rightarrow \infty$, présente un certain intérêt théorique. Ce problème peut être abordé d'une manière spécialement simple quand les variables X_{jn} sont asymptotiquement indépendantes dans le sens que la fonction caractéristique de X_n est le produit des fonctions caractéristiques des n composantes X_{jn} pour $n \rightarrow \infty$. Des conditions suffisantes pour cette indépendance ont été données par M. Loève. L'A. du présent travail les transforme en conditions nécessaires et suffisantes, en imposant aux variables des conditions supplémentaires de régularité. Une interprétation géométrique facilite la démonstration des énoncés.

O. Onicescu.

Blackwell, David: On discrete variables whose sum is absolutely continuous. Ann. math. Statistics 28, 520—521 (1957).

L'A. donne une démonstration simple au théorème suivant: Soient Z_n des variables aléatoires prenant les valeurs $0, 1, \dots, D-1$ et telles que $X = \sum_k Z_k / D^n$ ait une distribution absolument continue. Alors $P(\sum Z_{k+n} / D^n < \lambda | Z_1, \dots, Z_k) \rightarrow \lambda$ avec la probabilité 1.

G. Marinescu.

Kampé de Fériet, Joseph: Mesures de probabilité sur un espace de Hilbert séparable. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 1850—1853 (1957).

Verf. gibt ein Konvergenzkriterium für $x_1 + x_2 + \dots$, wenn x_1, x_2, \dots unabhängige, stochastische Variable sind, deren Wahrscheinlichkeitsmaße in einem separablen Hilbertschen Raum definiert sind.

W. Saxer.

Driml, Molislav et Otto Hanš: Sur la convergence presque sûre d'une suite d'éléments aléatoires de type L^* . C. r. Acad. Sci., Paris 246, 539—540 (1958).

Etant donné une suite $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*, \dots$ d'éléments aléatoires de type L^* au sens de Mourier (ce Zbl. 72, 349) les AA. énoncent des conditions nécessaires et suffisantes pour que cette suite converge faiblement presque sûrement vers X_0^* et pour qu'elle converge fortement presque sûrement vers X_0^* .

R. Feron.

Medgyessy, P.: Anwendungsmöglichkeiten der Analyse der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen bei der Auswertung von Messungsergebnissen. Z. angew. Math. Mech. 37, 128—139 (1957).

Die Untersuchungen von G. Doetsch [Z. Phys. 49, 705—730 (1928), sowie dies. Zbl. 14, 213] über die rechnerische Analyse einer empirisch gegebenen Überlagerung mehrerer Gauß-Verteilungen werden auf Überlagerungen gleichartiger „stabiler“ Verteilungen (im Sinne von Lévy und Khintchine) verallgemeinert. Dergleichen benötigt man beispielsweise in der Spektroskopie, wenn mehrere eng benachbarte Linien dermaßen stoßverbreitert sind, daß sie im beobachteten Spektrum ineinander überfließen; dann mißt das Photometer eine Überlagerung von Cauchy-Verteilungen (oder Voigt-Profilen) gleicher Halbwertsbreite, aber verschiedener Höhe und Lage, und man möchte irgendwie die Lage und Intensität der Einzellinien genau ermitteln. Ein vom Verf. bewiesener Konvergenzsatz über Folgen gewisser Fourier-Stieltjes-

Transformierten erlaubt, zu einer gegebenen Überlagerung eine andere zu errechnen, in der die Komponenten schmaler geworden sind. Man kann also durch schrittweise Rechnung die Linien immer mehr verschärfen, bis sie sich deutlich voneinander abheben. Etliche Verfahren dieser Art werden angegeben; einige lassen sich mit einfachen maschinellen Hilfsmitteln bewältigen. Eine allgemeine Fehlerabschätzung wird angedeutet.

E. Breitenberger.

Dawson, Reed and I. J. Good: Exact Markov probabilities from oriented linear graphs. *Ann. math. Statistics* 28, 946—956 (1957).

Étant donnée une matrice $u \times u$ dont les éléments $\in N$, on lui fait correspondre un réseau linéaire orienté de sommets $1, 2, \dots, n, \dots, u$ tel que le nombre des arêtes orientées reliant le sommet r au sommet s soit égal à l'élément de la matrice situé à l'intersection de la ligne r et de la colonne s . Le réseau est dit „simple“ si le nombre des arêtes aboutissant à un sommet est égal au nombre des arêtes qui partent de ce sommet. Un circuit est „complet“ s'il passe exactement une fois par chaque arête, en respectant le sens de parcours sur les arêtes. S'appuyant sur les évaluations connues de N. G. de Bruijn et T. Van Aardenne (v. ce Zbl. 44, 382) et de W. T. Tutte et C. A. B. Smith (v. ce Zbl. 25, 91), on présente de nombreuses applications stochastiques, entre autre, aux n -uples dans les séquences circulaires, aux chaînes de Markov. Cas de $n = 2$. Relation asymptotique.

A. Sade.

Lévy, Paul: Remarques sur le processus de W. Feller et H. P. MacKean. *C. r. Acad. Sci., Paris* 245, 1772—1774 (1957).

Das von W. Feller und H. P. McKean jr. (dies. Zbl. 72, 353) gegebene erste Beispiel für einen homogenen Markoffschen Prozeß mit abzählbar-vielen Zuständen, die alle instabil sind, wird hier auf völlig andere Weise erhalten: Die Funktionen $X(t)$ des Wienerischen Prozesses werden durch eine X -abhängige, mit einer monotonen Funktion mit abzählbaren überall dicht liegenden Sprungstellen erzeugte, auf t einwirkende Transformation zu den neuen Prozeß-Funktionen gemacht. Dabei wird ein Grenzwertsatz über die Abstände derjenigen t_v verwendet, für die $X(t_v) = x$ ist. Ein weiteres Ergebnis bezieht sich auf die Abhängigkeit von der benutzten monotonen Funktion; Beweise sollen an anderer Stelle gegeben werden.

D. Morgenstern.

Breiman, Leo: On transient Markov chains with application to the uniqueness problem for Markov processes. *Ann. math. Statistics* 28, 499—503 (1957).

Let x_0, x_1, \dots be a Markov chain with a countable number of states indexed by a subset of integers I with stationary transition probabilities p_{ij} . By definition, a transient set of states C is denumerable atomic if $P(x_n \in C \text{ i. o.}) > 0$ and if for every infinite set $A \subset C$, $x_n \in C \text{ i. o.}$ implies $x_n \in A \text{ i. o.}$ almost surely. It is shown that the necessary and sufficient condition for a transient set of states C such that $P(x_n \in C \text{ i. o.}) > 0$ to be denumerably atomic is that any bounded solution $\varphi(i)$ of $\varphi(i) \leq \sum_{j \in I} p_{ij} \varphi(j)$ satisfies the condition $\liminf_{i \in C} \varphi(i) = \limsup_{i \in C} \varphi(i)$. Using this property, the following convergence criterion is given: let C be denumerably atomic and $f(i)$ a finite nonnegative function on I such that f is zero outside of C ; the sum $\sum_{n=0}^{\infty} f(x_n)$ converges almost surely if and only if $\sum_{n=0}^{\infty} E f(x_n)$ converges and otherwise diverges with probability $P(x_n \in C \text{ i. o.})$. As a consequence of the above criterion, it is proved that under the same conditions, a necessary and sufficient condition for the almost surely convergence of $\sum_{n=0}^{\infty} f(x_n)$ is that the equations

$a(i) - f(i) + \sum_{j \in I} p_{ij} a(j)$ have a bounded solution. The criterion mentioned above

is then applied to the uniqueness problem for continuous parameter Markov processes with a set of states indexed by a subset of integers I . Let q_i, p_{ij} , $i, j \in I$, be nonnegative constants; necessary and sufficient conditions are given for the

existence of a unique process $X(t)$, $0 \leq t < \infty$, having a given initial distribution and for which: (i) $P(X(t)$ is constant in the interval $[s, s + \tau] | X(s) = i) = 1 - q_i \tau + o(\tau)$; (ii) P (first discontinuity of $X(t)$, $t \geq s$, is a jump to $j | X(s) = i) = p_{ij}$. It is supposed that $q_i, p_{ij} < \infty$, $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1$. R. Theodorescu.

Breiman, Leo: The individual ergodic theorem of information theory. *Ann. math. Statistics* 28, 809—811 (1957).

Let $\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots$ be a stationary ergodic process, taking values in a finite alphabet a_1, a_2, \dots, a_s , Ω the corresponding sequence space of the process and p the probability on Ω . It is shown that there is a constant H (the entropy) such that $\lim_n [(-1/n) \log_2 p(x_0, \dots, x_{n-1})] = H$ almost surely. The proof is based upon the following modified Birkhoff theorem: if T is a metrically transitive 1-1 measure preserving transformation of the probability space (Ω, \mathcal{B}, p) onto itself; $g_0(\omega), g_1(\omega), \dots$ a sequence of measurable functions on Ω converging almost surely to the function $g(\omega)$ and such that $E(\sup_k |g_k|) < \infty$, then $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_k(T^k \omega) = Eg$ almost surely. R. Theodorescu.

Breiman, Leo: A counterexample to a theorem of Kolmogorov. *Ann. math. Statistics* 28, 811—814 (1957).

The following result of Kolmogorov (*Math. Ann.* 99, 309—319 (1928); M. Loève, *Probability theory*, van Nostrand, New York, 1955) is considered: let X_1, X_2, \dots be a sequence of independent random variables, $EX_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$, and

$$X_{nk} = X_k \text{ if } |X_k| < n, \text{ resp. } 0 \text{ if } |X_k| \geq n;$$

then $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{p} 0$ if and only if the following conditions are verified

$$(i) \sum_{k=1}^n P(|X_k| \geq n) \rightarrow 0, \quad (ii) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n EX_{nk} \rightarrow 0, \quad (iii) \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sigma^2 X_{nk} \rightarrow 0.$$

In a sharpened version, (iii) was replaced by

$$(iii') \quad \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n EX_{nk}^2 \rightarrow 0.$$

The author gives an example of independent random variables X_1, X_2, \dots for which conditions (i), (ii), (iii) are verified and

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n EX_{nk}^2 \not\rightarrow 0.$$

Namely, X_1, X_2, \dots are defined by $P(X_1 = 0) = 1$ and $P(X_k = (-1)^k k^{5/2}) = k^{-2}$, $P(X_k = (-1)^{k+1} k^{1/2} (1 - k^{-2})^{-1}) = 1 - k^{-2}$, if $k \geq 2$, where $EX_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$. R. Theodorescu.

Nagaev, S. V.: Some limit theorems for homogeneous Markoff chains. *Doklady Akad. Nauk. SSSR* 115, 237—239 (1957) [Russisch].

Nagaev, S. V.: Some limit theorems for stationary Markov chains. *Teor. Veroyatn. Primen.* 2, 389—416, engl. Zusammenfassung 416 (1958) [Russisch].

The results of the present paper were announced by the author in preceding note. Let X be a space of ξ -points, F_X a σ -algebra of its subsets and $p(\xi, A)$, $\xi \in X$, $A \in F_X$, a stochastic transition function, $p^{(n)}(\xi, A) = \int_A p^{(n-1)}(\eta, A) p(\xi, d\eta)$. If $\pi(\cdot)$ is the initial distribution, denote by $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ the sequence of random variables forming a Markov chain, defined by $p(\cdot, \cdot)$. Suppose now that $f(\xi)$ is a real F_X -measurable function defined on X . Chapter I, Some properties of the characteristic functions, deals with the asymptotic behaviour of the characteristic function of $\sum_{i=1}^n f(x_i)$. In Chapter II, Limit theorems, it is assumed that there is an integer

$k \geq 1$ such that

$$(*) \quad \sup_{\xi, \eta, A} |p^{(k)}(\xi, A) - p^{(k)}(\eta, A)| < 1, \quad \xi, \eta \in X, \quad A \in \mathcal{F}_X.$$

Firstly, the general form of the limit distributions is considered; it is proved that the sequence of distribution functions $F_n(x)$ corresponding to the sums

$$S_n = \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^n f(x_i) - A_n,$$

where A_n and $B_n > 0$ are constants, converges to stable laws and if the law to which $F_n(x)$ converges is of characteristic exponent α , then $B_n = n^{1/\alpha} h(n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} h(kn)/h(n) = 1$ for any integer $k > 0$. Concerning the central limit theorem,

it is proved that if $\int_X |f(\eta)|^2 p(d\eta) < \infty$ and

$$(**) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(f(x_i) - \int_X f(\eta) p(d\eta) \right) \right]^2 = \sigma^2 > 0,$$

then for any initial distribution

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(f(x_i) - \int_X f(\eta) p(d\eta) \right) < x \right\} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2\sigma^2} du,$$

where $p(\cdot)$ is a stationary absolute probability distribution, corresponding to $p(\cdot, \cdot)$. Sufficient conditions for the convergence to stable laws, differing of the normal law are also given in Chapter II. In Chapter III a local limit theorem and asymptotic expansions are considered. It is assumed that X is a denumerable set of points ξ_i , condition (*) holds true for $k = 1$, and all states ξ_i are essential and form a positive class. Suppose that $f(\xi_i) = a + k_i h$, $h > 0$, where k_i are integers and a an arbitrary real number; if the greatest common divisor of k_i is equal to 1, $\sum_{i=1}^{\infty} f^2(\xi_i) p_i < \infty$ and $\sigma > 0$, where p_i are the final probabilities and σ has an analogous signification as (**), then uniformly relative to s

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sigma \sqrt{n}}{h} \mathcal{P}_{\pi n}(s) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z_n s^2/2} \right) = 0,$$

$\mathcal{P}_{\pi n}(s) = \Pr \left(\sum_{i=1}^n f(x_i) = a n + s h \right)$, with initial distribution $\pi_i = \pi(\xi_i)$ and $\sigma \sqrt{n} z_n s = a(n+1) + s h - (n+1) \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i) p_i$. In the last part asymptotic expansions are considered; under certain conditions, it is shown that

$$F_{n\pi}(x) - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \sum_{s=1}^{k-2} \frac{Q_s \pi(x)}{(\sqrt{n})^s} + o \left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{k-2}} \right),$$

where $F_{n\pi}(x)$ is the distribution function of $\frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ for the initial distribution

$$\pi(\cdot) \quad \text{and} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

R. Theodorescu.

Bellman, Richard: On a generalization of the fundamental identity of Wald. Proc. Cambridge philos. Soc. **53**, 257—259 (1957).

Es sei $\{z_i\}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit identischer Verteilungsfunktion $F(z)$ und $S_n = z_1 + \dots + z_n$. Es bestehe noch eine „Stop-Regel“, die den so definierten Prozeß nach n Schritten unterbricht. n ist dann selbst eine Zufallsvariable. Unter gewissen Nebenbedingungen über $F(z)$ besteht dann die Identität von Wald $E \{ \Phi(t) \cdot n \exp(S_n t) \} = 1$ für $t \geq 0$, worin $\Phi(t)$ die ch. F. zu $F(z)$ bedeutet. — Es wird nun der Fall untersucht, in dem die z_i nicht mehr unabhängig sind. Es sei $dG(z, x)$ die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte für z_{k+1} mit

der Annahme $z_k = x$. dG hänge von k nicht ab, die Variable z_{k+1} nicht von z_i , $i < k$. Für diesen Markoffschen Fall läßt sich dann eine der obigen Identität entsprechende angeben. Andere Identitäten werden gewonnen, wenn statt $\exp(S_n t)$ die Produkte $\prod_{k=1}^n (z_k + c)$, c konstant, gewählt werden. Beweise und noch erforderliche Nebenbedingungen für $dG(z, x)$ sind nicht mitgeteilt. *F. Wever.*

Bass, Jean et Jean-Paul Bertrandias: Moyennes de sommes trigonométriques et fonctions d'autocorrélation. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 2457—2459 (1957).

Ausgehend vom Studium der Funktionen der Klasse A (siehe J. Bass, dies. Zbl. **77**, 333) werden sehr einfache Beweise für einige Sätze von van der Corput (dies. Zbl. **1**, 201) angegeben. Zum Schluß werden weitere Beispiele von Funktionen der Klasse A aufgezählt. *W. Richter.*

Baxter, Glen and M. D. Donsker: On the distribution of the supremum functional for processes with stationary independent increments. Trans. Amer. math. Soc. **85**, 73—87 (1957).

Sei $\{x(t), 0 \leq t < \infty\}$ ein separierbarer, stochastischer Prozeß mit stationären unabhängigen „increments“. Ein solcher Prozeß kann dargestellt werden durch $E\{e^{i\lambda x(T)}\} = e^{T\psi(\lambda)}$, $0 < T < \infty$, wobei $e^{\psi(\lambda)}$ die Lévy-Kintchinesche Darstellung der charakteristischen Funktion einer ∞ teilbaren Verteilung bedeutet. Die Verff. geben eine Darstellung für die doppelte L -Transformierte der Verteilungsfunktion $\sigma(\alpha, T)$ des Funktional $W\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} x(t) < \alpha\right\} = \sigma(\alpha, T)$ (Bekannter Spezialfall.

Wienerprozeß).

W. Saxon.

Dobrušin (Dobrushin), R. L.: An example of a countable homogeneous Markov process all states of which are instantaneous. Teor. Verojatn. Primen. **1**, 481—485, engl. Zusammenfassg. 485 (1957) [Russisch].

Es liege ein homogener Markoffscher Prozeß mit abzählbar vielen Zuständen vor. vorgegeben durch (in $t = 0$ rechtsseitig stetige) Übergangswahrscheinlichkeiten $p_i^j(t)$, $0 \leq t < \infty$; $i, j = 1, 2, \dots$. Bekanntlich existieren dann die Ableitungen $a_i = \lim_{t \rightarrow 0} (1 - p_i^i(t))/t$. P. Lévy behauptete (dies. Zbl. **44**, 338), daß es keinen Prozeß geben kann, in dem alle Zustände momentan, d. h. in dem alle $a_i = \infty$ sind. Verff. konstruiert hingegen einen solchen Prozeß durch Grenzübergang, ausgehend von Markoffschen Ketten mit endlich vielen Zuständen. Unabhängig vom Verf. gaben W. Feller und McKean Henry (dies. Zbl. **72**, 353) ein solches Gegenbeispiel an, benutzen dabei aber eine andere Methode. *W. Richter.*

Ramakrishnan, Alladi: Ergodic properties of some simple stochastic processes. Z. angew. Math. Mech. **37**, 336—344 (1957).

Ein physikalisches System sei endlich vieler Zustände S_j fähig; die Übergänge zwischen denselben seien durch einen kontinuierlichen Markoffschen Prozeß beschrieben, dessen Übergangsmatrix $\lim_{t \rightarrow \infty} P(j|i; t) = P(j)$ und $P(j|i; t) > 0$ erfülle. Sei $x(j|i; t)$ die mittlere Verweilzeit in j während $(0, t)$, falls i der Anfangszustand war. Diese Zufallsvariable konvergiert dann für $t \rightarrow \infty$ stochastisch gegen $P(j)$ (in Wahrheit konvergiert sie sogar fast überall, sowie im Mittel, wobei das invariante Maß zugrunde zu legen ist; vgl. Doob, Stochastic Processes, dies. Zbl. **53**, 258). Verff. gibt unter Benützung bekannter Sätze einen für das physikalische Verständnis sicherlich sehr hilfreichen Zugang zu der genannten Aussage. *K. Jacobs.*

Darling, D. A. and M. Kac: On occupation times for Markoff processes. Trans. Amer. math. Soc. **84**, 444—458 (1957).

$x(t)$ étant un processus de Markoff homogène et $V(x)$ étant une certaine fonction non négative de x , on se propose d'étudier la loi de probabilité limite de la variable aléatoire $y(t) = \frac{1}{u(t)} \int_0^t V[x(\tau)] d\tau$ quand $t \rightarrow \infty$, où $u(t)$ est une certaine fonction

de t convenablement choisie. On montre que si certaines conditions, sur V et sur la transformée de la Laplace des probabilités de passage, sont réalisées alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr[y(t) < x] = g_\alpha(x) \text{ où } g_\alpha(x) = \frac{1}{\pi \alpha} \int_0^x \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j!} \sin(\pi \alpha j) \Gamma(\alpha j + 1) y^{j-1} dy$$

est une distribution de Mittag-Leffler. (Dans le cas particulier où $V(x)$ est la fonction

caractéristique d'un certain ensemble A , $\int_0^t V[x(\tau)] d\tau$ est la durée d'occupation

de A). La méthode de démonstration est aussi applicable aux chaînes discrètes de Markov et en particulier aux sommes de variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité. On peut aussi étudier par cette méthode le nombre de changements de signes dans la suite des sommes partielles.

R. Feron.

Moyal, J. E.: Discontinuous Markoff processes. Acta math. 98, 221—264 (1957).

Let a probabilized field $\{\Omega, F, P\}$ be considered. Each system is represented by a point ω belonging to Ω . A Markoff process of the system is discontinuous if the change of states is made by „jumps“. This intuitive definition was mathematically precised by the author, in a way which seems to be most complete, as follows: A discontinuous Markoff process is specified by two given functions $\chi_0(X, t|x_0, t_0)$ and $\psi(X, t|x_0, t_0)$. Its transition probability $\chi(X, t|x_0, t_0)$ satisfies the Chapman-Kolmogoroff equation, the limit conditions, the known completeness conditions and at last the integral equation

$$\chi(X, t|x_0, t_0) = \chi_0(X, t|x_0, t_0) + \int_{\Omega \times (t_0, t)} \chi(X, t|\xi, \tau) \psi(d\xi, d\tau|x_0, t_0)$$

used previously by Doob and others. Giving χ_0 and ψ the author examines the existence, the uniqueness and some characteristic properties of the solution χ of the foregoing equation, with or without completeness. At first the author makes conspicuous, in the general frame of discontinuous processes, the step processes (Doob and others), obtained when $\chi_0(X, t|x_0, t_0) = \kappa_0(t|x_0, t_0) \delta(X|x_0)$ (where the member-two functions have easily identifiable properties), then the q -processes for which a jump-rate $q(x, t)$ of Feller's type are defined. After constructing the Markoff chain $\{\psi_n(S(x, t))\}$ of the n -jump-rate and of the consecutive distribution, then the distribution $\chi_n(X, t|x_0, t_0)$ concerning n -jumps, the solution of the problem is given by the series $\sum \chi_n$. Some other supplementary conditions are asserting the uniqueness and completeness of this solution. The author gives the greatest attention to the incomplete but important problem, which could be regular, but is in general unstable and studies its ergodic aspects. A set of examples is illustrating clearly the most important aims of this paper.

O. Onicescu.

Jacobs, Konrad: Zur Theorie der Markoffschen Prozesse. Math. Ann. 133, 375—399 (1957).

Soient Ω un ensemble, \mathfrak{B} un corps borélien de parties de Ω , \mathfrak{S} l'espace de Banach des mesures bornées définies sur \mathfrak{B} . Un noyau $(E, \omega) \rightarrow p(E, \omega)$ ($E \in \mathfrak{B}$, $\omega \in \Omega$) bien choisi définit un processus de Markoff, donc un opérateur linéaire continu dans \mathfrak{S} . On considère un demi-groupe abélien \mathfrak{G} de tels opérateurs, vérifiant l'hypothèse suivante: (S) L'adhérence $\bar{\mathfrak{G}}$ de \mathfrak{G} pour la topologie de la convergence simple faible contient une transformation faiblement compacte. Disons qu'un $x \in \mathfrak{S}$ est un vecteur de fuite (resp. un vecteur réversible) si l'adhérence faible $\bar{\mathfrak{G}}(x)$ de $\mathfrak{G}x$ contient 0 [resp. si $\mathfrak{G}(y) = \mathfrak{G}(x)$ pour tout $y \in \mathfrak{G}(x)$]. Soient \mathfrak{F} et \mathfrak{R} les ensembles des vecteurs de fuite et des vecteurs réversibles. Alors, \mathfrak{F} et \mathfrak{R} sont deux sous-espaces vectoriels fermés de \mathfrak{S} dont \mathfrak{S} est somme directe topologique; \mathfrak{R} est de dimension finie; \mathfrak{G} et $\bar{\mathfrak{G}}$ induisent dans \mathfrak{R} le même groupe fini. La démonstration utilise, entre autres choses, le théorème de Krein-Milman et le théorème de compacité faible d'Eberlein. On montre ensuite que l'hypothèse (S) (et même une condition beaucoup plus stricte) est conséquence de l'hypothèse suivante (utilisée par d'autres AA.): il existe: 1. un

élément $x_0 \in \mathfrak{S}^+$ avec $x_0(\Omega) = 1$; 2. deux nombres réels $\eta > 0$, $0 < \theta < 1$; 3. un noyau p définissant un élément de \mathfrak{G} — tels que les conditions $E \in \mathfrak{B}$, $x_0(E) \leq \eta$ entraînent $p(E, \omega) \leq \theta$ pour tout $\omega \in \Omega$. J. Dixmier.

Jacobs, Konrad: Fastperiodische diskrete Markoffsche Prozesse von endlicher Dimension. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **21**, 194—246 (1957).

L'A. appelle processus une suite $T(1), T(2), \dots$ de transformations linéaires de l'espace R^n à n dimensions. Si $T(t)$ est constant (resp. périodique, presque-périodique), le processus est dit stationnaire (resp. périodique, presque-périodique). Si les $T(t)$ conservent R_+^n et l'ensemble V des $x = (x_1, \dots, x_n) \geq 0$ pour lesquels $x_1 + \dots + x_n = 1$, on dit qu'on a un processus de Markoff. Posons $T(s, t) = T(s) \cdot T(s-1) \cdot \dots \cdot T(t+1)$. On s'intéresse au comportement asymptotique de $T(t, 0)$ quand $t \rightarrow +\infty$. Chapitre I: l'A. retrouve géométriquement les résultats classiques concernant le cas d'un processus de Markoff stationnaire, en étudiant les points extrémaux de $\bigcap_{t=1}^{\infty} T(t) V$ (qui est un simplexe), ou par la considération, dans le

dual de R^n , des vecteurs réversibles et des vecteurs de fuite (cf. revue précédente). Chapitre II: rappel de résultats connus sur les suites presque-périodiques. Chapitre III: si $t \rightarrow T(t)$ est un processus périodique avec $\|T(t, 0)\|$ borné, la suite des $T(t, 0)$ est asymptotiquement presque-périodique, et même asymptotiquement périodique si le processus est markovien. Si $t \rightarrow T(t)$ est un processus presque-périodique avec $\|T(t, 0)\|$ borné, un exemple très simple prouve que $t \rightarrow T(t, 0)$ n'est pas toujours asymptotiquement presque-périodique, ce qui donne du prix aux résultats suivants. [Erratum: p. 213, l. 12, poser $T(t) = T'$ au lieu de $T(t) = T$.] Les chapitres IV et V, qui sont la partie essentielle du mémoire, ont pour but de prouver que: si un processus de Markoff $t \rightarrow T(t)$ est presque-périodique, la suite $t \rightarrow T(t, 0)$ est asymptotiquement presque-périodique. L'A. donne deux méthodes géométriques, l'une qui raisonne dans R^n , l'autre dans son dual. Nous esquissons seulement quelques-unes des idées utilisées dans la 1^{re} méthode. L'espace R^n est normé par $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_n|$. Si $A \subset R^n$ et $B \subset R^n$, on pose $\|A, B\| = \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|b - a\|$. On dit qu'un polyèdre convexe de points extrémaux h_1, \dots, h_s a la largeur α si $\|h_\sigma - h_\tau\| \geq \alpha$ pour $\sigma \neq \tau$. Soit r un entier $\leq n$. Pour tout ε ($0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$), il existe un $\delta(\varepsilon)$ ($0 < \delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$) avec les propriétés suivantes: soit V_0 un polyèdre convexe à r sommets contenu dans V , de largeur $2 - \delta(\varepsilon)$; alors les sommets de V_0 sont linéairement indépendants; si V_1 est un autre r -simplexe contenu dans V de largeur $2 - \delta(\varepsilon)$ tel que $\|V_0, V_1\| < \delta(\varepsilon)$, alors on a $\|V_1, V_0\| < \varepsilon$, et, en numérotant convenablement les sommets g_i (resp. h_i) de V_0 (resp. V_1), on a $\|g_\sigma - h_\sigma\| < \varepsilon$, $\|g_\sigma - h_\tau\| > 2 - \varepsilon$ pour $\sigma \neq \tau$. J. Dixmier.

Theodorescu, Radu: Stochastische kontinuierliche Prozesse mit vollkommenen Verbindungen. Math. Nachr. **16**, 79—84 (1957).

Verf. definiert einen kontinuierlichen Prozeß mit vollkommenen Verbindungen der Klasse A durch die Wahrscheinlichkeit $P(s, x; t, X)$, die das Integro-differentialsystem (I) $\frac{dP(t, X)}{dt} = \int_E P(t, dz) Q(t, z, X | P(t, Y))$ verifiziert, wobei Q hinsichtlich Y (d. h. bei festem t) als Funktional in $P(t, Y)$ zu betrachten ist. Unter gewissen naturgemäßen Bedingungen über Q prüft Verf. die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung, die eine Wahrscheinlichkeit ist, und die dem kontinuierlichen Prozeß entspricht. Es wird gezeigt, wie man diesem Prozeß einen tangentialen Markoffschen Prozeß assoziieren kann, mit dessen Hilfe die konjugierten Verteilungen des Prozesses ausgedrückt werden können. O. Onicescu.

Gel'fand, I. M. und A. M. Jaglom: Über die Berechnung der Größe der Information über eine Zufallsfunktion, die in einer anderen solchen Funktion enthalten ist. Uspechi mat. Nauk **12**, Nr. 1 (73), 3—52 (1957) [Russisch].

The paper is divided into two chapters. Chapter I, A general definition of information, has 2 sections. § 1 deals with the information about a random vector, contained in another random vector. Let ξ and η be two random variables, taking a finite number of values x_1, x_2, \dots, x_n and y_1, y_2, \dots, y_m respectively, with the corresponding probabilities $P_\xi(i) = P(\xi = x_i)$ and $P_\eta(j) = P(\eta = y_j)$. Denote by $P_{\xi\eta}(i, k)$ the joint probability $P(\xi = x_i, \eta = y_k)$; by definition, the amount of information relative to the random variable ξ , contained in the random variable η is the symmetrical expression in ξ and η

$$J(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m P_{\xi\eta}(i, k) \log \frac{P_{\xi\eta}(i, k)}{P_\xi(i) P_\eta(k)} \geq 0.$$

Consider now any two real-valued random real variables and let us divide the ranges of ξ and η into a finite number of disjunct (finite, infinite, closed, open, semiclosed) intervals $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ and $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_m$, respectively. The discrete random variables $\xi(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$ and $\eta(\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_m)$ are defined as follows: their values are equal to the subscript of that interval Δ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) and Δ'_k ($k = 1, 2, \dots, m$), respectively, in which enters the value of ξ and η , respectively. Since the quantity $J[\xi(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n), \eta(\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_m)]$ was already defined, the amount of information $J(\xi, \eta)$ is given by

$$J(\xi, \eta) = \sup J[\xi(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n), \eta(\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_m)],$$

where sup is taken over all possible finite partitions of the ranges of ξ and η . This definition is then extended to vector valued random variables $\vec{\xi} = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ and $\vec{\eta} = \{\eta_1, \dots, \eta_l\}$ and some properties of $J(\xi, \eta)$ are discussed. It is proved that $J(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ is finite if $P_{\vec{\xi}\vec{\eta}}$ is absolutely continuous relative to $P_{\vec{\xi}}$, $P_{\vec{\eta}}$ and has the expression

$$J(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \int \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \log \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dP_{\vec{\xi}}(\mathbf{x}) dP_{\vec{\eta}}(\mathbf{y}),$$

with

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = dP_{\vec{\xi}\vec{\eta}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) / dP_{\vec{\xi}}(\mathbf{x}) dP_{\vec{\eta}}(\mathbf{y}).$$

§ 2 is concerned with the information about a random function, contained in another random function. Let Φ be a space of fundamental functions φ and denote by $\xi(\varphi)$ a generalized random process as defined by I. M. Gel'fand [Doklady Akad. Nauk SSSR 100, 853—856 (1955)]. By definition, for two arbitrary generalized random processes $\xi(\varphi)$ and $\eta(\psi)$ defined on Φ and Ψ , respectively, the amount of information relative to one of these processes, contained in the other one, is

$$J(\xi, \eta) = \sup J[\vec{\xi}(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \vec{\eta}(\psi_1, \dots, \psi_m)],$$

where $\vec{\xi}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \{\xi(\varphi_1), \dots, \xi(\varphi_n)\}$ and $\vec{\eta}(\psi_1, \dots, \psi_m) = \{\eta(\psi_1), \dots, \eta(\psi_m)\}$ are n - and m -dimensional random vectors, respectively, and sup is taken over all integers n and m and over all families of functions $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi$ and $\psi_1, \dots, \psi_m \in \Psi$. As properties, we mention: (A) $0 \leq J(\xi, \eta) \leq \infty$, and $J(\xi, \eta) = 0$ if and only if ξ and η are independent generalized processes; (B) if the sequence of pairs of generalized processes $\{\xi_k, \eta_k\}$ converges to the pair $\{\xi, \eta\}$ in the sense that for any n, m , $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi$ and $\psi_1, \dots, \psi_m \in \Psi$ the $(n+m)$ -dimensional distribution function of $\{\xi_k(\varphi_1), \dots, \xi_k(\varphi_n), \eta_k(\psi_1), \dots, \eta_k(\psi_m)\}$ is weakly convergent as $n \rightarrow \infty$ to the distribution function of $\{\xi(\varphi_1), \dots, \xi(\varphi_n), \eta(\psi_1), \dots, \eta(\psi_m)\}$, then $\lim_{k \rightarrow \infty} J(\xi_k, \eta_k) \geq J(\xi, \eta)$; (C) if A be a

continuous linear transformation defined on Φ and if for a generalized random process $\xi(\varphi)$, $A\xi$ is defined as $(A\xi)(\varphi) = \xi(A\varphi)$, then for any generalized process $\eta(\psi)$, $J(\xi, \eta) \geq J(A\xi, \eta)$; if A is invertible in Φ , then $J(\xi, \eta) = J(A\xi, \eta)$. — Chapter II is concerned with the calculation of the amount of information for Gaussian random functions. For two non-degenerated Gaussian random vectors $\vec{\xi} = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$

and $\vec{\eta} = \{\eta_1, \dots, \eta_l\}$, $J(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ has the expression

$$J(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{1}{2} \log (\det A \cdot \det B / \det C),$$

where $A = \|\mathbf{M} \xi_i \xi_j\|$, $B = \|\mathbf{M} \eta_i \eta_j\|$, $D = \|\mathbf{M} \xi_i \eta_j\|$, $C = \begin{bmatrix} A & D \\ D & B \end{bmatrix}$. Let now $\{\xi(\varphi), \eta(\psi)\}$, $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ be a pair of Gaussian generalized random processes, $\xi(\Phi)$ and $\eta(\Psi)$ the subspace of the space \mathfrak{H} of random variables of finite dispersion, spanned by $\xi(\varphi)$ and $\eta(\psi)$ respectively, and let P_1 and P_2 denote, respectively, the projections in \mathfrak{H} on $\xi(\Phi)$ and $\eta(\Psi)$, $B_1 = P_1 P_2 P_1$, $B_2 = P_2 P_1 P_2$; $J(\xi, \eta)$ is finite, if and only if at least one of B_1 , B_2 is a completely continuous operator with finite trace, and

$$J\{\xi(\varphi), \eta(\psi)\} = -\frac{1}{2} \log \det (E - B_1) = -\frac{1}{2} \log \det (E - B_2),$$

where E is the identity operator (here \det means the product of all proper values). In the last section several examples are considered and for every case the amount of information is calculated: a) the information contained in a random process about a random variable; b) the information about a stationary random process, contained in another process of the same type, stationarily related with the first one; c) the information contained in a stationary random process defined on a finite interval, relative to another stationary process defined on the same interval; d) the information about a stationary random process defined on a finite interval, contained in the sum of this process with the white noise. *R. Theodorescu.*

Parasjuk (Parasiouk), O. S.: Sur le problème de la filtration des processus stationnaires généralisés. Ukrain. mat. Žurn. 9, 210—214, français. Zusammenfassg. 214 (1957) [Russisch].

Consider a dynamical system with transmission function $k(t)$ under the influence of the accidental force $\varphi(t) = m(t) + n(t)$, where $m(t)$ is a stationary random process and the noise $n(t)$ a generalized stationary random process as defined by I. M. Gel'fand (this Zbl. 64, 111). Suppose now that the signal to be reproduced $h(t)$ is of the same type as $m(t)$. Using the generalized problem of Riemann-Hilbert, the function $k(t)$ is determined such that: (i) the signal at the receiving terminal $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau) k(\tau) d\tau$ is a stationary random process and (ii) the mean square deviation $\varepsilon^2 = M[h(t) - x(t)]^2$ is minimum. *R. Theodorescu.*

Pinsker, M. S.: Extrapolation of homogeneous random fields and the quantity of information on a gaussian random field contained in another gaussian random field. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 815—818 (1957) [Russisch].

Let $\xi(t) = \xi(t_1, \dots, t_n)$ be an n -dimensional homogeneous random field [see A. M. Jaglom, Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 5 (51), 3—168 (1952)]; the random field is discrete or continuous if t_1, \dots, t_n are respectively integer-valued or continuous parameters. Let $\xi_m = \xi_{m_1, \dots, m_n}$ be a discrete random field and $\xi_{s_1, m_2, \dots, m_n}^{(1)} = \xi_{s_1, m_1, \dots, m_n} - P_{H_{s_1}} \xi_{s_1, m_2, \dots, m_n}$, where H_{s_1} is the closed linear subspace generated by the random variables $\xi_{m_1, m_2, \dots, m_n}$; $m_1 > s_1$; $-\infty < m_2, \dots, m_n < \infty$ and $P_{H_{s_1}}$ the projection on H_{s_1} . For $n = 1$ the usual definitions of regularity, non-singularity and singularity are considered [see A. N. Kolmogorov, Bull. Moskov. Gos. Univ. Mat. 2, 40 p. (1941); Tsian Tse-pei, Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 207—210 (1957)]; by induction for $n > 1$ an homogeneous random field $\xi_m = \xi_{m_1, \dots, m_n}$ is regular (respectively non-singular), if it is regular (non-singular) with respect to m_1 and $\xi_{1, m_2, \dots, m_n}^{(1)}$ is an $(n-1)$ -dimensional homogeneous regular (non-singular) random field. ξ_m is singular, if ξ_m is singular with respect to m_1 or $\xi_{1, m_2, \dots, m_n}^{(1)}$ is an $(n-1)$ -dimensional homogeneous singular random field. Theorems concerning the decomposition of an homogeneous non-singular random field into a sum of a regular and a singular homogeneous random field, the representation of an homogeneous regular random field, necessary and sufficient conditions for regularity and non-

singularity are given. The quantity

$$\sigma_{\xi\xi}^2 = \lim_{l \rightarrow \infty} \inf_{a_{m_1, m_2, \dots, m_n}} M|\xi_{0,0,\dots,0} - \sum_{m_1=1}^l \sum_{m_2, \dots, m_n=-l}^l a_{m_1, m_2, \dots, m_n} \xi_{m_1, m_2, \dots, m_n} - \sum_{m_2=1}^l \sum_{m_3, \dots, m_n=-l}^l a_{0, m_2, \dots, m_n} \xi_{0, m_2, \dots, m_n} - \dots - \sum_{m_n=1}^l a_{0,0,\dots, m_n} \xi_{0,0,\dots, m_n}|^2$$

is also considered; it is shown that if ξ_m is a regular or non-singular homogeneous random field, then

$$\sigma_{\xi\xi}^2 = (2\pi)^n \exp \left\{ \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \log f_{\xi\xi}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n \right\},$$

where $f_{\xi\xi}$ is the spectral density. Suppose now that ξ_m and η_m are two discrete Gaussian homogeneous and homogeneously-related random fields and at least one of them is non-singular; under these conditions, the amount of information per unit volume, contained in one of these random fields, relative to the other, is given by

$$(*) I(\{\xi_m\}; \{\eta_m\}) = \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{f_{\xi\xi}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) f_{\eta\eta}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}{f_{\xi\xi}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) f_{\eta\eta}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) - |f_{\xi\eta}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)|^2} d\lambda_1 \dots d\lambda_n,$$

where the integrand is zero for $f_{\xi\xi}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) f_{\eta\eta}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$; $f_{\xi\xi}$, $f_{\eta\eta}$ and $f_{\xi\eta}$ are respectively the spectral densities and the joint spectral density of ξ_m , η_m . Moreover an analogous of (*) is given for the continuous case [see the author's paper published in *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 99, 213—216 (1954)]. *R. Theodorescu*.

Brillouin, L.: *Mathematics, Physics, and information.* (An editorial.) *Inform. and Control* 1, 1—5 (1957).

Herdan, Gustav: An inequality relation between Yule's characteristic K and Shannon's entropy H . *Z. angew. Math. Phys.* 9, 69—73 (1958).

Wolfowitz, J.: The coding of messages subject to chance errors. *Illinois J. Math.* 1, 591—606 (1957).

New simple proofs for some theorems concerning information and communication theory are given. The following result, stated for general memory m by Shannon [Bell System Tech. J. 27, 379—423, 623—656 (1948)], is also proved: let $m = 0$, and let λ , $1 > \lambda > 0$, be any given number; there exists a $K' > 0$ such that, for any n , any code with the property that the probability of transmitting any word incorrectly is $< \lambda$, cannot have a length greater than $2^{nC_0 + K'n^{1/2}}$, where C_0 is the capacity of the channel. *R. Theodorescu*.

Doig, Alison: A bibliography on the theory of queues. *Biometrika* 44, 490—514 (1957).

Die Bibliographie umfaßt 24 Seiten; die Arbeiten sind nach Autoren alphabetisch geordnet und durch beigefügte Kennbuchstaben nach verschiedenen Gesichtspunkten klassifiziert.

Doob, J. L.: Brownian motion on a Green space. *Teor. Verojatn. Primen.* 2, 3—33, russ. Zusammenfassg. 33 (1956).

L'A. étend au mouvement brownien dans un espace de Green les principales propriétés du mouvement brownien dans R^n . Pour y parvenir il est amené à généraliser la définition classique des processus stochastiques et à définir des processus à durée de vie non constante. Un tel processus $x(t)$ est pour tout nombre $t \geq 0$ une variable aléatoire (à valeurs dans un certain espace de Hausdorff, séparable, localement compact R) dont la valeur est définie pour tout $t < \tau(\omega)$ et déterminée par la donnée d'un point ω de Ω . Il est aisé d'étendre à de tels processus la notion de processus de Markov et de définir des „probabilités de passages stationnaires“. L'A. s'intéresse plus particulièrement au cas où l'espace R est un espace de Green (au sens de Brelot et Choquet) et appelle mouvement brownien dans R un processus de Markov qui est localement un mouvement brownien à n dimensions. Il montre que les espaces de Green sont les espaces naturels pour l'étude du mouvement brownien, car dans la plupart des discussions le caractère de la frontière n'intervient pas. Cette

remarque permet notamment de donner une solution probabiliste simple au problème de Dirichlet. Au cours de l'étude, l'A. est amené à étudier les processus stochastiques déduits de l'équation de la chaleur sur un „espace de chaleur“ (produit direct de l'espace de Green par la droite réelle).
R. Feron.

Lévy, Paul: Brownian motion depending on n parameters: The particular case $n = 5$. Proc. Sympos. appl. Math. 7, 1—20 (1957).

Diese Arbeit bringt Beweise und Ergänzungen für die früher vom Verf. angeführten Ergebnisse (dies. Zbl. 56, 126; 362; 64, 133) über die 5-dimensionale Brownsche Bewegung, insbesondere über deren Mittelwerte $M(t)$ auf konzentrischen Kugeln vom Radius t . Methodisch wird eine Betrachtung über einen einfacheren Gaußschen Prozeß vorangestellt, dessen Differenzierbarkeitseigenschaften, Repräsentativeigenschaften und Fortsetzungseigenschaften ähnlich denen von $M(t)$ sind.
D. Morgenstern.

Takács, L.: On some probability problems concerning the theory of counters. Acta math. Sci. Hungar. 8, 127—138 (1957).

The author considers the following model. Particles arrive at a counter according to a differential process. A particle arriving at the counter starts an impulse with probability one if no impulse is in progress and with probability p if an impulse is in progress. The durations of the impulses are identically and independently distributed with cumulative distribution $H(x)$. The author considers the sequence of arrivals taking place when no impulse is in progress. Denoting by V_t the number of such arrivals and by $P(t)$ the probability that no impulse is in progress at time t he investigates the asymptotic behavior of V_t and $P(t)$. The author further considers a system of independent counters. The system is said to be in the state E_k at time t if at this instant k impulses are in progress. A transition from the state E_{k-1} to the state E_k is called a k fold chance coincidence and the author determines the asymptotic density of k fold chance coincidences.
H. B. Mann.

Bender, Peter L.: Diffusion of particles with memory. Proc. nat. Acad. Sci. USA 43, 412—416 (1957).

Das folgende wichtige Absorptionsproblem wird behandelt: Ein von x_0 ausgehendes Teilchen führe eine Brownsche Bewegung bis zur Absorption durch die Begrenzung des Bereiches R aus. Was kann man über die Verweilzeit des Teilchens in einem Teilbereich $S \subset R$ aussagen? In Ausdehnung und Übertragung von Untersuchungen von M. Kac, s. dies. Zbl. 45, 70 und D. Ray, s. dies. Zbl. 58, 329 wird gezeigt, daß die Verteilung dieser Verweilzeit sich so ausdrückt:

$$P(T \leq t) = 1 - \sum_1^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t}.$$

Dabei ist

$$c_n = -\lambda_n \int_S \psi_n(x) dx \int_S K(x_0, y) \psi(y) dy$$

und ψ_n und λ_n sind die Eigenfunktionen bzw. Eigenwerte der Integralgleichung

$$\psi(x) + \lambda \int_S K(x, y) \psi(y) dy = 0,$$

in der $K(x, y)$ die Greensche Funktion für das Gebiet R und Randwerte 0 bedeutet.
D. Morgenstern.

Čerkašov, I. D.: Über die Kolmogorovschen Gleichungen. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 5 (77), 237—244 (1957) [Russisch].

Consider the system of Kolmogorov's equations

$$(P) \quad \begin{cases} \partial f(s, x, \xi) / \partial s = a(x) \partial^2 f(s, x, \xi) / \partial x^2 + b(x) \partial f(s, x, \xi) / \partial x, \\ \partial f(s, x, \xi) / \partial s = \partial^2 a(\xi) f(s, x, \xi) / \partial \xi^2 - \partial b(\xi) f(s, x, \xi) / \partial \xi \end{cases}$$

and suppose that (i) $a(x) > 0$, $1/a(x)$, $b(x) - \frac{1}{2} a'(x)$, $b'(x) - \frac{1}{2} a''(x)$ are bounded functions for $x \in (-\infty, \infty)$; (ii) for any real x , $a''(x)$ and $b'(x)$ exist and are continuous

functions. Under these conditions, it is proved that there is a unique solution $f(s, x, \xi)$ of (P) ($s > 0$), representing simultaneously the solution of the so called problem K:

$$\begin{aligned} f(s, x, \xi) &\geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(s, x, \xi) d\xi = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(s-t, x, y) f(t, y, \xi) dx = f(s, x, \xi), \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_{|\xi-x| > \delta} f(s, x, \xi) d\xi &= 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \int_{|\xi-x| < \delta} f(s, x, \xi) d\xi = 1, \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_{|s-x| < \delta} (\xi-x) f(s, x, \xi) d\xi &= b(x), \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_{|\xi-x| < \delta} (\xi-x)^2 f(s, x, \xi) d\xi = 2a(x). \end{aligned}$$

R. Theodorescu.

Longuet-Higgins, M. S.: Statistical properties of an isotropic random surface. *Philos. Trans. roy. Soc. London, Ser. A* **250**, 157—174 (1957).

Dans un travail récent (ce Zbl. **77**, 127), l'A. a étudié les propriétés statistiques d'une surface aléatoire en mouvement. Il étudie ici le cas particulier d'une surface statistiquement isotrope. Elle a pour équation

$$\zeta(x, y, t) = \sum_n c_n \cos(u_n x + v_n y + \sigma_n t + \varepsilon_n).$$

La distribution des (u_n, v_n) est supposée dense dans le plan, et on admet qu'il est possible de poser $\sum \frac{1}{2} c_n^2 = E(u, v) du dv$, la somme étant étendue aux valeurs de n telles que le point (u_n, v_n) appartienne au domaine $dudv$ contenant le point (u, v) . $E(u, v)$ est la fonction spectrale d'énergie. On la suppose fonction seulement de $w = \sqrt{u^2 + v^2}$. σ_n est une fonction de $\sqrt{u_n^2 + v_n^2}$. ε_n est une variable aléatoire uniformément répartie de 0 à 2π . L'A. montre alors comment les résultats généraux (référence ci-dessus) se particularisent dans le cas isotrope et il fait le calcul d'un certain nombre de paramètres statistiques attachés à la surface. Il termine en discutant la manière dont le spectre E est défini à partir de la connaissance d'un nombre limité de ses moments, et dont on peut le construire par superposition de spectres annulaires.

J. Bass.

Palmer, D. S.: The distribution of intervals between successive maxima in a series of random numbers. *Biometrika* **44**, 524—526 (1957).

Thatcher, A. R.: Studies in the history of probability and statistics. VI: A note on the early solutions of the problem of the duration of play. *Biometrika* **44**, 515—518 (1957).

Peck, J. E. L. and A. L. Dulmage: Games on a compact set. *Canadian J. Math.* **9**, 450—458 (1957).

Let \tilde{X} be a convex subset of a real linear space, and \tilde{Y} a convex set generated by a subset of a real linear space Y . Let $f(x, y)$ be a real function concave in $x \in \tilde{X}$ and convex in $y \in \tilde{Y}$. The author proves the following theorem: If \tilde{X} is compact in a topology, such that for every $y \in Y$, $f(x, y)$ is an upper semi-continuous function of x , then

$$\sup_{x \in \tilde{X}} \inf_{y \in \tilde{Y}} f(x, y) \geq \inf_{y \in \tilde{Y}} \sup_{x \in \tilde{X}} f(x, y).$$

If $Y = \tilde{Y}$, then equality holds. This has been observed before, see e. g. Theorem 5 by Pettis (this Zbl. **70**, 335), and Kuhn's review (*Math. Reviews* **14**, 301) of a theorem by Kneser (this Zbl. **46**, 122). The new theorem generalizes that by Kneser, and also one by Nikaidô (this Zbl. **51**, 85). Equality, with Y replaced by \tilde{Y} , holds also if $f(x, y)$ is linear in $y \in \tilde{Y}$. It is then shown that these results generalize Theorem 3 by Karlin (this Zbl. **41**, 256). The author's second theorem shows that by examining an associated game, it is possible to determine whether $\sup_{x \in \tilde{X}} \inf_{y \in \tilde{Y}} f(x, y) = \inf_{y \in \tilde{Y}} \sup_{x \in \tilde{X}} f(x, y)$. It is shown that these results generalize results

obtained by Choquet, Ville, Wald, and by Dulmage and Peck. Five most illuminating examples are given. *S. Vajda.*

Milnor, J. and L. S. Shapley: On games of survival. *Ann. Math. Studies* 39, 15—45 (1957).

A survival game consists of playing a succession of finite zero-sum matrix games with identical pay-off matrices. Let this matrix be (a_{ij}) , and let the players have initial resources r_0 and $R - r_0$. The successive resources of the first player are defined by the recurrence relation $r_k = r_{k-1} + a_{i_k j_k}$, where i_k and j_k are the respective (pure) strategies in the k -th play. — The game terminates if a player is ruined, and the pay-off for the survival game is 1 for the winner and 0 for the loser. If, however both players survive indefinitely, then the pay-off is $Q \geq 0$ (possibly a function of the course of plays) to the first, and $1 - Q \geq 0$ to the second player. — The following statements are proved: If Q is constant, and if the value of the survival game exists for all r_0 , then it is a monotone increasing function of r_0 and satisfies the functionalequation $\Phi(r) = \text{val}(\Phi(r + a_{ij}))$, $\Phi(r) = 0$ for $r \leq 0$, and $= 1$ for $r \geq R$. Even if Q is not constant, there exists at least one monotone solution of the functional equation. If it is unique, then the value of the survival game exists, and is independent of Q . Otherwise the value depends on Q , if it exists at all. — If (a_{ij}) is zero-free then the solution is unique, and optimal strategies exist for both players. If some $a_{ij} = 0$, then the existence of such strategies depends on properties of Q . *S. Vajda.*

Everett, H.: Recursive games. *Ann. Math. Studies* 39, 47—78 (1957).

A recursive game is a finite set of game elements I^k ($k = 1, \dots, n$), each of them having a pair of strategy spaces. To every pair of strategies in the k -th game there corresponds a (generalized) pay-off $p^k e^k + \sum_{j=1}^n q^{kj} I^j$ where p^k is the probability of a payment e^k from player B to player A and q^{kj} is the probability that instead of a payment I^j is next to be played. To each starting game element I^k and each pair of strategies χ and ψ there corresponds an expected pay-off $E_k(\chi, \psi)$ non-terminating plays having zero expectation. A recursive game is said to have a solution if there exist values (v_1, \dots, v_n) and for all $\varepsilon > 0$ there exist strategies χ^ε and ψ^ε such that for all k we have $E_k(\chi^\varepsilon, \psi) \geq v_k - \varepsilon$ for all ψ , $E_k(\chi, \psi^\varepsilon) \leq v_k + \varepsilon$ for all χ . The vector (v_i) is the value, and $\chi^\varepsilon, \psi^\varepsilon$ are the ε -best strategies of the recursive game. — The main tool for studying such games is the value mapping: each game element is converted into a zero-sum game by replacing the outcome corresponding to q^{kj} by a value. The author shows that if any such converted game element has a value, then so has the recursive game. He gives conditions for the recursive game to have a solution and ε -best strategies which are stationary, i. e. the same mixed strategy is used in all game elements. — The study is extended to games where a pay-off exists even if the play does not stop, and to games in continuous time. Examples are given, one of them showing the relevance of recursive games to Blotto-game situations. *S. Vajda.*

Isbell, J. R.: Finitary games. *Ann. Math. Studies* 39, 79—96 (1957).

In this paper it is shown that certain classes of games have equilibrium points in given classes of strategies: (i) finite n -person games, even if a given information set is met more than once by the game tree: in mixed strategies; (ii) finitary games i. e. those composed of game elements as in the paper reviewed above, but non-terminating plays having constant (not necessarily zero) expected value: in stationary strategies; (iii) programming games, i. e. games with pay-off functions which are quotients of two multilinear forms. *S. Vajda.*

Hannan, James: Approximation to Bayes risk in repeated play. *Ann. Math. Studies* 39, 97—139 (1957).

The approach of this paper is that of decision theory (games against nature) and hence the point of view is that of the second player. The sequence game G^N is a

succession of N plays of a component game G , the loss being the sum of the losses in the component games. The author gives a strategy sequence, which is based on the first player's past choices (hence the term Bayes risk), similar to the so-called "fictitious play" method of solving a game, though including a random element. He gives an upper bound for the loss incurred when using this sequence for N moves. Part II of the paper deals with similar problems for games that are not necessarily finite.

S. Vajda.

Gale, David: Information in games with finite resources. *Ann. Math. Studies* **39**, 141—145 (1957).

Consider an $m \times n$ matrix, M . Corresponding to the two players there are two sets A and B , consisting respectively of N -tuples of m -vectors, and of N -tuples of n -vectors. If (a_1, \dots, a_N) is an element of the first set, then $\sum_i a_i = a$ (constant vector), and any permutation of the a_i is also an element; similarly for the second set, with $\sum b_i = b$ (constant vector). The game is played as follows: B chooses an N -tuple (b_1, \dots, b_N) from his set, and A an a_1 from the first elements of his own. After choosing a_i , he is informed of b_i and then chooses a_{i+1} so that a_1, \dots, a_i, a_{i+1} are the first $i+1$ terms of one of his N -tuples. The play terminates after N choices and the pay-off to A is $\sum_i a_i M b_i$. The author proves that the value of this game is $(a M b)/N$, and that an optimal strategy for either player is to choose any N -tuple of his set and to play all permutations with equal probability. It is significant that the optimal strategy of A makes no use of his information, and he need not even know the pay-off function. A "game with finite resources" is the special case in which $m = n = N$, all components of a and b are 1, and the a_i and b_i of the strategy sets are all unit vectors.

S. Vajda.

Rabin, Michael O.: Effective computability of winning strategies. *Ann. Math. Studies* **39**, 147—157 (1957).

The author considers two-person win-lose games with perfect information and without chance moves, all plays being of finite length. It is known that such games have solutions in pure strategies. He defines an actual game (a. g.), i. e. one that can actually be played, and effectively computable strategies (e. c. s.). He then exhibits a game which is an a. g., but has no e. c. s. Moreover, if this game is played repeatedly, and if A knows that B is always using the same strategy (without knowing which), then after a finite number of plays he can discover a way of always winning.

S. Vajda.

Oxtoby, John C.: The Banach-Mazur game and Banach category theorem. *Ann. Math. Studies* **39**, 159—163 (1957).

Let $X = A \cup B$, ($A \cap B$ being empty), be a topological space, and let \mathcal{G} be a given class of subsets such that each member has a non-empty interior, and such that every non-empty open set contains a member of \mathcal{G} . A game is played as follows: Two players choose alternately sets G_n of \mathcal{G} , such that $G_n \supset G_{n+1}$. The first player wins if $A \cap \bigcap G_n$ is not empty, otherwise he loses. The following theorems are proved: The game is determined in favour of the second player if and only if A is of first category in X (i. e. it is the union of a countable number of sets, each of which is nowhere dense in X). If X is a complete metrical space, then the game is determined in favour of the first player if and only if B is of first category at some point in X . — If X is the line and \mathcal{G} is the class of nondegenerate bounded closed intervals, then the game is the "Banach-Mazur Game". A proof of the two theorems for this special case has been announced to appear in *Fundamenta Mathematicae*. If X is a compact Hausdorff space, then the condition of the second theorem is sufficient, but not necessary. This is proved by an example.

S. Vajda.

Berge, Claude: Topological games with perfect information. *Ann. Math. Studies* **39**, 165—178 (1957).

The author considers an n -person game with perfect information in extensive form; it is not assumed that the length of play must be finite. Some of the players aim at as high a supremum of their preference function during the play as possible, while the others aim at as high an infimum as possible. (Example: certain games of pursuit.) Conditions are given for such a game to have an equilibrium point. If the functions which define the rules and the pay-off are continuous, then the game is called topological. The paper contains also a study of properties of the function whose value at any position (point in topological space) is the pay-off that a given player can ensure to himself, if the game starts from that position. *S. Vajda.*

Gillette, Dean: Stochastic games with zero stop probabilities. *Ann. Math. Studies* 39, 179—187 (1957).

Consider the following two-person game with a finite number of positions: at each position the players choose pure strategies K and L . They determine thereby a probability of passing to position j , and the pay-off. Such games were called "stochastic" by Shapley (this *Zbl.* 51, 358), who also required that there be a positive probability of stopping the game. The author considers the consequence of omitting the last condition. — A strategy is "stationary" if the probability distribution at a position is the same whenever that position is reached. The s -discounted effective pay-off for a strategy pair (x, y) is defined as

$$D_i^s(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-s)^n [H_i^n(x, y) - H_i^{(n-1)}(x, y)]$$

where $H_i^n(x, y)$ is the accumulated pay-off to the first player after n positions, starting with i . The first theorem states that stationary strategies x^*, y^* exist such that $D_i^s(x, y^*) \leq D_i^s(x^*, y^*) \leq D_i^s(x^*, y)$ for all x, y and all i . For a game with perfect information a solution exists in pure strategies. An analogous result is derived regarding the "limiting average pay-off" $\liminf_{n \rightarrow \infty} H_i^n(x, y)/n$ for special cases of stochastic games. *S. Vajda.*

Holladay, John C.: Cartesian products of termination games. *Ann. Math. Studies* 39, 189—200 (1957).

A termination game is a game in which two players take turns at making moves until a terminating position is reached. A position is safe for a player if he can force a win if it is the opponent's turn to move. A well known example is three-pile Nim. A Cartesian product of n termination games is a game whose positions are n -tuples of the positions of the component game, and a move consists in a move in just one of the component positions. The author proves that if (p_1, \dots, p_n) is a position in a Cartesian product of finite games, then a value i_j of p_j can be defined so that that position is safe if and only if (i_1, \dots, i_n) is safe in n -pile Nim. Remarks are also made about the game of Kayles, Moore's generalised Nim, and "ordinal Nim", which is an infinite termination game played with ordinal numbers instead of non-negative integers. *S. Vajda.*

Walden, W.: A study of simple games through experiments on computing machines. *Ann. Math. Studies* 39, 201—211 (1957).

A "simple game" is defined as follows: Let W be a given subset of the set of all binary numbers of length n , containing r numbers chosen at random. The two players select in turn successive binary digits, and if the resulting number is an element of W , then the first player wins. The author introduces four types of players: (1) a hopeless optimist, (2) a poor tactician, (3) a skilful tactician, and (4) a perfect strategist. A computer was used to play games between players of type (4) and (4) (reported previously by Stein and Ulam), (4) and (1), (4) and (2), (4) and (3), and finally (1) and (2). Curves are given to show the proportion of a win for the first player as a function of certain values of n and r , obtained by playing 300 or more games. *S. Vajda.*

Scarf, H. E. and L. S. Shapley: Games with partial information. *Ann. Math. Studies* 39, 213—229 (1957).

A game with partial information considered here is a zero-sum two person game in which player A is informed of his opponent's move k (> 0) moves later, and player B of his opponent's moves l (≥ 0) moves later, either player knowing all his own previous moves. $k + l - 1$ is the „time lag“. Games with perfect information have $k = 1$, $l = 0$, and games with $k = l = 1$ are called „simultaneous“. In these two cases subgames and functional expressions associated with them can be used to derive optimal strategies. When $k + l - 1 \geq 2$, a collection of games can be introduced which play a similar role, and give rise to more complex functional equations. (For the case $= 2$ they are discussed, for instance, in the papers by Dubins, and by Karlin, reviewed below.) The authors derive functional equations and show how the value and optimal strategies can be obtained, if they exist. A sufficient condition for their existence is that there be a finite number of choices at each move, and that the pay-off for a game of infinite length be an upper or lower semi-continuous function of the sequence of moves.

S. Vajda.

Dubins, L. E.: A discrete evasion game. *Ann. Math. Studies* 39, 231—255 (1957).

Consider the following pursuit game on a line: At each unit of time the evader can choose to move one unit to the right or to the left. The pursuer's move consists in predicting the position of the evader two units of time ahead. If he predicts correctly, his pay-off is unity, otherwise it is zero. The author proves that the value of this game is $(3 - \sqrt{5})/2$, and finds the optimal strategy of the evader. He also shows that the pursuer has no optimal strategy.

S. Vajda.

Karlin, Samuel: An infinite move game with a lag. *Ann. Math. Studies* 39, 257—272 (1957).

The same game is considered as that studied by Dubins (see preceding review) and the same results are obtained, by different methods. The author proves, moreover, that if the game is truncated at n moves, then there is a positive probability that the pursuer predicts correctly at each stage. Both these papers are much influenced by work done by R. Isaacs, who has obtained most of the results derived here. [See, for instance, A problem of aiming and evasion. *Naval Res. Logistics Quart.* 2, 47—67 (1955).]

S. Vajda.

Kemeny, John G. and Gerald L. Thompson: The effect of psychological attitudes on the outcomes of games. *Ann. Math. Studies* 39, 273—298 (1957).

An utility function f is called strategy preserving, if the set of optimal strategies for a matrix game $||f(a_{ij} + 1)||$ is the same as that for the game $||f(a_{ij})||$. A vector of utility functions for the n players, f , is equilibrium point preserving, if for all non-zero-sum games Γ and for all n -vectors h the set of equilibrium points for $f(\Gamma)$ (with an obvious meaning) is the same as that of $f(\Gamma + h)$. The authors prove that for both properties it is necessary and sufficient that f be either linear or exponential. They discuss then psychological attitudes: reckless, cautious, common, rich man's, poor man's, etc., and give a number of examples.

S. Vajda.

Sion, Maurice and Philip Wolfe: On a game without a value. *Ann. Math. Studies* 39, 299—306 (1957).

To begin with, the authors consider the game on the square with pay-off $K(x, y) = -1$ if $x < y < x + \frac{1}{2}$, $= 0$ if $x = 0$ or if $x = y - \frac{1}{2}$, and $= +1$ otherwise. They show that $\sup_y \inf_x \int \int K df dg = \frac{1}{3}$ and $\inf_y \sup_x \int \int K df dg = \frac{3}{7}$. Then they show how any game on the square can be translated into a zero-sum two-person infinite extensive game with value or lack of value preserved. In this way they translate the original game into one without value.

S. Vajda.

Gross, O.: A rational game on the square. *Ann. Math. Studies* 39, 307—311 (1957).

The "Cantor function" $C(x)$ is defined as the monotone function satisfying $C(\frac{1}{3}x) = \frac{1}{2}C(x)$, $C(x) + C(1-x) = 1$ identically for x in $[0, 1]$. Let the pure strategies of a two-person zero-sum game be as follows: the two players choose, independently, numbers x, y from $[0, 1]$. The pay-off to player I is then given by the rational function

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[2x^n - \left(1 - \frac{x}{3}\right)^n - \left(\frac{x}{3}\right)^n \right] \left[2y^n - \left(1 - \frac{y}{3}\right)^n - \left(\frac{y}{3}\right)^n \right].$$

The author shows that the value of the game is zero, and that C is the cumulative distribution of the unique optimal mixed strategy for either player. *S. Vajda.*

Restrepo, Rodrigo: Tactical problems involving several actions. *Ann. Math. Studies* 39, 313—335 (1957).

The game solved in this paper is usually described as the " m by n silent duel". Two duelists have guns with m and n bullets, respectively. If the first (the second) fires one bullet at time t , then he kills his opponent with probability p_t (q_t), with $p_0 = q_0 = 0$, $p_1 = q_1 = 1$. The pay-off is unity to the unique survivor, if any, otherwise 0. The author proves the existence for each player of unique optimal strategies such that all attempts are made independently. *S. Vajda.*

Karlin, Samuel and Rodrigo Restrepo: Multistage poker models. *Ann. Math. Studies* 39, 337—363 (1957).

This paper contains a study of continuous version of Poker models for which complete solutions are obtained. The models involve one or more rounds of betting, bets of different sizes, and a continuous modification of the card game known as "le Her", described in Todhunter's History of the Mathematical Theory of Probability (Cambridge, 1865). *S. Vajda.*

Karlin, Samuel: On games described by bell shaped kernels. *Ann. Math. Studies* 39, 365—391 (1957).

A game over the unit square with pay-off $K(x, y)$ is a bell-shaped game if $K(x, y) = \Phi(x - y)$, where $\Phi(t)$ is a positive analytic regular Pólya Frequency Function, i. e. a function which can be approximated uniformly as closely as desired in any prescribed finite interval by polynomials with only real roots. The unique optimal strategies are described for both players, and a generalization leads to pay-off functions called of Pólya type. Finally, such games are considered which are related to Green's functions of second order differential equations and whose strategies can be computed in terms of the coefficients of the differential equations. *S. Vajda.*

Scarf, H. E.: On differential games with survival payoff. *Ann. Math. Studies* 39, 393—405 (1957).

Consider the zero-sum game G_δ played as follows. A bounded n -dimensional region R with boundary B is given. A vector x_0 is chosen interior to R . On the first move, A and B choose simultaneously y_1 and z_1 respectively; this defines the vector $x_1 = x_0 + \delta g(x_0; y_1, z_1)$, where g is a bounded n -dimensional vector-valued function. In later moves $x_i = x_{i-1} + \delta g(x_{i-1}; y_i, z_i)$ is obtained, until the path x_0, x_1, \dots penetrates B at x . The pay-off to A is given by the continuous function $b(x)$. Assume that G_δ has a value $W_\delta(x_0)$. The author gives sufficient conditions for the sequence of functions $W_\delta(x_0)$ to converge when $\delta \rightarrow 0$, and obtains a system of differential inequalities whose solution is the limiting function. (Hence the name differential game for the limiting case.) It is also shown that the — appropriately defined — upper and lower values converge to the same limit. The author discusses, moreover, games which last only a finite length of time (assuming that one move takes time $n\delta$) and unbiased games, i. e. roughly speaking those where neither player can force any particular direction in any point. *S. Vajda.*

Fleming, W. H.: A note on differential games of prescribed duration. *Ann. Math. Studies* **39**, 407—412 (1957).

This paper contains results which are analogous to those in the paper by Scarf reviewed above, but for games which terminate after a given time T , conditions are given which ensure the existence of values for all games G_δ (defined above). In the limit a first order differential equation is obtained for the value, and if a continuously differentiable solution $F(u)$ exists, then it represents the value of the differential game, and the values of the G_δ converge uniformly to this value on the set of all (x, T) for which $|x - x_0| \leq F(T_0 - T)$, $0 \leq T \leq T_0$. S. Vajda.

Berkovitz, L. D. and W. H. Fleming: On differential games with integral payoff. *Ann. Math. Studies* **39**, 413—435 (1957).

The games considered here are those of the two preceding reviews, but the payoff is given by an integral over the path. It is convex for the minimizing and concave for the maximizing player. The techniques used are those of the calculus of variations. Analogues of the Euler equations for ordinary extremal problems are shown to be necessary conditions for a saddle point in continuous pure strategies to exist, and it is shown that the solutions are characteristics of certain partial differential equations. The authors then give sufficient conditions for a family of characteristics to determine a solution of the game. S. Vajda.

Guttman, Louis: Some inequalities between latent roots and minimax (maximin) elements of real matrices. *Pacific J. Math.* **7**, 897—902 (1957).

Es sei λ^2 der dem Betrage nach größte Eigenwert der Matrix $B = A A'$, wobei $A = (a_{ij})$ eine reelle Matrix mit m Zeilen und n Spalten ist. Dann gilt $|\lambda| \geq \sqrt{n} \max_i (\min_j a_{ij})$ und $|\lambda| \geq \sqrt{m} \min_j (\max_i a_{ij})$. Dies ist trivial. Es sei v der Wert des Spiels, dessen Matrix A ist. Mit Hilfe des Hauptsatzes der Spieltheorie wird gezeigt, daß $|\lambda| n^{1/2} \leq v (m n)^{1/2} \leq |\lambda| m^{1/2}$ gilt. E. Kreyszig.

Statistik:

Geffroy, Jean: Étude des diverses majorations asymptotiques des valeurs extrêmes d'un échantillon. *C. r. Acad. Sci., Paris* **244**, 1712—1714 (1957).

For a sample of size n the author considers non-decreasing functions $B(x)$, saying that $B(n)$ majorizes $Y_n = \text{Max} \{X_{ij}\}$ in probability when $\lim P\{Y_n \leq B(n)\} = 1$, and almost certainly when $P\{Y_n > B(n) \text{ i. o.}\} = 0$. For a sequence of independent samples $\{X_{nj}: j = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots\}$ where $Y_n = \text{Max}_j \{X_{nj}\}$, $B(n)$ majorizes Y_n almost completely when $P\{Y_n > B(n) \text{ i. o.}\} = 0$. Ten theorems are announced giving necessary and sufficient conditions for $B(n)$ to majorize in one of these ways. L. Cote.

Johnson, N. L.: A note on the mean deviation of the binomial distribution. *Biometrika* **44**, 532—533 (1957).

Darwin, J. H.: The power of the Poisson index of dispersion. *Biometrika* **44**, 286—289 (1957).

Tukey, John W.: Approximations to the upper 5% points of Fisher's B distribution and non-central χ^2 . *Biometrika* **44**, 528—530 (1957).

Schäffer, K.-A.: Der Likelihood-Anpassungstest. *Mitteil.-Bl. math. Statistik* **9**, 27—54 (1957).

Some properties of the statistic $\lambda = 2 \sum_{i=1}^k \log(x_i/n p_i)^{x_i}$ which may be used to test goodness of fit in a sample of size n , comprising k classes with respective probabilities p_i and frequencies x_i ($i = 1, \dots, k$), are investigated. In particular, the aim of the paper is: to develop a method for the calculation of critical values of λ for small samples. This is done by expanding the terms of λ in a series of powers of $x_i/n - p_i$, estimating by means of this series the first and second moments of λ ,

and finally approximating the distribution of λ by a suitably transformed χ^2 -distribution, the first and second moments of which are equal to those of λ . In a few numerical examples, where the calculation of the exact distribution is still feasible, the critical values obtained in this way are compared with the exact values. The agreement is reasonable, but no more. Finally, the λ -test is compared with the χ^2 -test as regards its power. In some of the numerical cases considered, the power of the λ -test was greater, in other cases smaller than that of the χ^2 -test. In all cases, however, the minimum power of the λ -test exceeded the minimum power of the χ^2 -test.

I. J. J. Bezem.

Guttman, Irwin: On the power of optimum tolerance regions when sampling from normal distributions. *Ann. math. Statistics* **28**, 773—778 (1957).

In this Zbl. **70**, 372 optimum β -expectation tolerance regions were defined by reducing the problem to that of solving an equivalent hypothesis testing problem. In this paper the powers of these tests are discussed when sampling from a k -variate normal population, when either both μ and σ^2 , or only one of them is unknown. Tables are given for illustration.

S. Vajda.

Lehmann, E. L.: A theory of some multiple decision problems. I. *Ann. math. Statistics* **28**, 1—25 (1957).

Let X be an observable random variable, the distribution of which depends on the parameter θ . To each γ of an index-set I , there corresponds a classical test problem with a choice between the two decisions $\theta \in \omega_\gamma$ and $\theta \in \omega_\gamma^{-1}$ = the complement of ω_γ . These test problems are „components“ of a multiple decision problem in the sense that the choice is to be made for all γ . Thus a decision is wanted as to which one of all non-empty sets of the form

$$\Omega_i = \bigcap_{\gamma \in I} \omega_\gamma^{x_{i\gamma}}$$

θ belongs. Here each $x_{i\gamma}$ is either 1 or -1 . In the component test problems the losses of falsely rejecting and accepting $\theta \in \omega_\gamma$ are a_γ and b_γ . In the multiple decision problem the loss of making the decision $\theta \in \Omega_i$ is a weighted sum over all γ of the losses of the decisions $\theta \in \omega_\gamma^{x_{i\gamma}}$, where the weights in the sum depend only on γ . Let a test procedure be given for each component test problem. A multiple decision procedure would then consist in applying the component tests for all γ and combining all statements thus reached to the conjunctive statement. This procedure is called the „product“ procedure. It is assumed that with probability 1, the conjunctive statement will be non-contradictory and thus will correspond to one of the non-empty Ω_i . Let $W(\theta, d)$ be the loss of making decision d when θ is the true value of the parameter. A procedure $d = \delta(X)$ is said to be unbiased if $E_\theta W(\theta', \delta(X)) \geq E_\theta W(\theta, \delta(X))$ for all θ, θ' . Suppose that each component test procedure uniformly minimizes the risk among all unbiased procedures. It is shown that for a rather wide class of multiple decision problems this entails the same property about the product procedure when the loss function is as defined above. For each component test the property of being unbiased uniformly risk minimizing is equivalent to being uniformly most powerful unbiased in the Neyman-Pearson sense at the level $\alpha_\gamma = b_\gamma/a_\gamma + b_\gamma$. The general result is applied to the following decision problems: (i) The three decision problems with a choice between $\theta <$, $=$ or $> \theta_0$. It is noteworthy that the equal tail test is justified. (ii) Classification of two independent parameters ξ and η as being \leq or $> \xi_0$ and \leq or $> \eta_0$ respectively. (iii) The partial ordering of the several parameters, such as the means or the variances in normal populations. „Short-cut“ or „quick and dirty“ procedures are justified as being „optimum“ (iv) Point estimation. Any point estimation problem may be considered as a multiple decision problem with two-decision test problems as components. (v) Point estimation after a preliminary test of significance. (vi) The non-parametric testing of goodness of fit with the cumulative distribution function specified under the null

hypothesis. In case of rejection a determination is wanted of the sets of values of the random variable for which the true cumulative distribution is $<$, $=$ and $>$ the specified distribution. (vii) Non-parametric comparison of two distribution functions. (viii) Non-parametric estimation of the cumulative distribution function.

E. Sverdrup.

Koźniewska, I.: Comparison of the efficiency of drawing samples with and without replacement when the variance of the general population is unknown. *Colloquium math.* 4, 232—238 (1957).

Let μ denote the arithmetic mean of a population of N elements, \bar{x} the sample mean of n elements x_1, x_2, \dots, x_n , drawn with replacement, and put

$$M_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad a_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

For a sample x_1, x_2, \dots, x_n drawn without replacement

$$\bar{x}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad M_2^* = \frac{1}{n-1} \frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}^*)^2 \quad \text{and} \quad a_2^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^n$$

are the corresponding means. It is shown that the unbiased estimates M_2^* and a_2^* are more efficient estimates of the population variance than the corresponding estimates M_2 and a_2 respectively and that a_2 is more efficient than M_2 and a_2^* more efficient than M_2^* . At last the efficiency of a_2 and M_2^* are compared under particular conditions.

H. Bergström.

Keyfitz, Nathan: Estimates of sampling variance where two units are selected from each stratum. *J. Amer. statist. Assoc.* 52, 503—510 (1957).

The paper is concerned with finding practical methods which for certain types of sampling surveys permit to estimate the sampling variance of the estimates without excessive computation. Specifically the author considers the ratio estimate technique in stratified random sampling (with replacement) and discusses the simplifications brought about by selecting only two units from each stratum. The simplifications are due to the fact that for (x_{s1}, y_{s1}) , (x_{s2}, y_{s2}) , the observation on the two units selected from the s -th stratum, $\text{Var}(x_{s1} + x_{s2}) = E(x_{s1} - x_{s2})^2$,

$$\text{Cov}(x_{s1} + x_{s2}, y_{s1} + y_{s2}) = E(x_{s1} - x_{s2})(y_{s1} - y_{s2}).$$

The author then considers a more elaborate version of the ratio estimate, where in each stratum the sample values are further subdivided according to some classification (as eg., age-sex.). He also indicates how the method should be applied to multi-stage sampling.

W. Gautschi.

Stuart, Alan: A singularity in the estimation of binomial variance. *Biometrika* 44, 262—264 (1957).

For the symmetrical binomial distribution, the limit distribution of the sample variance is non-normal and has variance of order $1/n^2$.

Zusammenfassg. des Autors.

Robson, D. S.: Applications of multivariate polykays to the theory of unbiased ratio-type estimation. *J. Amer. statist. Assoc.* 52, 511—522 (1957).

The author defines multivariate symmetric means and gives a multiplication formula for them. He extends the definition of Tukey for univariate polykays to multivariate polykays and discusses the relationships between polykays and symmetric means. The results are applied to obtain unbiased ratio-type estimates and variance estimates for finite populations.

T. V. Narayana.

Wendel, J. G.: Groups and conditional Monte Carlo: *Ann. math. Statistics* 28, 1048—1052 (1957).

Zur Verfügung stehen beobachtbare Zufallsgrößen X , mit Verteilungsdichte $f(x)$. Experimentell soll $E(\varphi(X) | \text{Bedingung für } X)$ bestimmt werden! Dabei soll die Bedingung für X so aussehen: $A(X) = \alpha_0$, wo A Element einer lokal-kompakten homogenen Transformationsgruppe über dem euklidischen X -Raum ist. Es wird in Verallgemeinerung der Ergebnisse von Arnold, Bucher, Trotter und

Tukey (dies. Zbl. 70, 134) gezeigt, daß der gesuchte Erwartungswert oft zweckmäßig durch einen Ausdruck von der Form $\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \varphi(X_v) w(X_v)$ geschätzt werden kann, wobei die Streuung, unter Verwendung roher Kenntnisse über die Verteilung f , wie an einem Beispiel gezeigt wird, oft verkleinert werden kann. *D. Morgenstern.*

Elfving, G.: A selection problem in experimental design. Soc. Sci. Fennica. Commentationes phys.-math. 20, Nr. 2, 10 p. (1957).

The author considers the following problem. An experimenter may choose n distinct observations out of N possible observations x_i where x_i is a random variable with variance 1 and $E(x_i) = \alpha_1 U_{i_1} + \alpha_2 U_{i_2} + \dots + \alpha_m U_{i_m}$. The x_i are to be chosen so that a given linear form $L = c_1 \alpha_1 + \dots + c_m \alpha_m$ of the parameters $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ can be estimated with minimum variance. Let $U_i = (U_{i_1}, \dots, U_{i_m})'$, $c = (c_1, \dots, c_m)'$. $M = \sum_{i=1}^n U_i U_i'$. The author assumes that the U_i are such that for every possible choice of n of the x_i the matrix M is non-singular. The variance of L is then given by $c' M^{-1} c$. An approximate and often an exact solution of this problem is obtained by solving the following mathematical problem. Put $M = \sum_{i=1}^N p_i U_i U_i'$, $0 \leq p_i \leq 1$.

$\sum p_i = n$. We wish to minimize $V = c' M^{-1} c$ with respect to the p_i . The author proves the following theorems. Theorem I: The function V reaches a minimum. In order that $p = (p_1, \dots, p_n)$ is a minimum point it is necessary and sufficient that for a certain non negative number h we have $p_i = 0$ if $|c' M^{-1} U_i| < h$ and $p_i = 1$ if $|c' M^{-1} U_i| > h$. Theorem II: The function V can always be minimized by means of a $p = (p_1, \dots, p_n)$ with at most m fractional p_i s. If all p_i s are integral then the solution of this mathematical problem yields a solution of the design problem. If none of the p_i s are fractional then we can replace them by 1 and get a design with more than n observations which is at least as efficient as the best design with n observations. The authors second theorem shows that this may be achieved by increasing the number of observations by at most $m - 1$. *H. B. Mann.*

Clarke, A. Bruce: Maximum likelihood estimates in a simple queue. Ann. math. Statistics 28, 1036—1040 (1957).

Let a stationary single-channel queueing process be given with Poisson arrival of parameter μ and exponential service time with parameter λ , such that the traffic intensity $\lambda/\mu = \rho < 1$. The author finds the maximum likelihood estimators of these parameters by noting the initial queue length v and the values of the following random variables when the total busy time (times when the queue length is positive) reaches a preassigned value τ : m = total number of departures during this period; T = time of the m th departure; n = total number of arrivals up to T . The resulting maximum likelihood equations are quadratic. Rational approximations to the estimates are $\hat{\lambda} = (n + v)/T$, $\hat{\mu} = (m - v)/\tau$, and hence $\hat{\rho} = \hat{\lambda}/\hat{\mu}$. *S. Vajda.*

Trybula, S.: On a problem of prognosis. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 859—862 (1957).

m multinomial trials are made and the numbers of trials m_1, m_2, \dots, m_k resulting in events A_1, A_2, \dots, A_k respectively, are observed. The numbers of trials n_1, n_2, \dots, n_k resulting in the events A_1, A_2, \dots, A_k , respectively, in n additional trials, are to be predicted. Let the predictors ("estimates") be $f_i(m_1, \dots, m_k)$. The maximum of the risk function $E \sum_{i=1}^k (n_i - f_i)^2$ is minimized with regard to the functions f_i . The solution takes the form $f_i = \alpha m_i + \beta$, where α and β are functions of m and n only. This is a Bayes solution with constant risk. *E. Sverdrup.*

Rangarajan, R.: A note on two stage sampling. Sankhyā 17, 373—376 (1957). Let a finite population of numbers, whose total is to be estimated, be divided into N primary sampling units. Two stage sampling consists in (a): choose n primary

sampling units, not necessarily by random sampling; for each outcome, S , of this stage there is given a set $\{m_{si}: i = 1, \dots, n\}$ of sample sizes for the second stage, (b): take a random sample of m_{si} (with or without replacement) from the i -th primary unit chosen in (a). The author considers two cases, (1) the set $\{m_{si}\}$ is chosen by fixing in advance a sample size to be used for each of the N primary units, these being chosen so that the expected total sample, $E(\sum m_{si}) = m_0$; and (2) a set $\{m_{si}\}$ is chosen for each outcome of (a) subject only to $\sum m_{si} = m_0$. For the natural unbiased estimate of the population total he finds the optimum choice of the $\{m_{si}\}$ in each case and shows that the first case always gives the more efficient estimate.

L. Cote.

Morgenstern, Dietrich: Schätzung unbekannter Verteilungsdichten. *Mittel. Bl. math. Statistik* 9, 73—75 (1957).

Um die Verteilungsdichte $f(x)$ gleichverteilter Zufallsgrößen X_i , $i = 1, 2, \dots$ zu schätzen, schlägt Verf. die folgende „empirische Dichte“ vor: $f_n^*(x) = \frac{1}{2} n^{\alpha-1}$ mal [Anzahl der X_i in $(x - n^{-\alpha}, x + n^{-\alpha})$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$]. Er zeigt, daß $f_n^*(x)$ eine konsistente Schätzfunktion für $f(x)$ ist.

H. Bergström.

Mackenzie, J. K. and M. J. Thomson: Some statistics associated with the random disorientation of cubes. *Biometrika* 44, 205—210 (1957).

A Monte Carlo method is used to estimate the frequency functions of various angles in a random aggregate of cubic crystals. Estimates are made of the frequency function for the angle of disorientation, i. e. the least angle of rotation required to rotate a crystal into the same orientation as a neighbouring crystal, and for the angles $\text{Min} \langle 100 \rangle$, $\text{Min} \langle 110 \rangle$, $\text{Min} \langle 112 \rangle$, $\text{Min} \langle 123 \rangle$ and $\text{Min} [\langle 110 \rangle, \langle 112 \rangle, \langle 123 \rangle]$, where $\text{Min} \langle 100 \rangle$ is defined as the least of the nine acute angles between $\langle 100 \rangle$ directions in neighbouring crystals and similar definitions apply for the other angles.

Zusammenfassg. der Autoren.

James, A. T.: The relationship algebra of an experimental design. *Ann. math. Statistics* 28, 993—1002 (1957).

Between the plots of an experimental design relationships may be introduced. For instance two plots with the same treatment may be called related. Likewise two plots in the same block and so forth. The identity, relating each plot only with itself and the universal relation relating any two plots are always included. To each such relationship we construct a matrix by writing 1 on the i -th row and the j -th column if the i -th plot is related to the j -th plot and 0 otherwise. The author considers the algebra generated by these relationship matrices. If the relationships are symmetric, as they usually will be, the algebra is semi-simple and hence a direct sum of complete matrix algebras. Randomized block designs and Latin Squares have commutative relationship algebras and are therefore isomorphic to sums of 1×1 matrix algebras. The author carries out the reduction for balanced incomplete block designs. The algebra of a b. i. b. d. is the direct sum of one 2×2 and three 1×1 matrix algebras. The direct summands of any relationship algebra are directly related to the decomposition of the sum of squares into its components in the analysis of variance.

H. B. Mann.

Cooper, B. E.: The effect of ties on the moments of rank criteria. *Biometrika* 44, 526—527 (1957).

Johnson, N. L.: Uniqueness of a result in the theory of accident proneness. *Biometrika* 44, 530—531 (1957).

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Wirtschaftsmathematik:

Amoroso, Luigi: L'equazione canonica della funzione logistica. II. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. natur., VIII. Ser.* 22, 237—242 (1957).

Cox, D. R. and W. L. Smith: On the distribution of *Tribolium confusum* in a container. *Biometrika* 44, 328—335 (1957).

Williamson, M. H.: An elementary theory of interspecific competition. *Nature* 180, 422—425 (1957).

Interspecific competition in an ecologically closed system is considered deterministically. It is known that two species, each with a constant birth-rate and death caused by a single controlling factor acting simply on both or one of them, cannot coexist. However, if another controlling factor acts on both or one of the species, it is shown that a stable equilibrium is possible under a certain situation.

Y. Komatu.

Haskey, H. W.: Stochastic cross-infection between two otherwise isolated groups. *Biometrika* 44, 193—204 (1957).

As a generalization of the case considered by Bailey and the author (see this Zbl. 38, 291; 55, 125) the following case is now studied: There are two groups of people with n_i ($i = 1, 2$) individuals. Now h infectives are introduced into the first group at $t = 0$. At time t we suppose that r_i uninfected susceptibles remain. Let the chance of any of these in the first group being infected during time dt by an infective in the same group be $ar_1(n_1 + h - r_1) dt$, and by one in the other group $b' r_1(n_2 - r_2) dt$. Similarly in the other group $b r_2(n_2 - r_2) dt$, and $a' r_2(n_1 + h - r_1) dt$. Using the resulting differential-difference equation, the author discusses methods for finding the mean number unaffected and the mean number of susceptibles

S. Vajda.

Giaccardi, Fernando: Considerazioni su alcune disuguaglianze e applicazioni. *Scritti mat. in Onore di F. Sibirani* 123—142 (1957).

Anwendung bekannter Ungleichungen (Hölder, Jensen, Schwarz) auf biometrische Funktionen der Versicherungsmathematik. Man vgl. hierzu Sibirani, *Boll. Un. mat. Ital.*, II. Ser. 4, 60—63 (1935); J. F. Steffensen, *Skand. Aktuarietidskr.* 1925 (8), 137—147 (1925).

L. Schmetterer.

Munro, N. A.: Lidstone's Z-method without Makeham's law. *J. Inst. Actuaries* 83, 268—276 (1957).

Bei Voraussetzung der Sterbeformel von Makeham gilt bei der Methode von Lidstone für das Zentralalter M und die für alle Versicherungen gleiche restliche Dauer n die Beziehung $\ddot{a}_{M:n} = A + Bc^M = Z(M)$. Liegt der Reserveberechnung keine nach Makeham ausgeglichene Sterbetafel zugrunde, so kann ein Näherungswert für M aus dem Verlauf des Verhältnisses $\Delta Z(M)/\Delta Z(M-1)$ gefunden werden. Verf. zeigt das Verfahren für die (englischen) Sterbetafeln A 1924—29 (ultimate) und A 1949—52 (ultimate).

E. Zwinggi.

Guerrieri, Annibale: Sulla rendita vitalizia frazionata. *Archimede* 9, 186—191 (1957).

Durch Anwendung der Eulerschen Summenformel auf $\int_0^\infty (1 - {}_t p_x) v^t dt$ gewinnt Verf. für die unterjährige Leibrente die Näherungsformeln

$${}_1 a_x^{(m)} = a_x + 1/j_m - 1/i, \quad {}_2 a_x^{(m)} = a_x - [(m^2 - 1)/12 m^2] \mu_x + 1/j_m - 1/i.$$

Er zeigt, daß die erste dieser Formeln wesentlich genauere Werte liefert als die viel benutzte Näherungsformel $a_x^{(m)} = a_x + (m-1)/2m$, während

$${}_2 a_x^{(m)} \approx a_x + (m-1)/2m - [(m^2 - 1)/12 m^2] (\mu_x + \delta)$$

gilt.

G. Friede.

Barbot, Jacques: Assurance temporaire au décès de capitaux variant suivant une loi parabolique ou exponentielle du temps. *Bull. trimestr. Inst. Actuaire Français* 68, 69—84 (1957).

Für die Todesfallversicherung mit parabolischem und exponentiellem Leistungssystem entwickelt Verf. die Formeln für die gleichbleibende jährliche Nettoprämie. Er erhält für das parabolische Leistungssystem, nach dem beim Tode im k -ten Versicherungsjahr die Summe $\Gamma_k = (\alpha k^2 + \beta k + \gamma) \Gamma$ gewährt wird, mit

$J_x = \sum_{v=x}^{\infty} R_v: \Pi_x = \frac{I}{D_x} \{2\alpha (J_{x+2} - J_{x+n}) + (\alpha + \beta) R_{x+1} - [(2n-3)\alpha + \beta] R_{x+n} + \gamma M_x - [(n-1)^2\alpha + (n-1)\beta + \gamma] M_{x+n}\}$ und diskutiert den Spezialfall einer Restschuldversicherung, in dem $\alpha = 1/n(n+1)$, $\beta = -(2n+1)/n(n+1)$, $\gamma = 1$ ist. Für das exponentielle Leistungssystem mit $I_k = [\alpha(1+\beta)^k + \gamma] I$ erhält er $\Pi_x = (I/D_x(i)) [\alpha(1+\beta)^{-(x+1/2)} \mathfrak{M}_{x,n}(j) + \gamma \mathfrak{M}_{x,n}(i)]$ mit $j = (i-\beta)/(1+\beta)$, $\mathfrak{M}_{x,n}(i) = M_x(i) - M_{x+n}(i)$. Für die praktische Anwendung dieser Formeln auf die Restschuldversicherung mit $\alpha = -1/[(1+t)^n - 1]$, $\beta = t$, $\gamma = (1+t)^n/[(1+t)^n - 1]$ schlägt er verschiedene Näherungsformeln für j vor, wendet sie auf ein Beispiel an und vergleicht die mit ihnen erhaltenen Werte.

G. Friede.

Rufener, Ernst: Über eine Bilinear Darstellung der Barwerte temporärer Verbindungsrenten. Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath. 57, 205—220 (1957).

Verf. dehnt frühere Ergebnisse (dies. Zbl. 66, 135) auf den Fall der Verbindungsrente $\bar{a}_{x_1, x_2, \dots, x_m: \bar{t}}$ aus. Die Überlebensordnung

$$L(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{v=1}^m l_v(x_v),$$

welche die Darstellung

$$\bar{a}_{x_1, x_2, \dots, x_m: \bar{t}} = \sum_{i=1}^k A_i(t, \delta) \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (m \geq 1, \quad k \geq 1)$$

erfüllt, läßt sich in sinngemäßer Verallgemeinerung des im Falle einer einzigen Altersvariablen erhaltenen Ergebnisses durch eine partielle lineare Differentialgleichung k -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{\lambda=0}^k c_{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^{\lambda} L(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$$

charakterisieren, so daß durch die erste Gleichung Abfallsordnungen $l_v(x_v)$ bestimmt werden, die lineare Verbindungen einfacher Exponentialfunktionen mit Konstanten oder Polynomen in x_v als Koeffizienten sind. Die Zeitrentenfunktionen $A_i(t, \delta)$ sind wie im Falle einer Altersvariablen als Lösungen eines linearen inhomogenen Systemes von Differentialgleichungen nach Vorgabe gewisser Anfangswerte eindeutig bestimmt.

E. Zwinggi.

Söderström, Lars-Gunnar: Valuation of the fund and analysis of its development. A computation system for life and pension assurance. Skand. Aktuarietidskr. 1957, 11—17 (1957).

Für eine allgemeine Versicherungsform mit mehreren Ausscheide- ($\mu_x^{(i)}$) und Leistungsursachen ($\nu_x^{(i)}$) läßt sich der Barwert für die Leistungseinheit K_x durch das Stieltjesintegral

$$K_x = \int_x^{\infty} \left[\exp - \int_x^t \left(\delta + \sum_i \mu_u^{(i)} \right) du \right] \cdot \left[h_t + \sum_i \gamma_t^{(i)} v_t^{(i)} \right] ds(t)$$

darstellen, wobei h_t die Leistung für im Bestand verbleibende Versicherte, $j_t^{(i)}$ die beim Eintritt des i -ten versicherten Ereignisses fällige Leistung bedeutet und $s(t) = t + n(t)$ eine mit t zunehmende Stufenfunktion ist. Verf. diskutiert die zugehörige Thiesesche Differentialgleichung und entwickelt aus ihr ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Gesamtdeckungsrückstellung für einen Versicherungsbestand.

G. Friede.

Santoboni, Luigi: Le assicurazioni di annualità su una o due teste, con riferimento all'assicurazione mista e al termine fisso. Archimede 9, 20—25 (1957).

Verf. gibt verschiedene, wenig bekannte Formeln für das Deckungskapital der gemischten Versicherung auf ein und zwei Leben; diese Formeln erlauben es, die Richtung der Änderung des Deckungskapitals bei Variation von Zins und Sterblichkeit zu erkennen.

E. Zwinggi.

Grenander, Ulf: On heterogeneity in non-life insurance. I. Skand. Aktuarietidskr. 1957, 71—84 (1957).

Der Verf. untersucht Risiko-Verbände, deren Risiko-Struktur inhomogen ist. Mit λ werde der Risikoparameter bezeichnet, der als Zufalls-Variable der Verteilungsfunktion $G(\lambda)$ genüge. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich für eine Police in einer gewissen Zeit k Schäden ergeben, betrage p_k , wobei

$$p_k = \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} dG(\lambda).$$

Folgende Fragen werden vom Verf. im ersten Teil seiner Abhandlung diskutiert: Mathematische Definition einer „gerechten“ Prämie, Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, daß mindestens v Schäden sich in einer bestimmten Zeit ergeben. Aufstellung von Homogenitäts-Tests. Statistische Schätzung von $G(\lambda)$. *W. Saxer.*

Sargan, J. D.: The distribution of wealth. *Econometrica* 25, 568—590 (1957).

Verf. entwickelt ein dynamisches Modell für die Verteilung des Reichtums auf die Haushalte einer Volkswirtschaft, das folgende Punkte berücksichtigt: 1. Die Entstehung neuer Haushalte, 2. Schenkungen zwischen Haushalten, 3. Sparen und Kapitalgewinne, 4. Erlöschen von Haushalten und Übergang eines Teiles ihres Reichtums an andere Haushalte. — Das Modell führt auf eine lineare partielle Integro-Differentialgleichung, deren Lösung in einigen speziellen Fällen approximativ diskutiert wird. Es ergeben sich dann Verteilungen, die mit wachsender Zeit nicht gegen eine Paretosche, sondern gegen eine logarithmische Normalverteilung streben. *E. Burger.*

Palomba, Giuseppe: I fatti salienti della macro-economica e gli sviluppi del sistema paretiano. *Ricerca, Rivista Mat. pur. appl.*, II. Ser. 8, Nr. 1, 25—41 (1957).

Basman, R. L.: A generalized classical method of linear estimation of coefficients in a structural equation. *Econometrica* 25, 77—83 (1957).

Verf. verallgemeinert die klassische Methode der Schätzung der Koeffizienten in einer linearen Gleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate für den Fall, daß die lineare Gleichung eine aus einem System ökonomischer Strukturgleichungen ist, unter Benutzung der in diesem Falle vorgegebenen Einteilung der Variablen in endogene und exogene. Es werden für den vorgeschlagenen Schätzer gewisse Optimaleneigenschaften nachgewiesen und Beziehungen zu anderen ökonomischen Schätzern diskutiert. *E. Burger.*

Markowitz, Harry M. and Alan S. Manne: On the solution of discrete programming problems. *Econometrica* 25, 84—110 (1957).

This paper considers Linear Programming problems in which all or some variables are restricted to integral values. It is first pointed out that while diseconomies of scale can be dealt with directly by a suitable L. P. formulation, problems involving economies of scale (e. g. rebates) cannot. However, the latter type of problems can be transformed, by a rather neat device, into L. P. problems where some of the variables must be either zero or unity. A general approach is presented to the discrete problem, based on empirical observations, without mathematical proofs. A production problem, and an air transport problem are solved as illustrations. The travelling salesman problem belongs, of course, also into this category. *S. Vajda.*

Kuhn, H. W.: A note on Prager's transportation problem. *J. Math. Physics* 36, 107—111 (1957).

This note refers to W. Prager, A generalization of Hitchcock's transportation problem (this Zbl. 77, 338). The author proves first what are, essentially, the well known relations between two dual objective functions, applied to Prager's problem, and then shows that these results are equivalent to those demonstrated by Prager. He attaches pertinent comments on methodology and the respective merits of his, and of Prager's, approach. *S. Vajda.*

Bellman, Richard: A Markovian decision process. J. Math. Mech. 6, 679—684 (1957).

A dynamic programming process is described which gives rise to the recurrence relation

$$f_n(i) = \max_q \left[b_i(q) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(q) f_{n-1}(j) \right], \quad n = 1, 2, \dots,$$

where q is a known vector. The author proves that under conditions which will not be quoted here we have, for $n \rightarrow \infty$, $f_n(i) \rightarrow n r$, where r is a scalar. S. Vajda.

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

Hughes, D. R.: Collineations and generalized incidence matrices. Trans. Amer. math. Soc. 86, 284—296 (1957).

Die vorliegende Arbeit ist eine neue erfolgreiche Anwendung der von Minkowski und Hasse stammenden Theorie der rationalen Kongruenz von quadratischen Formen auf geometrische Probleme, mit dem Vorbild einer Arbeit von Bruck und Ryser (dies. Zbl. 37, 375), in welcher die Anwendbarkeit dieser Theorie auf die Inzidenzmatrix einer endlichen projektiven Ebene gezeigt und ausgenutzt wurde. Verf. definiert eine „verallgemeinerte Inzidenzmatrix“ $A = (a_{ij})$ folgendermaßen: Ist \mathcal{G} eine beliebige Kollineationsgruppe einer (v, k, λ) -Konfiguration (oder „symmetrischer Blockplan“ [Pickert, Projektive Ebenen, dies. Zbl. 66, 387, S. 287]) und sind die Punkt- bzw. Geraden-Transitivitätsgebiete bezüglich \mathcal{G} irgendwie von 1 bis w_1 bzw. w_2 numeriert, so ist a_{ij} die Anzahl derjenigen Kollineationen in \mathcal{G} , welche einen (beliebigen) festen Punkt des i -ten Punkt-Transitivitätsgebietes auf Punkte einer festen Geraden des j -ten Geraden-Transitivitätsgebietes abbilden. Es ist $w_1 = w_2$ [dafür hat Ref. in Math. Z. 69, 59—89 (1958), wo eine umfassendere Verallgemeinerung der Inzidenzmatrix eingeführt und einige Resultate der vorliegenden Arbeit auf andere Weise gewonnen werden, einen kürzeren und allgemeineren Beweis angegeben], und A vermittelt die rationale Kongruenz zweier weiterer Matrizen, deren Elemente sich einfach aus den Invarianten k und λ sowie den Ordnungen der Gruppe \mathcal{G} und gewisser ihrer Untergruppen zusammensetzen. Die Minkowski-Hasse'sche Theorie wird also anwendbar und gestattet Rückschlüsse auf das Transitivitätsverhalten von \mathcal{G} . Die weitere Untersuchung, die im allgemeinen Fall zu allzu großen rechnerischen Komplikationen führen würde, beschränkt sich sodann auf sog. „standard collineation groups“, welche durch die Forderung definiert sind, daß alle ihre von der Gruppeneins verschiedenen Elemente dieselben Fixpunkte und Fixgeraden haben. Die Existenz einer solchen Gruppe hat nach der Minkowski-Hasse'schen Theorie die nichttriviale Lösbarkeit einer gewissen diophantischen Gleichung zur Folge; und aus dieser Tatsache ergeben sich neue Nichtexistenzsätze für endliche projektive Ebenen mit Kollineationsgruppen gewisser Transitivitätseigenschaften. Unter anderem wird für viele n die Nichtexistenz von $p - L$ -transitiven projektiven Ebenen (im Sinne von Baer, dies. Zbl. 60, 322) mit der Ordnung n bewiesen.

P. Dembowski.

Salzmann, Helmut: Topologische projektive Ebenen. Math. Z. 67, 436—466 (1957).

Eine lokalkompakte projektive Ebene besitzt eine abzählbare Basis. Sie braucht nicht kompakt zu sein (im Widerspruch zu einer Behauptung von L. A. Skornjakov (vgl. dies. Zbl. 57, 362)). Sie ist es, sobald man noch Zusammenhang voraussetzt. Dasselbe gilt, wenn die Topologie auf Anordnung beruht; die Anordnung ist dann von selber archimedisch. Auch mit Inzidenzsätzen kann man

die Kompaktheit lokalkompakter projektiver Ebenen erzwingen, z. B. wenn man die Existenz eines Punktes p und einer nichtinzidenten Geraden G mit einer Kollineations-schar fordert, die p und G punktweise festläßt und übrigens auf jeder Geraden durch p transitiv ist. — Ist der additive Loop eines Ternärkörpers der lokalkompakten projektiven Ebene eine kommutative Gruppe, so ist er direkte Summe von n Additionsgruppen der reellen Zahlen. Die projektiven Geraden einer zur reellen projektiven Ebene homöomorphen projektiven Ebene sind topologisch Kreise. — Eine zur reellen Ebene homöomorphe Translationsebene ist zu ihr isomorph. — Zu jedem topologischen Alternativkörper gibt es genau eine projektive Ebene.

H. Freudenthal.

Ewald, Günther: Begründung der Geometrie der ebenen Schnitte einer Semi-quadratik. Arch. der Math. 8, 203—208 (1957).

Sei P ein allgemeiner 3-dimensionaler projektiver Raum mit einer nicht ausgearteten Polarität π , die nicht ein Nullsystem ist. Wir schreiben dafür (P, π) . Verf. kennzeichnet die (P, π) durch ein Axiomensystem, das sich auf die Ebenen α, β, \dots und die zwischen ihnen bestehende symmetrische Relation $\pi(\alpha) \in \beta$ bezieht. Er nennt die Ebenen Kreise und die Relation $\pi(\alpha) \in \beta$ Orthogonalität. Axiomensystem: Es sei eine Menge von Kreisen α, β, \dots gegeben, für die die symmetrische Relation Orthogonalität erklärt ist. Folgende Aussagen sollen gelten: 1. Drei Kreise besitzen einen Orthogonal-kreis (dies entspricht der Tatsache, daß drei Ebenen in P einen Punkt gemeinsam haben, dessen Polarebene orthogonal ist zu diesen drei Ebenen). 2. Eine Reichhaltigkeitsaussage. 3. Besteht zwischen zwei Tripeln unter sich verschiedener Kreise in acht Fällen Orthogonalität, dann auch im neunten Fall [wenn für die Tripel $(\alpha_i), (\beta_k)$ ($1 \leq i, k \leq 3$) unter sich verschiedener Ebenen in P acht der Relationen (*) $\pi(\alpha_i) \in \beta_k$ gelten, so heißt das, daß die drei Ebenen α_i sowie die drei Ebenen β_k je eine Gerade gemeinsam haben, die untereinander konjugiert sind. Dann gilt aber auch die neunte Relation (*)]. 4. Es gibt einen Kreis, der nicht zu sich selber orthogonal ist (dies entspricht der Tatsache, daß π kein Nullsystem ist). Es ist nun leicht, aus diesem Axiomensystem ein Paar (P, π) herzuleiten: Die Menge $[\alpha]$ der zu einem Kreis α orthogonalen Kreise werde Punkt genannt, die Menge $[\alpha, \beta]$ der zu zwei verschiedenen Kreisen α, β orthogonalen Kreise werde Gerade genannt und die Kreise selber seien Ebenen genannt. Es ist dann leicht zu zeigen, daß dieses mit der natürlichen Enthaltenseins-Beziehung einen projektiven Raum bildet, in dem durch $\pi(\alpha) = [\alpha]$ eine Polarität π erklärt ist.

W. Klingenberg.

Pikus, D. L.: Über das Kongruenzaxiom für Dreiecke in der abgeschwächten Form. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 3(75), 359—362 (1957) [Russisch].

Im Anhang II seiner Grundlagen der Geometrie schwächt Hilbert das Dreieckskongruenzaxiom III₅ dahingehend ab, daß er es nur für gleichsinnig liegende Dreiecke fordert. Die Frage, ob das so abgeschwächte Kongruenzaxiom III₅^{*} bei Hinzunahme des Archimedischen Axioms und des linearen Vollständigkeitsaxioms (oder des Dedekindschen oder Cantorsche Axioms) mit den übrigen Axiomen zum Aufbau der euklidischen Planimetrie ausreicht, hat Hilbert offen gelassen. Verf. zeigt an einem Gegenbeispiel, daß das Axiom III₅ wirklich in seiner ursprünglichen Form notwendig ist. Er erklärt eine Bewegungsgruppe (in rechtwinkligen Koordinaten) durch die Transformationen (1) $x' = e^{\lambda(x)}(x \cos \alpha - y \sin \alpha) + a$, $y' = e^{\lambda(x)}(x \sin \alpha + y \cos \alpha) + b$, wobei $\lambda(x)$ eine unstetige Lösung der Funktionalgleichung $\lambda(x) + \lambda(\beta) = \lambda(x + \beta)$ mit $\lambda(\pi) = 0$ ist. Solche Lösungen existieren, wie Hamel 1905 gezeigt hat. Die Gruppe (1) hat in anderem Zusammenhang zuerst Pickert 1950 (dies. Zbl. 34, 237) angegeben. In einer soeben erschienenen Note [Arch. der Math. 8, 477—480 (1958), S. 479 unten] ist Ref., ohne die vorherige Note des Verf. zu kennen, auf dieselbe Art zum selben Ergebnis gekommen.

H. Lenz.

Elementargeometrie:

Goormaghtigh, R.: Sur le triangle équilatéral. *Mathesis* 66, 167—172 (1957).

Verf. teilt eine Reihe von Beispielen mit, in denen Sätze über merkwürdige Gebilde der Geometrie eines beliebigen Dreiecks bei Spezialisierung für das gleichseitige Dreieck zu interessanten Eigenschaften führen. Ein Beispiel sei angeführt: Die Enveloppe der reziproken Transversalen der Tangenten an den Umkreis eines gleichseitigen Dreiecks ist eine Longchampssche Trisektrix.

M. Zacharias.

Deaux, R.: Sur des cubiques planes. *Nieuw Arch. Wiskunde*, III. Ser. 5, 63—67 (1957).

J. H. Tummers (dies. Zbl. 72, 383) ordnet zwei beliebigen Punkten P, Q der Ebene eines Dreiecks einen dritten Punkt R durch folgenden Satz zu: Sind $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ in einem Dreieck ABC die Fußpunktdreiecke zweier beliebiger Punkte P, Q [d. h. die Punkte $(AP, BC), (BP, CA), (CP, AB)$ und entsprechend für Q], so gehen die sechs Geraden, die $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ mit den Punkten $(P_2P_3, Q_1A), (P_3P_1, Q_2B), (P_1P_2, Q_3C), (Q_2Q_3, PA), (Q_3Q_1, PB), (Q_1Q_2, PC)$ verbinden, durch einen Punkt R . Für diesen wahrscheinlich von G. Franke [*Enseignement math.* 27, 137—141 (1928)] zuerst ausgesprochenen Satz hat Verf. [*Enseignement math.* 28, 236—238 (1930)] zwei geometrische Beweise gegeben, aus denen er hier weitere Folgerungen zieht. Tummers wird durch diesen Satz auf Kubiken geführt, die für die Transformationen durch isogonale oder reziproke Punkte invariant sind. Diese Kubiken knüpft Verf. hier an allgemeine Eigenschaften an.

M. Zacharias.

Bottema, O.: Une construction par rapport à un triangle. *Nieuw Arch. Wiskunde*, III. Ser. 5, 68—70 (1957).

Verf. knüpft an die in vorstehendem Aufsatz zitierte Arbeit von J. H. Tummers an und beweist folgenden Satz: Der Punkt R ist der Pol der Geraden PQ bezüglich des Kegelschnitts durch die fünf Punkte A, B, C, P, Q . Er gibt ferner einige Anwendungen und Folgerungen.

M. Zacharias.

Deaux, R.: Hexagones bordés de triangles équilatéraux. *Mathesis* 66, 151—167 (1957).

Sechs Punkte A_1, A_2, \dots, A_6 , die koplanar, reell, eigentlich, nicht notwendig verschieden und in obiger Ordnung genommen werden, sind die aufeinanderfolgenden Ecken A_k eines Sechsecks (A) . Die Ecken A'_k der gleichseitigen Dreiecke $T_k = A_k A_{k+1} A'_k$, die einen und denselben Umlaufsinn haben, sind die aufeinanderfolgenden Ecken eines Sechsecks (A') . Dieses ist nicht beliebig. Es gibt ∞^2 Sechsecke (A) , die durch diese Konstruktion zu dem Sechseck (A') führen und zu ihm assoziiert genannt werden. — Die vorliegende Arbeit untersucht die Eigenschaften von (A') und allen (A) , und untersucht die Existenz eines (A) , dessen abwechselnde Seiten parallel sind, sowie eines (A) , dessen sämtliche Winkel rechte sind. — Auf die Fülle der Einzelsätze einzugehen, ist unmöglich.

M. Zacharias.

Rešetnjak, Ju. G.: Über ein Verfahren, ein nicht konvexes Polygon in ein konvexes zu verwandeln. *Uspechi mat. Nauk* 12, Nr. 3 (75), 189—191 (1957) [Russisch].

The following elementary geometrical theorem is proved: Let L be a nonconvex simple plane polygon. Let a be a straight line, which contains no inner point of L and has two points A, B with boundary of L in common in such a way, that no part of the boundary with the end points A, B is a segment. One of them is inside of the other. This "inner" part will be reflected on a . We shall get a new polygon, which may be a convex one. If this is not the case, we shall repeat the described operation. After finite number of steps a convex polygon is obtained. The proof is indirect.

M. Sekanina.

Manara, C. F.: Sul concetto di equivalenza per i poligoni ed i poliedri. *Periodico Mat.*, IV. Ser. 35, 279—285 (1957).

Verf. nennt äquivalent zwei Polygone P und P' , die sich derart in eine gleiche endliche Zahl von Teilen zerlegen lassen, daß zwischen ihren Teilen eine ein-ein-

deutige Korrespondenz hergestellt werden kann, in der die korrespondierenden Teile kongruent sind. „Kongruent durch Translation“ oder „ T -kongruent“ nennt er zwei ebene Figuren, von denen die eine aus der andern durch eine Translation erhalten werden kann. Und von zwei Polygonen P und P' wird das eine „äquivalent durch Translation“ oder „ T -äquivalent“ dem andern genannt, wenn beide in eine gleiche endliche Zahl von Teilen derart zerlegt werden können, daß man zwischen ihren Teilen eine ein-ein-deutige Korrespondenz herstellen kann, in der die korrespondierenden Teile T -kongruent sind. Man kann leicht Paare von Polygonen konstruieren, die T -äquivalent sind, ohne T -kongruent zu sein. Wenn zwischen zwei Polygonen die oben definierte T -Äquivalenz besteht, so besteht auch die Äquivalenz im üblichen Sinn, aber nicht umgekehrt. Vielmehr sieht man leicht, daß es Paare von Polygonen gibt, die nicht T -äquivalent aber äquivalent im gewöhnlichen Sinn sind. Verf. bedient sich dabei einer Figur, die aus von einem Punkt O ausgehenden Vektoren besteht, die gleich, parallel und gleichgerichtet den orientierten Seiten eines Polygons P sind, und die er „vektorieller Stern bezüglich P “ nennt. Die notwendige Bedingung dafür, daß zwei Polygone P und P' T -äquivalent seien, ist, daß sie beide den selben vektoriellen Stern bezüglich desselben Punktes O haben. Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend. Auf die Analogien zu den Dehnschen Sätzen für Polyeder weist Verf. hin.

M. Zacharias.

Luke, Dorman: Stellations of the rhombic dodecahedron. Math. Gaz. 41, 189—194 (1957).

Thébault, Victor: Sur des faisceaux de sphères et de cercles. Mathesis 66, 172—176 (1957).

Es handelt sich um neue Eigenschaften des Büschels (F) der Umkugeln und der Kugeln der zwölf Punkte eines beliebigen Tetraeders [V. Thébault, Parmi les belles figures de la géométrie dans l'espace (dies. Zbl. 64, 397), S. 109], die ihre Analogie in dem Büschel von Griffiths der Umkreise und der Kreise der neun Punkte eines Dreiecks haben.

M. Zacharias.

Thébault, V.: Tétraèdre à bihauteurs égales. Mathesis 66, 383—385 (1957).

ApSimon, H. G.: Geodesic opposites on a regular tetrahedron. Math. Gaz. 41, 95—97 (1957).

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Deaux, R. et M. Clodic: Équations du sixième degré à racines groupées en ternes involutifs. Mathesis 66, 129—138 (1957).

Aus 6 verschiedenen Punkten der komplexen Zahlenebene kann man 15 Ternen von Punktpaaren bilden. Eine solche Terne heißt involutorisch (i.), wenn es eine Möbiussche Involution gibt, welche die beiden Punkte in jedem ihrer drei Paare vertauscht. Die Frage ist, wieviel der 15 Ternen können involutorisch sein und welche Lage müssen die Punkte dann jeweils haben? Was die Anzahl betrifft, so lautet die Antwort 1, 2, 3, 4, 6. I. In dem trivialen Fall einer einzigen i. Terne kann man drei der Punkte willkürlich annehmen und braucht dieselben dann nur irgendeiner Involution zu unterwerfen, um die drei übrigen zu erhalten. II. Bei zwei i. Ternen können zwei Paare von Punkten (34) und (56) willkürlich angenommen werden, das dritte ist dann das zu beiden harmonische Paar (12) und die beiden i. Ternen sind (12) (35) (46), (12) (36) (45). III. Bei drei i. Ternen entstehen die 6 Punkte aus zwei derselben, 1 und 4, durch wiederholte Anwendung einer und derselben linearen Transformation dritter Ordnung. So ergeben sich die Dreierzyklen (123) und (456) und die i. Ternen sind (16) (25) (34), (15) (24) (36), (14) (26) (35). IV. Wiederholte Anwendung einer linearen Transformation sechster Ordnung auf einen Punkt 1 liefert den Zyklus (123456), dessen Punkte die i. Ternen (14) (23) (56), (16) (25) (34), (12) (36) (45), (14) (25) (36) zulassen. V. Sechs i. Ternen gibt es, wenn sich die 6 Punkte in 3 Paare einteilen lassen, die zu je zweien harmonisch sind. — Ref. bemerkt hierzu: II. Die

beiden Involutionen gehören einer Vierergruppe \mathfrak{B} an. Zwei der 6 Punkte sind die Fixpunkte der dritten Involution von \mathfrak{B} , die 4 übrigen sind homolog bezüglich \mathfrak{B} . III. Die 6 Punkte sind homolog bezüglich einer Diedergruppe der Ordnung 6, welche die drei Involutionen enthält. IV. Die 6 Punkte sind homolog bezüglich einer zyklischen Gruppe sechster Ordnung und die vier Involutionen sind in der zugehörigen Diedergruppe der Ordnung 12 enthalten. V. Die 6 Punkte sind, auf der Riemannschen Zahlenkugel, die Ecken eines regulären Oktaeders und die 6 Involutionen gehören als Umklappungen um die 6 Querlinien des Oktaeders der Oktaedergruppe an. — Bei der Untersuchung setzen die Verff. die Existenz einer i. Terne voraus und betrachten die den 6 Punkten zugeordneten komplexen Zahlen als Wurzeln der Gleichung $z^6 + az^4 + bz^2 + c = 0$. Jeder der Fälle II bis V ist dann durch gewisse Beziehungen zwischen a, b, c charakterisiert.

E. Schönhardt.

Ringel, G.: Über Geraden in allgemeiner Lage. *Elemente Math.* 12, 75—82 (1957).

Endlich viele Geraden in der Ebene, unter denen keine Parallelen vorkommen und von denen keine drei durch einen Punkt gehen, heißen Geraden in allgemeiner Lage oder auch: sie bilden eine einfache Konfiguration. In dieser Note wird über einige Eigenschaften solcher Konfigurationen berichtet (teilweise mit Beweisen). Zwei einfache Konfigurationen \mathfrak{K} und \mathfrak{K}' mit je m Geraden heißen äquivalent, wenn die Menge der durch \mathfrak{K} gebildeten Zellen eineindeutig derart auf die Menge der von \mathfrak{K}' gebildeten Zellen abgebildet werden kann, daß benachbarten Zellen von \mathfrak{K} stets benachbarte Zellen von \mathfrak{K}' entsprechen. Für $m \leq 7$ wird die Anzahl der Klassen nicht-äquivalenter einfacher Konfigurationen mit m Geraden sowohl in der euklidischen wie in der projektiven Ebene angegeben. Es wird gezeigt, wie man jede einfache Konfiguration von m Geraden in jede andere einfache Konfiguration von m Geraden durch gewisse Verschiebungen und Drehungen überführen kann. Jeder durch eine einfache Konfiguration hervorgehenden Zellenzerlegung der Ebene läßt sich eine Matrix zuordnen, deren Elemente nur aus $+1$ und -1 bestehen (s. eine frühere Arbeit des Verf., dies. Zbl. 70, 161). Es werden Eigenschaften dieser Matrizen angegeben. Insbesondere wird gezeigt: Zwei einfache Konfigurationen \mathfrak{K} und \mathfrak{K}' sind dann und nur dann äquivalent, wenn die zugehörigen Matrizen S und S' äquivalent sind. Erwähnt wird auch die Frage, wann es zu gegebener Matrix, deren Elemente nur $+1$ und -1 sind, eine einfache Konfiguration \mathfrak{K} gibt.

N. Hofreiter.

Locher-Ernst, L: Die Gliederung des projektiven Punktraumes durch sechs Ebenen. *Elemente Math.* 12, 25—33 (1957).

Verf. schildert die Raumteile, die bei der Teilung des projektiven Raumes durch sechs Ebenen entstehen.

R. Lingenberg.

Godeaux, Lucien: Sur un problème de géométrie énumérative. *Bull. Soc. roy. Sci. Liège* 26, 99—104 (1957).

Die Raumgeraden, welche drei Ebenenpaare in den Punkten einer Involution schneiden, bilden nach J. Neuberg [*Mathesis*, III. Sér. 2 (1902)] einen Graßmannschen Komplex. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes, die Verf. schon als Abiturient behandelt hat [*Nouv. Ann. Math.*, IV. Sér. 7, 395—399 (1907)], betrifft in einem projektiven S_r , in dem $(n+1)^k$ geordnete Gruppen von je k linearen S_{r-n} gegeben sind, die Frage nach dem Orte der linearen S_n , welche die $(n+1)^k$ Gruppen der S_{r-n} in Gruppen von je k Punkten schneiden, zwischen denen eine in den Koordinaten jedes Punktes lineare Beziehung besteht. Es wird gezeigt, daß jene S_n dieser Art, welche einen linearen S_{n-1} enthalten, einen Kegel der Ordnung $N = \sum_{p=1}^k p \binom{k}{p} n^p$

bilden. — Setzt man $r=3$, $n=2$, $k=2$, so wird die lineare Beziehung eine Reziprozität in S_2 ; dann gilt der Satz, daß die Ebenen von S_3 , welche neun geordnete Paare von Geraden nach neun geordneten Paaren von konjugierten Punkten einer

Reziprozität schneiden, eine Fläche Σ der Klasse 12 umhüllen. Für eine Reihe weiterer Sätze dieser Art muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. *K. Strubecker.*

Marnion, A.: Sur les axes des cylindres de révolution passant par 2, 3, 4, 5 points. *Mathesis* **66**, 261—268 (1957).

Verf. zeigt zunächst, daß die Achsen aller Drehzylinder, die dieselben zwei Punkte enthalten, einen harmonischen tetraedralen Komplex bilden; die Komplexkegel sind orthogonal, die Komplexkurven sind in einfacher Weise festlegbare Parabeln. Hieraus folgt, daß die Achsen aller Drehzylinder, die mit drei festen Punkten inzident sind, eine algebraische Kongruenz (4, 3) erfüllen und ferner, daß die Achsen aller einem Tetraeder umschriebenen Drehzylinder im allgemeinen einer Regelfläche 9. Grades mit kubischem Richtkegel angehören. Im Falle eines regulären Tetraeders zerfällt diese Fläche in drei Plückersche Konoide. Schließlich wird bewiesen, daß sich durch fünf Punkte allgemeiner Lage sechs Drehzylinder legen lassen; im trivialen Fall, daß sich die Punkte in einer Ebene befinden, sind zwei der Zylinder ausgeartet.

H. Horninger.

Bereis, R. und H. Brauner: Über koaxiale euklidische Schraubungen. *Monatsh. Math.* **61**, 225—245 (1957).

Transformiert man die Bahnkurven einer euklidischen Schraubung mittels a) eines koaxialen Nullsystems \mathfrak{N} , b) der Polarität eines koaxialen Drehparaboloids Π_1 , c) der Polarität eines koaxialen gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids Π_2 so erhält man, wie aus der Betrachtung der Dreh- und Schiebkomponente der Schraubung unmittelbar hervorgeht, die Schraubtorsen derselben Schraubung für a) und c), jedoch der entgegengesetzt gewundenen Schraubung für b). Die hierbei auftretenden Zuordnungen hängen eng mit wohl bekannten kubischen Punkt- und Ebenenverwandtschaften zusammen. Die genannten Korrelationen sind im übrigen die einzigen involutorischen, welche die Gesamtheit aller koaxialen Schraubungen invariant lassen. Der verwendete, sich auf die „Drehfluchten“ von Th. Schmid stützende konstruktive Apparat wird anschließend noch dazu eingesetzt, die Schnittkongruenzen des Schraubtangentialkomplexes \mathfrak{T} mit dem zu \mathfrak{N} gehörigen Strahlgewinde bzw. mit den Tangentialkomplexen von Π_1 und Π_2 zu studieren. Im ersten Fall erhält man eine (2, 2)-Kongruenz, bestehend aus den Bahntangenten der Punkte eines bestimmten Schraubzylinders, in den anderen Fällen sind es (4, 4)-Kongruenzen. Diese besitzen als Brennflächen Π_1 und eine gewisse Drehfläche 7. Ordnung, bzw. Π_2 und eine autopolare (nicht näher gekennzeichnete) algebraische Fläche. Die Komplexkurven von \mathfrak{T} auf Π_1 und Π_2 sind explizit angebar; im ersten Fall sind sie transzendent, im zweiten handelt es sich um Raumkurven 4. Ordnung I. Art (Grenzformen der von S. Lie ermittelten Kurven eines tetraedralen Komplexes auf Flächen 2. Ordnung, die das Grundtetraeder des Komplexes zum Poltetraeder haben). Die zugehörigen Schraubgratpunkte erfüllen beide Male eine Fläche 4. Ordnung.

W. Wunderlich.

McCarty, J. P.: The cissoid of Diocles. *Math. Gaz.* **41**, 102—105 (1957).

Algebraische Geometrie:

Serre, Jean-Pierre: Sur la cohomologie des variétés algébriques. *J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. **36**, 1—16 (1957).

In Ergänzung zu seiner großen Arbeit (dies. Zbl. **67**, 162, im folgenden zitiert mit S) löst Verf. hier einige dort offen gebliebene Probleme über kohärente algebraische Garben \mathfrak{F} über einer algebraischen Mannigfaltigkeit X/k (dabei bedeutet k einen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper). Das erste Resultat gibt eine kohomologietheoretische Charakterisierung der affinen Mannigfaltigkeiten: falls $H^1(X, \mathfrak{F}) = 0$ für jede aus Idealen bestehende Garbe \mathfrak{F} , so ist X affin. Dieser Satz ist eine Umkehrung des Resultats in S über affine Mannigfaltigkeiten. Es stellt in der algebraischen Geometrie das Analogon zu der bekannten kohomologie-

theoretischen Charakterisierung der Steinschen Mannigfaltigkeiten in der mehrdimensionalen Funktionentheorie dar. (Vgl. hierzu H. Cartan, École Norm. Sup., Séminaire H. Cartan, 4^e année 1951/52). — Das zweite Resultat besagt, daß stets $H^q(X, \mathfrak{F}) = 0$ für $q > \dim X$. In S wurde dieses Resultat nur für affines oder projektives X bewiesen. — Das dritte Resultat besagt schließlich, daß unter Voraussetzung der Vollständigkeit von X der k -Modul $H^0(X, \mathfrak{F})$ endlichdimensional ist. Es bleibt offen, ob auch die $H^i(X, \mathfrak{F})$ mit $0 < i < \dim X$ endlichdimensional sind, wie es in S für projektives X bewiesen wurde. Die Vollständigkeit von X wird vom Verf. folgendermaßen definiert: X heißt vollständig, wenn für jede algebraische Mannigfaltigkeit Y und für jeden abgeschlossenen Teil Z (im Sinne der Zariskischen Topologie) von $X \times Y$ die Projektion $\text{pr}_Y(Z)$ abgeschlossen in Y ist. Es wird gezeigt, daß diese Definition identisch ist mit der von Weil in seinem Buch gegebenen Definition (Foundations of Algebraic Geometry, New York 1946). Ferner wird gezeigt, daß X genau dann vollständig ist, wenn es Bild einer projektiven Mannigfaltigkeit bei einer regulären Abbildung ist. [Für das letztere vgl. auch Chow, Princeton math. Series 12, 122—128 (1957).]

P. Roquette.

Cartier, Pierre: Calcul différentiel sur les variétés algébriques en caractéristique non nulle. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 1109—1111 (1957).

In algebraischen Mannigfaltigkeiten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k wird der Begriff des Differentialoperators definiert, und der Mannigfaltigkeit werden in kanonischer Weise gewisse Faserstrukturen zugeordnet. Die allgemeinen Ergebnisse über diese Faserräume werden in dem Fall, daß k eine von Null verschiedene Charakteristik besitzt, einerseits auf algebraische Gruppen angewandt, und liefern andererseits einen Satz über die vollständige Integrierbarkeit gewisser Differentialgleichungssysteme.

H.-J. Kowalsky.

Godeaux, Lucien: Observation sur la construction de surfaces algébriques non rationnelles de genres zéro. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 43, 587—589 (1957).

Une surface F régulière de genre $p_a = 1$, $p^{(1)} > 1$ contient une involution du 2^e ordre sans points unis, l'image de celle-ci f sera régulière de genre $p_a = 0$ et de genre linéaire π tel que $2\pi = p^{(1)} + 1$; le système bicanonique de F ne peut être composé avec I car il en résulterait $\pi = 2\pi$; il contient deux systèmes linéaires composés avec I auxquels correspondent sur f deux systèmes $|K_1|$ et $|K_2|$ de dimensions $\pi - 1$; les $|K_1|$ découpent sur la courbe K image de la canonique de F la série canonique, les $|K_2|$ y découpent une série paracanonique; il s'en déduit facilement que $|K_2''| = |K_2|$; $|K_2|$ est donc système bicanonique de f dont le bigenre est π . Ce système contient deux fois la courbe K qui pourtant n'est pas canonique de f .

B. d'Orgeval.

Godeaux, Lucien: Sur la construction de surfaces projectivement canoniques. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 43, 699—704 (1957).

L'homographie H d'ordre 3: $x'_0:x'_1:x'_2:x'_3:x'_4:x'_5 = x_0:x_1:x_2:x_3:x_4:x_5$ conserve dans S^5 la surface F d'équations $f_1(x_0, x_1, x_2, x_3) + g_1(x_4, x_5) = 0$, $f_2(x_0, \dots, x_3) + g_2(x_4, x_5) = 0$, $f_3(x_0, \dots, x_3) + g_3(x_4, x_5) = 0$ les f et g étant des formes d'ordre 3 de quatre et de deux variables; on suppose que dans $x_4 = x_5 = 0$ les f se coupent en 27 points simples, que sur $x_0 = \dots = x_3 = 0$ les g soient sans points communs. Caractères de F et de la surface G image de l'involution engendrée sur F par H dont les points unis sont de 1^e espèce construction du système canonique de G d'où représentation de cette surface par une surface de S^{19} dont les sections hyperplanes forment le système canonique complet. Les équations de cette transformée birationnelle de G sont particulièrement simples. Esquisse de la généralisation.

B. d'Orgeval.

Bonera, Piero: Sopra alcune generalizzazioni della superficie desmica. Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend., Cl. Sci. mat. natur. 91, 403—412 (1957).

Dedo a remarqué (ce Zbl. 50, 158; 51, 380) qu'une surface desmique est le lieu d'un point (x, y, z, t) tel que le rapport anharmonique (x^2, y^2, z^2, t^2) soit constant. L'A. généralise en considérant dans un espace S_m ($m \geq 3$) un point x_0, x_1, \dots, x_m tel qu'il existe une projectivité entre les nombres $x_0^n, x_1^n, \dots, x_m^n$ et un groupe de $m+1$ éléments donnés sur une courbe rationnelle. Ce lieu est une surface algébrique d'ordre $(m-1)n^{m-2}$. Etude des droites tracées sur la surface, des points singuliers et des collinéations transformant la surface en soi.

L. Godeaux.

Rosina, B. A.: Sopra una corrispondenza $[1, n-1]$ che si incontra nella teoria diametrale e sulle proprietà che ne derivano per le curve algebriche piane. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser. 6, 13—26 (1957).

Si $U_n(x, y)$ est une forme algébrique binaire de degré n , la courbe $U_n + U_{n-1} + \dots + U_0 = 0$ a comme diamètre conjugué à la direction m la droite $x (\partial U_n / \partial x_0) + y (\partial U_n / \partial y_0) + U_{n-1}(x_0, y_0) = 0$ pour $x_0 = 1, y_0 = m$. Entre la direction m' de ce diamètre et m , on a une correspondance $(1, n-1)$. Etude de cette correspondance.

L. Godeaux.

Rosina, B. A.: Costruzione per „Piccola variazione“ delle curve algebriche sghembe con l'ausilio delle loro secanti multiple. I, II. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser. 6, 41—72, 73—120 (1957).

L'A. donne la classification des courbes algébriques gauches jusqu'à l'ordre sept. Partant d'une courbe d'ordre n et de genre p tracée sur une surface F , il y ajoute une i -sécante de cette courbe et en déduit, par „petite variation“, une courbe d'ordre $n+1$ et de genre $p+i-1$, tracée sur F . Il retrouve les familles et sous-familles données par Halphen et Noether, il y ajoute quelques sous-familles nouvelles. Il s'attache à la détermination des plurisécantes des courbes et des multilatères en lesquels elles peuvent dégénérer.

L. Godeaux.

Tremont, Jacques: Sur une transformation birationnelle du plan et sa représentation hyperspatiale. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 43, 442—451 (1957).

Le réseau homaloïdal des courbes d'ordre $4n+1$ dotées de quatre points A_i d'ordre $2n$ et de $2n$ points doubles B_j définit une transformation de Cremona T dont l'inverse est du même type; il existe quatre courbes fondamentales d'ordre $2n$ passant simplement aux points B et n fois par trois des A , $n-1$ fois au quatrième de ces points A , et $2n$ coniques fondamentales passant aux quatre points A et en un B . Les courbes H d'ordre $2n+1$ passant simplement en B , n fois en A , définissent une surface F d'ordre $2n+1$ de S^{n+2} à sections de genre n , image des couples homologues par T . Etude des courbes de cette surface correspondant aux courbes fondamentales du plan; sur F est un faisceau de coniques dont les plans engendrent une V_n^3 contenue dans toute hyperquadrique qui contient F . Si l'on suppose la T involutive, le passage par F permet d'établir qu'il y a une courbe unie d'ordre $2n-1$ passant $n-1$ fois par les A et tangentes dans les B aux coniques fondamentales; les trois points diagonaux du quadrangle des A sont des points unis isolés. Cette involution se représente par une surface réglée rationnelle normale de S^n ayant pour courbe de diramation trois génératrices et une courbe d'ordre $2n-1$ bisécante des génératrices.

B. d'Orgeval.

Bilo, Julien: Sur une transformation quadratique. Mathesis 66, 176—182 (1957).

Ist zwischen zwei aufeinanderliegenden Ebenen eine birationale Transformation gegeben, so nennt man „erste isologe Kurve des Zentrums S “ den Ort eines Punktes P derart, daß die den Punkt P mit dem homologen Punkt P_1 verbindende Gerade durch den festen Punkt S geht. Der Ort des Punktes P_1 heißt „zweite isologe Kurve des Punktes S “. Ist die Transformation eine allgemeine quadratische, so gehört die erste isologe Kurve von S zu dem Netz der Kubiken, deren Grundpunkte die drei

Fundamentalphunkte der ersten Ebene und die vier vereinigten Punkte der Transformation sind. Die zweite isologe Kurve gehört zu dem Netz der Kubiken, deren Grundpunkte die drei Fundamentalphunkte der zweiten Ebene und die vier vereinigten Punkte sind. — Verf. untersucht die isologen Kubiken einer besonderen quadratischen Transformation, die sich von der allgemeinen dadurch unterscheidet, daß drei der Grundpunkte des ersten Netzes isologer Kubiken unendlich benachbarte Punkte der Fundamentalphunkte sind, während alle Grundpunkte des zweiten Netzes wirkliche Punkte sind.

M. Zacharias.

Thalberg, Olaf M.: „Conic involutions“ with a coincident curve of order $4n$. Avhdl. Norske Vid., Akad. Oslo, I 1957, Nr. 2, 16 p. (1957).

L'A. étudie une transformation birationnelle involutive du plan dont les couples de points homologues sont sur les coniques d'un faisceau dans le cas où la courbe lieu des points unis est d'ordre $4n$ et passe $2n$ fois par deux des points-base du faisceau de coniques et $2n - 1$ fois par les deux autres. Il commence par l'examen du cas où $n = 1$.

L. Godeaux.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

Serini, Rocco: Destra e sinistra nella fisica. Rend. Sem. mat. fis. Milano 26 (1954—55), 103—115 (1957).

Verf. stellt eine wohlbekannte Tatsache fest, nämlich, daß im dreidimensionalen Raume eine eindeutige Zuordnung eines kontravarianten Vektors zu einem Bivektor nur dann zustande kommt, wenn der Raum orientiert wird. Es werden die ε -Tensoren von Ricci behandelt und mit ihrer Hilfe das vektorielle Produkt von zwei Vektoren gebildet. Am Ende befinden sich einige physikalische Anwendungen (Winkelgeschwindigkeit, Begriff der Rotation eines Vektorfeldes, Satz von Stokes, Maxwellsche Gleichungen). Die Arbeit enthält nichts wesentlich Neues.

St. Götab.

Schatz, Heinrich: Over the composition of motions in the space. Bull. College Arts Sci., Baghdad 2, 84—91 (1957).

1891 stellte E. Study die Bewegungen des dreidimensionalen euklidischen Raumes mittels dualer Quaternionen (Biquaternionen) dar. Ohne hierauf näher hinzuweisen, ordnet Verf. nun einer Bewegung ein Vektorpaar zu, nämlich die Vektorbestandteile von Real- und Dualteil der Studyschen dualen Quaternionen, und führt beweislos und nicht in allgemeinsten Form die (aus der Quaternionenmultiplikation ohne weiteres folgenden) Regeln der Zusammensetzung zweier Bewegungen an. Als Anwendungen werden zahlreiche Sonderfälle, insbesondere die Zusammensetzungen von Drehungen und Schiebungen behandelt. H. R. Müller.

Basch, A.: Eine massengeometrische Deutung der Invarianten des ebenen Laplaceschen Feldes. Z. angew. Math. Mech. 37, 266—268 (1957).

L'A. présente — en relation avec son étude de 1934 sur la géométrie des champs scalaires ou vectoriels (ce Zbl. 10, 269) — une interprétation géométrique, à l'aide de l'inversion, des propriétés de courbure des lignes de niveau et de courant d'un champ plan de Laplace, généré sous l'action d'un nombre fini de masses ponctuelles, agissant comme charges réelles (positives ou négatives, selon qu'il y a attraction ou répulsion) et centres de tourbillons, aux masses imaginaires.

A. Froda.

Fabian, William: Tensor integrals. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. 10, 145—151 (1957).

$\delta/\delta t$ bezeichne die absolute Ableitung längs einer Kurve l kovariant zum affinen Zusammenhang L_{jk} einer V_n . Dann wird als Tensorintegral $\int T_{v_1 \dots v_q}^{u_1 \dots u_p} \delta t$ jede Lösung $X_{v_1 \dots v_q}^{u_1 \dots u_p}$ des Systems von $n^p + q$ Differentialgleichungen

$$T_{v_1 \dots v_q}^{u_1 \dots u_p} = \frac{\delta}{\delta t} (X_{v_1 \dots v_q}^{u_1 \dots u_p})$$

angesehen, in welchem rechts $X_{v_1 \dots v_q}^{u_1 \dots u_p}$ einen Tensor $(p+q)$ -ter Stufe bezeichnet. Das Tensorintegral hat mit $T_{v_1 \dots v_q}^{u_1 \dots u_p}$ Komponenten von gleichem Typus und gleicher Stufe, es existiert mit stetigen Komponenten längs l , sobald die Ableitungen dx^n/dt , die Komponenten des affinen Zusammenhangs und die Komponenten $T_{v_1 \dots v_q}^{u_1 \dots u_p}$ längs l stetige Funktionen in t sind, und es verhält sich analytisch in t längs l , wenn die x^n , L_{jk}^i und $T_{v_1 \dots v_q}^{u_1 \dots u_p}$ längs l analytische Funktionen von t sind. — Ferner gilt: sind die für stetige bzw. analytische Komponenten längs l notwendigen Bedingungen erfüllt, so besteht die Beziehung

$$\int T_{v_1 \dots v_q}^{u_1 \dots u_p} \delta t = A_{v_1 \dots v_q}^{u_1 \dots u_p} - P_{v_1 \dots v_q}^{u_1 \dots u_p},$$

wobei $A_{v_1 \dots v_q}^{u_1 \dots u_p}$ ein partikuläres Tensorintegral des gegebenen Tensors bezeichnet und $P_{v_1 \dots v_q}^{u_1 \dots u_p}$ Tensorkomponenten sind, die durch Parallelverschiebung längs l aus einem willkürlichen Anfangstensor hervorgehen. — Nun seien überdies W ein längs l stetiger Tensor und U ein solcher, dessen absolute Ableitung längs l stetig ist. Dann gilt (partielle Integration):

$$\int_{t_0}^{t_1} U W \delta t = (U \int W \delta t)_{t_1} - (P)_{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\delta U}{\delta t} \int W \delta t \right] \delta t,$$

wobei $(P)_{t_1}$ die Komponenten eines Tensors im Kurvenpunkt t_1 darstellt, der längs l durch Parallelverschiebung des Tensors $(U \int W \delta t)_{t_0}$ vom Kurvenpunkt t_0 bis t_1 erhalten wird. — Sind die Komponenten W eines Tensors stetig längs l , so ist das m -te Tensorintegral von W längs l mit den Grenzen t_0 und z durch

$$\frac{1}{(m-1)!} \int_{t_0}^z (z-t)^{m-1} W \delta t$$

gegeben. Das Ergebnis kann auf beliebige reelle Werte von m ausgedehnt werden. Zum Schluß werden „Tensorentwicklungen“ in einem Konvergenzintervall betrachtet.

M. Pinl.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Savasta, Carmelo: Sulle eliche cilindriche. Atti Soc. Peloritana Sci. fis. mat. natur. **3**, 339—342 (1957).

En partant des formules de Frenet on détermine les courbes pour lesquelles le rapport de la courbure et de la torsion est constant. On examine surtout le cas dans lequel ce rapport a la valeur $\pm i$.

G. T. Gheorghiu.

Savasta, Carmelo: Una notevole classe di geodetiche. Atti Soc. Peloritana Sci. fis. mat. natur. **3**, 343—346 (1957).

On détermine l'équation des géodésiques d'un cylindre et on retrouve le résultat connu: ces courbes sont des hélices.

G. T. Gheorghiu.

Greenspan, Donald: Note on vertices in Euclidean 3 space. Amer. math. Monthly **64**, 731—733 (1957).

Verf. zeigt, daß eine analytische Raumkurve — mit $1/\rho$, $1/\tau \neq 0$ in jedem Punkt — die Schmiegunskugel in einem Punkt, in dem der Radius der Schmiegunskugel einen Extremwert annimmt, nicht notwendig in 4. Ordnung berührt. Ein Beispiel bildet die Schraubenlinie $1/\rho = 1/\tau = 1 + s^2$.

H. Tolle.

Saban, Giacomo: Estensione alle superficie rigate chiuse di un teorema di Fenchel ed Avakumovic. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A **21**, 245—251 (1957).

Notwendig und hinreichend dafür, daß eine geschlossene sphärische Kurve c^* das Tangentenbild einer anderen geschlossenen Kurve c auf einer Kugel sei, ist, daß c^* die Kugelfläche halbiert. Von diesem Satz, der Ergebnisse von W. Fenchel (dies. Zbl. **9**, 127) und V. G. Avakumovic [Srpska Akad. Nauka, Zbornik Radova, math. Inst. **7**, 101—108 (1951)] umfaßt, gibt Verf. folgende Verallgemeinerung: Notwendig und hinreichend dafür, daß eine geschlossene Regelfläche \mathfrak{R}^* die Fläche

der Zentralnormalen einer anderen geschlossenen Regelfläche \mathfrak{R} sei, ist, daß das sphärische Richtungsbild der Erzeugenden von R^* die Fläche der Einheitskugel halbiert und daß die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden von R^* geschlossene Kurven sind. Die Beweismethode ist derjenigen von W. Scherrer (dies. Zbl. 60, 351) nachgebildet und verwendet die von W. Blaschke eingeführte Darstellung der Erzeugenden einer Regelfläche durch duale Einheitsvektoren. *K. Strubecker.*

Kaul, R. N.: Generalized normal curvature of a vector field. Tensor, n. Ser. 7, 110—116 (1957).

The normal curvature of a unit vector field in a surface S in E_3 with respect to a curve on S , is defined by Pan (this Zbl. 47, 404) in terms of the congruence of normals to S . The author replaces the congruence of normals by another congruence of directions and gets the generalized normal curvature from which generalized asymptotic directions, principal generalized directions and lines of generalized curvature of a vector field are considered. The concept is also generalized to curves on a V_n immersed in V_{n+1} . *L. A. Santaló.*

Vincensini, Paul: Sur la déformation de certains réseaux isogonaux d'une surface. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 12, 377—384 (1957).

Verf. hat schon früher Netze auf einer Fläche betrachtet, die folgendermaßen bestimmt sind: Jedem Punkt P der Fläche F werde durch eine zweimal stetig differenzierbare Vorschrift ein Punkt I seiner Tangentialebene zugeordnet. Es gibt (mit einer Ausnahme) zwei Fortschreitungsrichtungen von P auf F , denen eine dazu senkrechte von I entspricht. Das so auf F definierte Netz bleibt invariant, wenn die Tangentialebenen und Punkte I bei Verbiegung von F mitgeführt werden. — Die Punkte I sollen nun so definiert werden: Man betrachte eine Kugelkongruenz mit Kugelmittelpunkten auf F und wähle den Punkt I so, daß er Schnittpunkt der Tangentialebene mit der Geraden ist, welche die Berührungspunkte der Kongruenzkugel (auf den zwei Kugelenveloppen) miteinander verbindet. Durch Angabe der Radien $\varrho(u, v)$ der Kugeln oder der Funktion $\varrho = \frac{1}{2} R^2$ ist das Netz bestimmt. — In vorliegender Arbeit handelt es sich um Netzkurven, die sich unter festem Winkel α ($0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$) schneiden. ϱ muß dann der Gleichung $(2 - \Delta_2 \varrho)^2 = \cos^2 \alpha [(\Delta_2 \varrho)^2 - 4 \Delta_{22} \varrho]$ genügen, wo die Δ die Beltramischen Differentialparameter sind. — Die Bestimmung der invarianten isogonalen Netze wird mit einer anderen Aufgabe in Zusammenhang gebracht: Man teile die Strecken $F_1 F_2$ der Hauptkrümmungsmittelpunkte F_1, F_2 einer Fläche F in konstantem Verhältnis k . Die Ebenen senkrecht zu $F_1 F_2$ durch den Teilpunkt I sollen eine Kugel umhüllen. F heißt dann eine Fläche mit sphärischer Fokalenvelope vom Index k . — Der angegebene Zusammenhang lautet für Kugelbiegungsflächen nun folgendermaßen: Das Problem, die invarianten isogonalen Netze mit Winkel α einer Kugelbiegungsfläche zu bestimmen, ist äquivalent dem der Bestimmung der Flächen mit sphärischer Fokalenvelope des Index $k = -\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha$. — Allgemein werden noch die Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ diskutiert. Der Fall, daß I Mittelpunkt von $F_1 F_2$ ist, spielt in Weingartens Verbiegung des Rotationsparaboloids eine Rolle. *E. Rembs.*

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Laugwitz, Detlef: Eine Beziehung zwischen affiner und Minkowskischer Differentialgeometrie. Publ. math. Debrecen 5, 72—76 (1957).

Bedeutet im n -dimensionalen zentrisch-affinen Raum J eine geschlossene konvexe Hyperfläche, welche den Nullpunkt im Innern enthält, so können mit Hilfe dieser Fläche zwei verschiedene Metriken definiert werden, und zwar eine Minkowskische Metrik desjenigen Raumes, deren Indikatrix eben J ist, und eine Flächenmetrik der homogen-affinen Geometrie. Die Minkowskische Metrik induziert auf der Indikatrix J eine Riemannsche Metrik. Es wird nun der Satz bewiesen, daß diese induzierte Riemannsche Metrik mit der Metrik der homogen-affinen Flächentheorie bis aufs

Vorzeichen übereinstimmt. Mehrere geometrische Interpretationen und Folgerungen werden angegeben. Aus der Identität der metrischen Grundtensoren folgt unmittelbar die Identität der affinen Differentialgeometrie der Fläche J mit der Minkowskischen Geometrie, deren Eichfläche J ist. Auch in den Finslerschen Räumen kann man den bewiesenen Satz mit Vorteil anwenden, da der Finslerraum als ein Punkt-raum aufgefaßt werden kann, in dem für jeden Punkt P im zentrisch-affinen Tangentialraum eine Fläche J ausgezeichnet ist.

A. Moór.

Kallenberg, G. W. M.: Differential geometry of a particular group of projective transformations. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 60, 147—158 (1957).

Die sechsgliedrige Gruppe Γ aller Transformationen des dreidimensionalen affinen Raums der Gestalt: $x'_1 = x_1 + ax_2 + bx_3 + c$, $x'_2 = x_2 + dx_3 + e$, $x'_3 = x_3 + f$ definiert im Sinne von Kleins Erlanger Programm eine selbstduale Geometrie deren absolutes Gebilde aus einer Ebene, einer Geraden und einem Punkt besteht, welche paarweise inzident sind. Es werden die Grundbegriffe der zu Γ gehörenden Differentialgeometrie entwickelt, die natürlichen Gleichungen und die Ableitungsgleichungen der Kurven- und Flächentheorie aufgestellt sowie u. a. Flächenkurven und spezielle Raumkurven betrachtet. Die erhaltenen Formeln sind im allgemeinen eher einfacher als die entsprechenden der (zur ebenfalls sechsgliedrigen Bewegungsgruppe gehörenden) euklidischen Differentialgeometrie; es treten jedoch mehr Entartungsfälle als etwa bei der von K. Strubecker untersuchten Differentialgeometrie des isotropen Raumes auf.

K. Leichtweiß.

Svec, Alois: Sulla teoria delle congruenze di rette. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 12, 446—457 (1957).

A report on results obtained by E. Čech and the author on congruences of lines (i. e. ∞^2 lines (u, v) having focal surfaces, in any projective space). The configuration called „congruence with projective connexion“ is obtained by attaching to each line (u, v) a three-dimensional projective space containing the line and giving a homography between the spaces attached to the lines (u, v) , $(u + du, v + dv)$.

E. Bompiani.

Su Buchin: Godeaux sequences and associate Laplace sequences of a projective minimal surface. Acad. roy. Belgique. Bull. Cl. Sci., V. Sér. 43, 569—576 (1957).

L'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface (x) possède, en dehors de (x) , quatre nappes. L'A. appelle chacune de ces nappes une transformée de Demoulin de (x) . Lorsque (x) est minima-projective, les transformées de Demoulin de (x) sont distinctes et il y a conservation des asymptotiques. Si $\dots, U_1, U, V, V_1, \dots$ et $\dots, \bar{U}_1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}_1, \dots$ sont les suites de Laplace associées dans S_5 par Godeaux (La théorie des surfaces et l'espace réglé, ce Zbl. 9, 227,) à la surface (x) et à une de ses transformées de Demoulin (\bar{x}) , les droites UV et $\bar{V}_1\bar{V}_2$ se coupent en un point r et les droites $\bar{U}\bar{V}$ et U_1U_2 en un point \bar{r} . Les surfaces (\bar{r}) , (r) représentent des congruences W étudiées par l'A.

L. Godeaux.

Karapetjan, S. E.: Der geschlossene Zyklus von vier Kongruenzen. Mat. Sbornik, n. Ser. 41 (83), 177—194 (1957) [Russisch].

The paper deals with the most general closed cycles of four congruences having the property that a ray of each congruence intersects the corresponding ray of the successive congruence at one of its foci. After demonstrating the validity of the existence theorem for such a cycle and for the cycle with a stratifiable pair of congruences, the author investigates, in particular, parabolic cycles with a stratifiable pair of congruences, for which the second pair will also be stratifiable and the cycle reduces to the configuration of Finikov. When the diagonals of the gauche quadrilateral described by the sides of the closed cycle have their foci at the vertices of the quadrilateral, we obtain the configuration Θ_{13} . It is shown that such a configuration Θ_{13} exists and the Θ_{13} with a pair T of contrary congruences are called special cycles.

and each pair T the incomplete sequence of Laplace. Developables of both contrary congruences of each pair T correspond oppositely to each other. One of the incomplete sequences of Laplace in a special cycle can be assigned arbitrarily, and two special cycles can be constructed on an incomplete sequence of Laplace, so that we derive an infinite sequence of incomplete sequences of Laplace by continuation of the same process on each incomplete sequence of Laplace. Further results are obtained on linear complexes, to which belong all the congruences of the infinite sequence.

Su Buchin.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Varga, O.: Über Riemannsche Räume, die freie Beweglichkeit besitzen. Begriff des Raumes in der Geometrie. Ber. Riemann-Tagung Forsch.-inst. Math. 123—130 (1957).

L'A. donne une nouvelle démonstration du théorème de Helmholtz-Lie, suivant lequel si un espace de Riemann V_n est à libre mobilité, alors V_n est à courbure constante. On sait qu'un espace V_n est dit à libre mobilité s'il possède un groupe de mouvements transitif sur l'ensemble des repères orthonormaux associés à ses points. Bien que la démonstration de l'A. utilise cette hypothèse de libre mobilité, quand l'A. suppose qu'un certain système aux dérivées partielles est complètement intégrable, la notion de libre mobilité est définie dans l'énoncé du théorème par la propriété de V_n de posséder un groupe transitif dans l'ensemble des directions tangentes à V_n (Richtung). On sait que les espaces satisfaisant à cette dernière condition, qu'on appelle espaces homogènes et isotropes, ou avec Birkhoff, espaces 2-points homogènes, forment une classe plus étendue que celle des espaces à courbure constante. Les espaces de cette classe ont été déterminés par J. Tits (ce Zbl. 67, 123). Pour obtenir les espaces à courbure constante, il suffit de supposer que le groupe des mouvements est transitif sur l'ensemble des facettes planes à deux dimensions tangentes à V_n .

C. Teleman.

Rozenfeld'd, B. A.: Zur Theorie der symmetrischen Räume vom Range 1. Mat. Sbornik, n. Ser. 41 (83), 373—380 (1957) [Russisch].

In an n -dimensional projective space of real domains Φ , complex domains $\Phi(i)$, quaternion domains $\Phi(i, j)$ and a two-dimensional projective space of octave domains $\Phi(i, j, l)$ the distance ω between two points x_i, y_i is defined by the formula $\cos^2(\omega/r) = (\sum x_i \bar{y}_i \cdot \sum y_i \bar{x}_i) / (\sum x_i \bar{x}_i \cdot \sum y_i \bar{y}_i)$ with positive number r , and thence the real, complex, quaternion and octave non-euclidean spaces $S_n, K_n(i), K_n(i, j)$ and $K_2(i, j, l)$ are derived. They are only compact symmetric spaces with simple fundamental groups. By algebraic method the equations of geodesics, twodimensional elemental curvature as well as some trigonometrical formulae in $K_n(i), K_n(i, j), K_2(i, j, l)$ are found and a geometrical interpretation to the deviation angle of a twodimensional element of Širokov is given.

Su Buchin.

Širokov, P. A.: Über einen Typus von symmetrischen Räumen. Mat. Sbornik, n. Ser. 41 (83), 361—372 (1957) [Russisch].

In this posthumous manuscript of the author there is considered the symmetric space of even dimensions with the following structure of the curvature tensor at a point of the space: $\frac{1}{2} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \alpha (a_{\alpha[\gamma} a_{\delta]\beta} + b_{\alpha[\gamma} b_{|\beta|\delta]} + b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta})$, where $a_{\alpha\beta}$ denotes the value of components of the fundamental tensor at the point, and $b_{\alpha\beta}$ denotes that of the skewsymmetric tensor connected with $a_{\alpha\beta}$ by the relations $b_{\alpha}{}^{\sigma} b_{\beta\sigma} = a_{\alpha\beta}$ ($b_{\alpha}{}^{\sigma} = b_{\alpha\sigma} a^{\sigma\beta}$). The concrete form of the line-element of the space is given in terms of Beltrami coordinates and the differential-geometric characterization as well as the finite equations of geodesics of the space are found. The most interesting paragraph of the paper deals with the trigonometry of the space by finding out, in particular, some formulae which are analogous to Theorems of Cosines and Sines in ordinary trigonometry.

Su Buchin.

Nagai, Tamao: Some properties of subgroups of simply transitive groups. Tensor, n. Ser. 7, 103—109 (1957).

The concept of variation of congruences of orthogonal ennuples in a Riemannian space R_m , introduced by Pan (this Zbl. 53, 115), was used by the author (this Zbl. 67, 147) in order to study the structure of a simply transitive group G_m and that of a subgroup G_{m-1} of G_m . In the present paper the analogous things are considered for subgroups of arbitrary dimension n less than m . L. A. Santaló.

Pan, T. K.: Indicatric torsion in a subspace of a Riemannian space. Proc. Amer. math. Soc. 8, 294—298 (1957).

The definition of indicatric torsion of a vector field in a direction, which generalizes the concept of geodesic torsion of a curve in a surface of a euclidean 3-dimensional space, introduced by the author in a previous paper (T. K. Pan, this Zbl. 71, 144) is generalized to subspaces of a Riemannian space. The case of hypersurfaces is specially considered. L. A. Santaló.

Lelong-Ferrand, Jacqueline: Application of Hilbert space methods to Lie groups acting on a differentiable manifold. Proc. nat. Acad. Sci. USA 43, 249—252 (1957)

The author considers orientable bounded Riemann manifolds with certain differentiability properties, and Hilbert spaces of tensor fields on these manifolds. She asserts that the existence of an infinitesimal isometry X that leaves the boundary invariant implies that an invariant form is an exact differential as soon as it is homologous to zero. If the group generated by X is compact it follows from the spectral decomposition that for (p, q) -tensor fields T , $\|T\|/\|TX\|$ is bounded in the orthogonal complement of the subspace of invariant tensor fields. This theorem is converted and generalized in different maps. H. Freudenthal.

Nakae, Tatu: The local and global covariant variations of differential forms under an infinitesimal conformal transformation. J. math. Soc. Japan 9, 20—37 (1957).

Cette étude apporte des calculs préparatoires à l'étude de la variation des formes différentielles définies dans un domaine (à frontière régulière) d'un espace de Riemann, quand la métrique riemanienne subit une variation conforme. Les méthodes de calcul utilisées se rattachent aux travaux récents de Duff et Spencer et de Connet; deux transformations δ_t, δ_g sont définies sur l'espace des formes; la seconde seule dépend de la variation de la métrique dans tout le domaine. P. Lelong.

Yasunaka, Kuniho: Four vertices theorems for surface curves and space curves. Yokohama math. J. 5, 201—208 (1957).

Es wird der gewöhnliche Vierecksatz auf die u. a. von T. Takasu (dies. Zbl. 51, 398) untersuchte, nichtholonome euklidische Geometrie einer Fläche mit Riemannscher Metrik übertragen. K. Leichtweiss.

Haimovici, M.: Sur la représentation géométrique des systèmes mécaniques non holonomes. Begriff des Raumes in der Geometrie. Ber. Riemann-Tagung Forsch.-inst. Math. 280—285 (1957).

Während ein holonomes dynamisches System bekanntlich mittels der Riemannschen Metrik $ds^2 = 2T dt^2$ (T kinetische Energie) repräsentiert werden kann, bereitet die geometrische Darstellung nichtholonome Systeme erhebliche Schwierigkeiten. Vranceanu [Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 6, 9—43 (1928)] hat vorgeschlagen, in diesem Falle zusätzlich zur Riemannschen Metrik noch ein Feld von m -dimensionalen Ebenen $\omega_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} a_{\sigma i} dx_i = 0$ ($\sigma = m+1, \dots, n$) einzuführen, das die kinematischen Bedingungen wiedergibt, so daß die zulässigen Verrückungen dx_i den Gleichungen $\omega_\sigma = 0$ genügen. Die Korrespondenz zwischen Geometrien und dynamischen Systemen ist dann aber nicht eindeutig, weil gewisse Abänderungen von T die Bewegungsgleichungen nicht ändern. Dies läßt sich nach Cartan [Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 5, 253—261 (1928)] dadurch beheben, daß die Metrik nur für zulässige Verrückungen definiert wird, und daß zusätzlich in jedem Punkt ein $(n-m)$ -

dimensionaler Normalenraum zur m -dimensionalen Ebene $\omega_\sigma = 0$ vorgegeben wird. Eine Kritik von Vranceanu an dieser Auffassung wird hier weiter untersucht, und es wird festgestellt, in welchen Fällen die Idee von Cartan durchgeführt werden kann und wie man die übrigen Fälle behandeln kann. *D. Laugwitz.*

Lippmann, Horst: Zur Winkeltheorie in zweidimensionalen Minkowski- und Finsler-Räumen. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **40**, 162—170 (1957).

Let $F(x^i)$, ($i = 1, \dots, n$), denote the metric function of an n -dimensional Minkowskian space M_n , F being of class C^2 . The scalar product (x, y) of two vectors x^i, y^i of M_n is defined by $x^i F_{xi}(y) [F(x)]^{-1}$ (this is usually regarded as the Minkowskian cosine corresponding to two directions x, y). Following Finsler (this Zbl. **44**, 370) the author defines the corresponding „angle“ $w(x, y)$ by putting $\cos w(x, y) = (x, y)$ (apparently $\cos w(x, y)$ denotes the usual Taylor expansion for the cosine). The direction x is transversal to y if $(x, y) = 0$. The following theorem is proved for two-dimensional Minkowskian spaces: Let a, b be two non-vanishing, transversal vectors of M_2 . The function $f(s)$ defined by $f(s) = (b, a + sb)$ is (1) everywhere continuously differentiable, $f(0) = 0$, $f'(s) > 0$, $\lim_{s \rightarrow \pm \infty} f(s) = \pm 1$; (2) the limits $\lim_{s \rightarrow \pm \infty} |s|^3 f(s)$ are equal and non-vanishing. Conversely, let there be

given in a vector space Z_2 two linearly independent vectors a, b , a real number $B > 0$, and a real function $f(s)$ for which the properties (1) and (2) hold. Then there exists a unique metric function $F(x)$ for which $F(b) = B$, such that the vectors a, b are transversal with respect to this metric and $f(s) = (b, a + sb)$. — It is remarked that the angular measure $w(x, y)$ does not satisfy a triangle inequality, even if the direction concerned are neighbouring directions. Thus the angular measure cannot give rise to a general metric space. Nevertheless, the author concludes from the above theorem that an M_2 may be characterized by a cosine-function instead of a metric function.

H. Rund.

Su Buchin: Koschmieder invariant and the associate differential equation of a minimal hypersurface in a regular Cartan space. Math. Nachr. **15**, 117—129 (1957).

Das Problem der minimalen Hyperfläche in den regulären Cartanschen Räumen wurde von L. Berwald eingehend studiert (vgl. dies. Zbl. **22**, 55) und seine Lösung durch gewisse Invarianten charakterisiert. Verf. untersucht dieses Problem in bezug auf die erweiterte infinitesimale Deformation $\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x, p)$, wo p_i den kovarianten Normalenvektor der Hyperfläche bedeutet. Es wird dann die Variation der mittleren Krümmung H der minimalen Hyperfläche unter der Bedingung bestimmt, daß die variierte Hyperfläche auch minimal sei. Durch die Relation $\delta a_\rho^0 = 0$ bekommt dann Verf. die sog. assoziierte Differentialgleichung der minimalen Hyperflächen. Die Berwaldsche Normalform der assoziierten Differentialgleichung führt auf die Koschmiedersche Invariante U_0^* . Endlich wird die explizite Form von U_0^* berechnet. *A. Moór.*

Ulanovskij (Ulanovsky), M. A.: On the conditions defining the objects of affine connectivity in Riemannian space. Doklady Akad. Nauk SSSR **113**, 507—508 (1957) [Russisch].

Ein affiner Zusammenhang in einer Mannigfaltigkeit ist bekanntlich dann und nur dann ein Riemannscher Zusammenhang, falls ein Tensorfeld mit der Eigenschaft $Dg_{ij} = 0$ existiert. Im Falle einer dreidimensionalen affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeit X_3 stellt Verf. die Bedingungen der Existenz eines solchen Feldes auf. Hat nämlich der Raum einen Riemannschen Zusammenhang, dann ist es möglich, die Mannigfaltigkeit derart in zusammenhängende offene Teilmengen zu zerlegen, daß in einer jeden Menge die aus den Komponenten der Tensoren $R_{ijkl}, \nabla_m R_{ijkl}, \nabla_{mr} R_{ijkl}$ gebildeten Matrizen gewissen Bedingungen genügen. Ist umgekehrt in einem Gebiet von X_3 eine dieser Bedingungen erfüllt, dann existiert ein Feld mit

der obigen Eigenschaft. Der Beweis stützt sich auf ein Resultat von Nijenhuis über die Holonomie-Algebra. Ein ausführlicher Beweis ist nicht angegeben.

G. Soós.

Takasu, Tsurusaburo: Non-connection methods for the theory of principal fibre bundles as almost Kleinean geometries. Proc. Japan Acad. **33**, 515—520 (1957).

Verf. fügt seiner Differentialgeometrie der Prinzipalfaserbündel [welche auf dem von ihm eingeführten Begriff der π -Geodätischen beruht] einige weitere Gesichtspunkte in nicht immer ganz verständlicher Form hinzu.

H. Götz.

Akbar-Zadeh, Hassan: Sur une connexion euclidienne d'espace d'éléments linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 26—28 (1957).

Der Verf. entwickelt auf Grund der Theorie der gefaserten Räume eine Übertragung der Linienelementräume. Es wird dann die Cartansche Übertragung in den Finslerräumen charakterisiert.

A. Moór.

Kaganov, S. A.: Geometrie eines Raumes mit singulärer hyperarealer Metrik. Mat. Sbornik, n. Ser. **42 (84)**, 497—512 (1957) [Russisch].

Es sei X_n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, ferner sei \mathfrak{E}_n der Raum sämtlicher kontravarianten Vektordichten vom Gewicht $+1$ eines zentroaffinen Raumes E_n . Ordnet man jedem Punkte von X_n den zum Tangentialraum E_n gehörenden \mathfrak{E}_n als lokalen Raum zu, so bekommt man eine zusammengesetzte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_n(X_n)$ im Sinne von Vagner. In einem jeden \mathfrak{E}_n sei nun ein $(m-1)$ -dimensionaler regulärer Hyperstreifen X_{m-1} gegeben. Die Elemente dieses Hyperstreifenfeldes bilden wieder eine zusammengesetzte Mannigfaltigkeit $X_{n+(m-1)}$. Verf. betrachtet die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_{m-1}(X_{n+(m-1)})$, wobei \mathfrak{E}_{m-1} der Tangentialraum des lokalen X_{m-1} ist. Eine andere Mannigfaltigkeit von Bedeutung ist $\mathfrak{E}_{n-m}(X_{n+(m-1)})$. Hier bedeutet \mathfrak{E}_{n-m} den Raum, der die charakteristische Ebene des Hyperstreifens bestimmt. Verf. beschäftigt sich mit der Einführung eines affinen Zusammenhangs für die Räume $\mathfrak{E}_{m-1}(X_{n+(m-1)})$ bzw. $\mathfrak{E}_{n-m}(X_{n+(m-1)})$. Im zweiten Teil der Arbeit wird ein Ausdruck für die zweite Variation des Flächeninhalts einer Hyperfläche in einem Raum mit singulärer hyperarealer Metrik angegeben.

G. Soós.

Bompiani, E.: Trasporto di elementi di 2° ordine in un piano proiettivo. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **21**, 92—94 (1957).

Fissato nel piano un elemento del 2° ordine E_2^* (non inflessionale) di centro O , esso definisce la seguente legge di trasporto per elementi del 1° ordine: un E_1 di centro P e un E'_1 di centro P' si dicono „paralleli“ se le coniche che essi determinano con E_2^* hanno in comune un E_3 per E_2^* . Adottata questa o un'altra qualsiasi legge di trasporto per gli E_1 , si può definire una legge di trasporto infinitesimo per gli E_2 : gli E_2 e E'_2 di centri infinitamente vicini P e P' si dicono „paralleli“ se i corrispondenti E_1 ed E'_1 sono „paralleli“ ed inoltre E'_2 appartiene alla conica che E'_1 determina con l' E_2 avente in P contatto armonico con l' E_2 .

P. Buzano.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Flett, T. M.: The definition of a tangent to a curve. Edinburgh math. Notes Nr. **41**, 1—9 (1957).

Il s'agit de courbes C paramétriques, en $t = I[a, b]$, a, b réels. Soient C une application de I dans l'espace euclidéen p -dimensionnel E^p , $P = P(t) \in C$ un point de coordonnées $x_i(t)$, $i = 1, \dots, p$. On pose $\xi \in I$, $\eta \in I$, $\xi \neq \eta$, $d(\xi, \eta)$ = distance en E^p entre $P(\xi), P(\eta)$;

(1) $L_i \tau(\xi, \eta) = [x_i(\eta) - x_i(\xi)]/d(\xi, \eta)$, $l_i(t) = \lim L_i(\xi, \eta)$

pour $\xi \rightarrow t$, $\eta \rightarrow t$. En admettant l'existence de ces limites, on définit 3 types de tangente (tg.) à C au point P . Une tg. est (par définition) une droite Δ passant par P et ayant les $l_i(t)$ pour cosinus directeurs. On obtient une α -tg., en supposant en (1), $\xi < \eta$ (2). 1 étant une droite dirigée, une β -tg., en renonçant à (2)

en (1) et Δ étant une droite non-dirigée, une γ -tg., lorsque les deux tangentes Δ_- , resp. Δ_+ , à gauche resp. à droite, (droites dirigées définies en posant $\xi = t$, resp. $\eta = t$) se confondent. Soit $s(\xi, \eta) \equiv \sup.$ du périmètre de la ligne polygonale inscrite et si $s(\xi, \eta) < \infty$, C est rectifiable. On énonce et démontre les propriétés: 1. L'existence d'une α -tg. implique l'existence d'une β -tg. en P et réciproquement. 2. S'il existe une α -tg. en chaque $P \in C$, alors C est rectifiable et les $x_i(t)$ sont continues et différentiables en $s \equiv s(a, t)$, $a < t < b$ et jamais les dx_i/dx_s ne sont simultanément nulles. 3. Le théorème de la moyenne vaut, lorsque $p = 2$, pour la γ -tg. La Note donne aussi d'autres propriétés et exemples suggestifs. *A. Froda.*

Phelps, R. R.: Convex sets and nearest points. Proc. Amer. math. Soc. 8, 790—797 (1957).

Sei E ein endlich-dimensionaler reeller normierter Vektorraum, S eine abgeschlossene Menge in E , z ein Punkt aus S und S_z die Menge der y aus E mit $\|y - z\| \leq \|y - x\|$ für alle x aus S . Hat der durch $\|x\| \leq 1$ definierte Eikörper K in jedem Randpunkt nur eine Stützhyperebene, so ist S genau dann konvex, wenn S_z für jedes z aus S ein Kegel mit Spitze z ist. Weiter wird die Gleichwertigkeit folgender drei Aussagen bewiesen: 1. $\dim E \leq 2$ und K ist streng konvex oder $\dim E \geq 3$ und K ist ein Ellipsoid; 2. Für jede abgeschlossene konvexe Menge S und jeden Punkt z aus S ist S_z konvex; 3. Für jede abgeschlossene konvexe Menge S und irgend zwei Punkte z_1, z_2 aus S und x_i aus S_{z_i} gilt $\|z_1 - z_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$. Die Sätze gelten mit geringfügigen Abänderungen auch für Räume unendlicher Dimension. *M. Kneser.*

Santis, Richard de: A generalization of Helly's theorem. Proc. Amer. math. Soc. 8, 336—340 (1957).

Durch eine sinngemäße Verallgemeinerung des Beweises von Radon für den Satz von Helly [Math. Ann. 83, 113—115 (1921)] wird der folgende allgemeine Satz gewonnen: Q_1, Q_2, \dots, Q_n seien r konvexe Mengen des euklidischen E_n ; k sei eine ganze Zahl, für die $1 \leq k \leq n+1$, $k \leq r$ ist. Wenn der Durchschnitt von je k Mengen Q_i eine lineare Mannigfaltigkeit der Dimension $n+1-k$ enthält, dann enthält auch der Durchschnitt aller Q_i eine lineare Mannigfaltigkeit der Dimension $n+1-k$. *W. Süss.*

● **Hadwiger, H.:** Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Bd. 93.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1957. XIII, 312 S., 34 Textabb. DM 46,20; Gln. DM 49,80.

The first half of the book is devoted to an axiomatic formulation of the concepts of volume and area for sets of points in k -dimensional euclidean space E_k . One finds here, systematically ordered, a great deal of material which, besides its own interest, will be very useful as reference for future researches. The second half deals with divers isoperimetric problems and general integral geometry in E_k . The bodies with which the book deals are throughout introduced and treated as sets of points; conditions of regularity on the boundary are not necessary. That gives to all theorems a great generality and an agreeable taste of pure geometry; the isoperimetric inequalities, for example, together with the discussion of the cases of equality, are proved for any bounded and closed set of points; volume, area and i -dimensional cross sections are introduced and handled without any use of differential or integral calculus. — Chap. I deals with polyhedrons, their generation and decomposition in translation congruent (t. c.) parts; one finds nice theorems of the following type: two congruent cubes can always be decomposed in t. c. parts. In Chap. II the volume $V(A)$ of a polyhedron A is defined as the functional $\varphi(A)$ which is: a) translation invariant; b) simply additive: $\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$; c) positive definite $\varphi(A) \geq 0$; d) normalized: $\varphi(A) = 1$ if $A =$ unit cube. If the homogeneity of degree i is defined by $\varphi(\lambda A) = \lambda^i(A)$, then $V(A)$ can also be defined, up to a constant factor, by the properties of „translation“ invariance, additivity $\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ and

homogeneity of degree k . The area $F(A)$ is then defined, up to a constant factor, by the properties of „motion“ invariance, additivity and homogeneity of degree $k - 1$. Given a group of motions G , the equivalence relation $A \sim B$ (G -equivalence) means that the polyhedrons A, B can be decomposed in a finite number of partial polyhedrons which are congruent with respect to G : conditions for this G -equivalence are given (generalized Hilbert-Dehn problem) and some related problems are discussed. Chap. III contains the passage from polyhedrons to general sets of points: Jordan and Tarski's volume and Lebesgue's measure are given in great detail and are elegantly treated from the axiomatic point of view of the preceding chapters. Chap. IV contains selected topics on geometry of sets: a) Definitions of diameter, breadth, inscribed and circumscribed sphere; b) Parallel sets; c) Concave and convex linear bundles of sets; d) Theorem of Brunn; e) i -dimensional cross sections and their inequalities; f) Steiner's symmetrization. Most of the topics, treated usually only for convex sets, are here given in full generality. The main purpose of the Chap. V is the proof of the Brunn-Minkowski inequality $[V(A \times B)]^{1/k} \geq V(A)^{1/k} + V(B)^{1/k}$ ($V(A) =$ Lebesgue's measure) for any pair of non void, limited and closed sets of points. Chap. VI, which occupies one third of the book, deals with convex bodies and integral geometry; this last subject is treated from the general point of view introduced by Hadwiger in several papers. The basic sets to which the integral formulae apply are those obtained as the union of a finite or infinite number of convex bodies; they form the convex ring S . Most of the classical functionals are extended to sets of S and their convexity properties (in Minkowski's sense) are carefully analyzed. The last part of the chapter is devoted to various improved isoperimetric inequalities for particular families of sets (cylinders, parallelotopes, simplexes, bodies with edges, convex polyhedrons) and to inequalities of Fenchel's type for the cross sections W_i . Each chapter contains selected notes which add greatly to the subject matter through additional references, background material and comparisons. The book ends with a rather complete bibliography. The above short outline does not suggest the remarkable amount of material in this book; it contains an extraordinary mass of ideas and theorems which should help very much to stimulate research on this attractive subject of the geometry of sets. *L. A. Santaló.*

Volland, Walter: Ein Fortsetzungssatz für additive Eipolyederfunktionale im euklidischen Raum. Arch. der Math. 8, 144—149 (1957).

Let M be the class of polyhedrons in k -dimensional euclidean space E_k and M_0 the sub-class of convex polyhedrons (the null set A included). Let G be an additive abelian group with the null element 0 and let φ_0 be a single valued map of M_0 into G such that: a) $\varphi_0(A) = 0$; b) $\varphi_0(A \cup B) + \varphi_0(A \cap B) = \varphi_0(A) + \varphi_0(B)$ [$A, B, A \cup B \in M_0$]. Then φ_0 can be extended by one and only one way to a map φ of M into G which preserves a), b) ($A, B \in M$) and $\varphi(A) = \varphi_0(A)$ for $A \in M_0$.

L. A. Santaló.

Lenz, Hanfried: Eine Kennzeichnung des Ellipsoids. Arch. der Math. 8, 209—211 (1957).

Kurzer und einfacher Beweis des folgenden Satzes: \mathcal{E} sei ein Eikörper mit im Innern liegendem Mittelpunkt O . \mathcal{E} habe entweder eindeutige Stützebenen in allen Randpunkten oder eindeutige Stützpunkte in allen Stützebenen. V sei das Volumen des (nicht notwendig eindeutigen) kleinsten \mathcal{E} umschriebenen Parallellflachs, v das Volumen des größten einbeschriebenen $2n$ -Ecks (konvexe Hülle von n Strecken mit gemeinsamem Mittelpunkt). Dann ist $V/v \leq n!$ und Gleichheit gilt im Fall $n > 2$ nur, wenn E ein Ellipsoid ist. Für $n = 2$ gilt Gleichheit auch für Radonsche Kurven, zum Beispiel das reguläre Sechseck.

L. A. Santaló.

Danzer, Ludwig, Detlef Laugwitz und Hanfried Lenz: Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogon unter den einem Eikörper einbeschriebenen Ellipsoiden. Arch. der Math. 8, 214—219 (1957).

Simple proofs are given for the existence and uniqueness in n -dimensional euclidean space of (a) an ellipsoid of minimal volume circumscribed to a bounded closed set M whose convex hull possesses an interior point, (b) an ellipsoid of maximal volume inscribed to a bounded closed convex set M with interior points. The following are the main steps for proving the uniqueness [the existence is classical; for special cases of the uniqueness see F. Behrend, this Zbl. 18, 175; H. Busemann, The geometry of geodesics (New York 1955)]. Case (a): two different circumscribed ellipsoids with the same volume may be brought, by affine transformation, into the forms $F(x) = (x_1 - m_1)^2 + \dots + (x_n - m_n)^2 - 1 = 0$, $G(x) = (x_1/a_1)^2 + \dots + (x_n/a_n)^2 - 1 = 0$ where $a_1 a_2 \dots a_n = 1$; $\frac{1}{2}(F(x) + G(x)) = 0$ is then a circumscribed ellipsoid of smaller volume. Case (b): two different inscribed ellipsoids with the same volume may be brought into the forms $x_i = f_i(\vartheta)$, $x_i = a_i f_i(\vartheta) + c_i$ where $f_1(\vartheta) = \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \dots \cos \vartheta_{n-1}$, $f_2(\vartheta) = \cos \vartheta_1 \dots \cos \vartheta_{n-2} \sin \vartheta_{n-1}$, \dots , $f_{n-1}(\vartheta) = \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2$, $f_n(\vartheta) = \sin \vartheta_1$, and $a_1 a_2 \dots a_n = 1$; the ellipsoid represented by $x_i = \frac{1}{2}((1 + a_i) f_i(\vartheta) + c_i)$ is then an inscribed ellipsoid of greater volume unless $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$; in the latter case the two ellipsoids can be represented as $x_i = f_i(\vartheta)$ resp. $x_1 = f_1(\vartheta) + 2c$, $x_i = f_i(\vartheta)$ ($i > 1$), and the ellipsoid given by $x_1 = (1 + c) f_1(\vartheta) + c$, $x_i = f_i(\vartheta)$ ($i > 1$) is then inscribed and of greater volume. — Several applications are obtained, observing that a group of affine transformations transforming a set M onto itself will leave the ellipsoids (a), (b) invariant. One result is a proof, without any differentiability assumptions, of the theorem that the bounded W -surfaces (surfaces permitting a transitive group of affinities) are ellipsoids.

F. A. Behrend.

Süss, Wilhelm: Eindeutige Bestimmung von Eihyperflächen durch die Summe ihrer Hauptkrümmungsradien. Arch. der Math. 8, 352—354 (1957).

Kurzer und eleganter Beweis des folgenden Satzes (bewiesen von Christoffel für $n = 2$): Die beiden Hyperflächen x und \bar{x} des $(n + 1)$ -dimensionalen euklidischen Raumes seien geschlossen und durch parallele und gleichgerichtete Normalen eineindeutig sphärisch, also auch aufeinander abgebildet. Ihre Hauptkrümmungsradien seien positiv und stetig; die Summen S bzw. \bar{S} dieser Radien R_i bzw. \bar{R}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) mögen als Funktionen des Ortes auf dem gemeinsamen sphärischen Bild von x und \bar{x} miteinander übereinstimmen. Dann sind die beiden Hyperflächen x und \bar{x} einander translationsgleich.

L. A. Santaló.

Danzer, Ludwig: Über ein Problem aus der kombinatorischen Geometrie. Arch. der Math. 8, 347—351 (1957).

Verf. löst eines der „Ungelösten Probleme“ in der von H. Hadwiger redigierten Reihe [Elemente Math. 10, 111 (1955), Problem Nr. 7] mit dem folgenden Satz: Werden aus einer endlichen Menge gegenseitig nicht übereinandergreifender kongruenter Kreisscheiben in der Ebene je fünf durch eine Gerade getroffen, so gibt es eine Gerade, die alle Kreisscheiben der Menge trifft. Gleichbedeutend damit ist die folgende Aussage: Für endlich viele Punkte P_i sei $|P_i P_j| \geq 1$ ($i \neq j$), und jedes Fünfeck aus Punkten P_i habe höchstens die Dicke 1. Dann hat die Menge aller Punkte P_i höchstens die Dicke 1. Verf. gibt einen vollständigen, durchaus nicht einfachen Beweis, jedoch leider so knapp gefaßt, daß das Lesen ziemlich mühsam ist. Zum Schluß fragt Verf., ob die Bedingung $|P_i P_j| \geq 1$ für geeignete $a < 1$ durch $|P_i P_j| \geq a$ ersetzt werden kann; u. U. mit einer größeren Zahl an Stelle von fünf. Für die Zahl fünf muß jedenfalls $a > \frac{2}{3}$ sein, wie das reguläre Sechseck vom Durchmesser $\frac{4}{3}$ zeigt.

H. Lenz.

Topologie:

● **Parchomenko, A. S.:** Was ist eine Kurve?. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1957. 140 S., 23 Abb. Br. DM 8,20.

German translation from the Russian text see this Zbl. 56, 160. In the following passage of this review "... any two points of a connected continuum ..." the word "connected" should be "locally connected".
W. T. van Est.

Alexandroff, P.: Aus der mengentheoretischen Topologie der letzten zwanzig Jahre. Proc. internat. Congr. Math. 1954 Amsterdam I, 177—196 (1957).

Der Verf. gibt einen Bericht über die folgenden Ergebnisse der Topologie: 1. Die Theorie der Nachbarschaftsräume von Efrémovič und das Metrisationsproblem, insbesondere der Satz von Smirnov über bikompakte Erweiterungen von Räumen. 2. Die Dimensionstheorie der Kompakten, die von drei Grundproblemen her aufgezogen wird. Die Boltjanskischen Ergebnisse über die Theorie der dimensionell vollwertigen Räume, seine notwendigen und hinreichenden Kriterien und seine Beispiele werden gebracht, ferner die metrische Theorie der Kompakten, der Sitnikovsche „Gürtel“ und „Sacksatz“. 3. Von der kombinatorischen Topologie der nichtabgeschlossenen Mengen, die vor allem von K. Sitnikov erarbeitet worden ist, werden die wichtigsten Ergebnisse angeführt. Vor allem wird auf Dualitätssätze und dimensionstheoretische Rechtfertigungssätze eingegangen. *F. W. Bauer.*

Weston, J. D.: On the comparison of topologies. J. London math. Soc. 32, 342—354 (1957).

Unter einer Topologie T der Menge X wird stets das System der offenen Mengen verstanden. Verf. untersucht verschiedene Beziehungen zwischen Topologien der selben Menge X . Neben der mengentheoretischen Ordnung $T_1 \subseteq T_2$ werden andere Relationen eingeführt. T_1 heißt „unimportant“ zu T_2 , wenn $\overline{G} \subseteq \overline{G}$ für alle $G \in T_2$ gilt (G bedeutet die Hülle hinsichtlich T_2). Dann gilt: Ist T_2 regulär und T_1 unimportant zu T_2 , so folgt $T_1 \supseteq T_2$. Weiter heißt T_1 gekoppelt mit T_2 , wenn $\overline{G} \subseteq \overline{G}$ für alle $G \in T_1$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die T_1 -Hülle jeder T_2 -Umgebung eines beliebigen Punktes x eine T_1 -Umgebung von x ist. Es werden Sätze hergeleitet, die im Fall topologischer Gruppen die Kopplung garantieren. Die Relation $T_1 \leq T_2$ wird durch „ $T_1 \subseteq T_2$ “ und „ T_1 ist gekoppelt mit T_2 “ definiert. Sie ist eine Ordnungsrelation für die Menge aller Topologien von X . Es gilt: T_1 ist genau dann mit T_2 gekoppelt, wenn $T_1 \leq T_1 + T_2$ (von $T_1 \cup T_2$ erzeugte Topologie). Es sei $T_1 \leq T_2$: Ist dann (X, T_2) von 2. Kategorie, so auch (X, T_1) . Ist T_1 regulär und genügt (X, T_2) dem 1. Abzählbarkeitsaxiom, so erfüllt auch (X, T_1) das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Ist (X, T_1) ein Hausdorffscher und (X, T_2) ein vollständiger metrischer Raum, so folgt $T_1 = T_2$. Die Topologien T_1 und T_2 heißen konsistent, wenn es zu je zwei Punkten x_1, x_2 eine T_1 -Umgebung U_1 von x_1 und eine T_2 -Umgebung U_2 von x_2 mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ gibt. Sind T_1 und T_2 konsistent, ist T_1 gekoppelt mit T_2 und ist (X, T_2) lokal kompakt, so folgt $T_1 \supseteq T_2$. Weiter seien T_1 und T_2 konsistent, $T_1 \leq T_2$, (X, T_1) ein Hausdorffscher Raum und (X, T_2) lokal kompakt; dann gilt $T_1 = T_2$. Den Abschluß bilden zahlreiche Anwendungen auf topologische Vektorräume und Gruppen. Sie enthalten Verallgemeinerungen bekannter Sätze und beweistechnische Vereinfachungen. *H.-J. Kowalsky.*

Iséki, Kiyoshi: A theorem on continuous convergence. Proc. Japan Acad. 33, 355—356 (1957).

Verf. beweist, daß in einem schwach vollständig regulären Raum S folgende Bedingungen äquivalent sind: 1. In S besitzt jede unendliche Folge von Punkten eine konvergente Unterfolge; 2. S ist kompakt in dem Sinne, daß jede abzählbare Punktmenge in S einen Häufungspunkt hat; 3. Die stetige Konvergenz in S hat die gleichmäßige Konvergenz in S zur Folge. Die Arbeit enthält noch andere kleinere Sätze über stetige und gleichmäßige Konvergenz. *S. Stoilow.*

Halfar, Edwin: Compact mappings. Proc. Amer. math. Soc. 8, 828—830 (1957).

Dans cette note sont établies des relations entre applications f fermées, compactes.

ou telles que $f^{-1}(y)$ [$y \in Y$] est compact. Comme exemple citons la proposition suivante: La condition nécessaire et suffisante pour que $Y = f(x)$, où Y est espace de Hausdorff localement compact soit compacte, est que f soit fermée et que pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ soit compact dans X . Mentionnons encore une propriété d'invariance par les transformations „quasi-interior“ (G. T. Whyburn) de la connexion et de la compacité locales. Les espaces considérés ne sont supposés ici que T_1 ou T_2 (notations Alexandroff-Hopf). S. Stoilow.

Aquaro, Giovanni: Sur les applications multivalentes d'un espace topologique dans un espace uniforme et compact. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 155—157 (1957).

E, E' : espaces topologiques. M : ensemble des applications de E dans l'espace $\mathfrak{F}(E')$ des fermés de E' . $f \in M$ est dite semi-continue inférieurement en x_0 si $f(x_0) \subset \liminf_{\mathfrak{B}(x_0)} f(x)$, $\mathfrak{B}(x_0)$ filtre des voisinages de x_0 . Extension à cette situation des propriétés des fonctions semi-continues inférieurement numériques, en particulier dans le cas où E est un espace uniforme de Lebesgue et E' un uniforme compact. A. Revuz.

Levšenko, B. T.: Über den Begriff der Kompaktheit und die punktweise endlichen Bedeckungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 42 (84), 479—484 (1957) [Russisch].

Durch eine naheliegende transfinite Induktion (bequemer wäre die Anwendung des Zornschen Lemmas gewesen) wird gezeigt, daß sich aus jeder punktendlichen Überdeckung eines Raumes eine minimale Überdeckung auswählen läßt. Auf diese Tatsache gründet sich der Beweis des Satzes 1: Aus jeder punktendlichen offenen Überdeckung eines abzählbar-kompakten topologischen Raumes läßt sich eine endliche Überdeckung auswählen. Ein Raum, in dem sich jede offene Überdeckung zu einer punktendlichen offenen Überdeckung verfeinern läßt, heißt schwach parakompakt oder metakompakt. Hiermit erhält man aus Satz 1 die von Smirnov herrührende etwas prägnantere Formulierung: Ein abzählbar-kompakter metakompakter topologischer Raum ist kompakt. Satz 2: Ein regulärer Raum ist sogar genau dann abzählbar-kompakt, wenn sich jede punktendliche offene Überdeckung zu einer endlichen offenen Überdeckung verfeinern läßt. Ein Beispiel zeigt, daß sich hierbei „punktendlich“ nicht durch „lokal endlich“ ersetzen läßt. Die Frage, ob die in Satz 2 gegebene Kennzeichnung der abzählbaren Kompaktheit auch für Hausdorffräume gilt, bleibt offen; für T_1 -Räume wird sie negativ beantwortet. Satz 3: Ein regulärer Raum ist genau dann metrisierbar und Summe einer abzählbar-kompakten Menge und einer Menge isolierter Punkte, wenn die Gesamtheit der punktendlichen (lokal endlichen bzw. sternendlichen) offenen Überdeckungen eine bezüglich der Verfeinerung konfinale abzählbare Teilfolge enthält. H. Salzmann.

Nagata, Jun-iti: A theorem for metrizability of a topological space. Proc. Japan Acad. 33, 128—130 (1957).

The details of this note are published in J. Nagata, J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 8, 185—192 (1957). In this note the author proves that a T_1 -space R is metrizable if and only if one can assign a neighbourhood basis $\{U_n(x) | n = 1, 2, \dots\}$ for every point x such that for every positive integer n and every point x there exist neighbourhoods $S_n^1(x)$, $S_n^2(x)$ of x satisfying i) $y \notin U_n(x)$ implies $S_n^1(x) \cap S_n^2(y) = \emptyset$, and ii) $y \in S_n^1(x)$ implies $S_n^2(y) \subset U_n(x)$. It is stated that various kinds of known metrization theorems can be deduced from this theorem; the proofs are given in the paper cited above. — [Reviewer's note: The „if“ part of the theorem is proved simply as follows. Assume that $S_m^2(x) \subset S_n^2(x)$ for $m \geq n$ and every point x . Set $W_i(x) = \text{Int} [U_i(x) \cap S_i^1(x) \cap S_i^2(x)]$ and $\mathfrak{B}_i = \{W_i(x) | x \in R\}$. For given n and x take m so that $U_m(x) \subset S_n^1(x)$ and $m > n$. Then we have $\text{St}(W_m(x), \mathfrak{B}_m) \subset U_n(x)$. Hence R is metrizable by the reviewer's theorem (this Zbl. 45, 117)]. K. Morita.

Kodama, Yukihiro: On LC^n metric spaces. Proc. Japan Acad. 33, 79—83 (1957).

Let X be a metric space. X is called LC^n if, for any $x \in X$ and any neighborhood U of x , there exists a neighborhood V of x such that every continuous image of an m -sphere ($m \leq n$) in V is contractible in U . X is called C^n if every continuous image of an m -sphere ($m \leq n$) in X is contractible in X . X is called n -ES (resp. n -NES) (for metric spaces) if, whenever Y is a metric space and B is a closed set of Y with $\dim(Y - B) \leq n$, every continuous mapping from B to X can be extended to a continuous mapping from Y (resp. some neighborhood U of B in Y) to X . The results obtained in this paper are generalizations of the well-known theorems to the case of general (not necessarily separable) metric spaces and are as follows: (1) In case $\dim X = n$, X is an ANR for metric spaces if and only if it is LC^n . (2) In case X is LC^n and $\dim X = n$, X is n -ES if and only if $\pi_i(X) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ and $\pi_n(X)$ is 0 or the weak product of infinite cyclic groups. (3) The statements below are equivalent: i) X is LC^n , ii) X is $(n+1)$ -NES, iii) X is $(n+1)$ -ANR for metric spaces. (4) In case X is LC^n , the statements below are equivalent: i) X is C^i , ii) X is $(i+1)$ -ES, iii) X is $(i+1)$ -AR for metric spaces (where $i = 0, 1, \dots, n$). K. Morita.

Tumarkin, L. A.: On Cantorian manifolds of an infinite number of dimensions. Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 244—246 (1957) [Russisch].

A compact C_n (resp. C_∞) of dimension $n < \infty$ (resp. ∞) is called a Cantor manifold Ca_n (resp. Ca_∞) of dimension n (resp. ∞), if it is no union of 2 closed sets, the intersection of which is of a dimension $\leq n-2$ (resp. $< \infty$). Every C_n contains a Ca_n (Hurewicz-Tumarkin 1928). Problem: Does every C_∞ contain a Ca_n for every n ? (Tumarkin 1926). Yes, for $n = 1, 2$ (A. van Heemert, this Zbl. 60, 400). Theorem: Every C_∞ contains a C_n for every $n < \omega$ or a Ca_∞ or both. The proof is backed upon this Lemma: Let A, B be closed sets of a compact metric space such that $\dim(A \cap B) \leq n-2$; then $d_n(A \cup B) = \sup(d_n A, d_n B)$ (Tumarkin, 1928); $d_n F = \inf \varepsilon$ (F is closed), such that F be the union of a finite number of closed sets of diameter $< \varepsilon$ such that no point of F belongs to more than k of these sets. Problem: Does every Ca_∞ contain a C_n for every $n < \omega$? G. Kurepa.

Balcerzyk, S. and Jan Mycielski: On the method of category in analytic manifolds. Fundamenta Math. 44, 295—299 (1957).

Nach einem Satz von Baire enthält die Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Teilmengen eines vollständigen metrischen Raumes keine inneren Punkte. Ohne Benutzung der Kontinuums-hypothese kann man bis jetzt nicht zeigen, daß dasselbe auch für die Vereinigung von weniger als $c = 2^{\aleph_0}$ nirgends dichten Mengen gilt. Die Verf. beweisen nun, daß jedenfalls die Vereinigung von weniger als c analytischen Flächen S_i einer analytischen Mannigfaltigkeit M keine inneren Punkte enthält. Dabei heißt S analytische Fläche in M , wenn ein offener zusammenhängender Teil C in M , eine analytische Mannigfaltigkeit A und zwei nicht identische analytische Abbildungen f und g von C in A existieren, die auf S übereinstimmen. Der Beweis erfolgt durch Reduktion auf den Fall $M = E^n$ und $A_i = E^1$ und für diesen reduzierten Fall durch geschickte Induktion nach der Dimension n von E^n .

H. Leptin.

McAuley, Louis F.: A note on naturally ordered sets in semi-metric spaces. Proc. Amer. math. Soc. 8, 384—386 (1957).

Let G denote a naturally ordered collection of disjoint sets in a semi-metric topological spaces S and assume that the sum of the points of G is hereditarily separable in S . This note generalizes theorems of Whyburn [Analytic Topology, New York (1942)] and Zarankiewicz [Fundamenta Math. 12, 121—125 (1928)] proved by them for separable metric spaces. It is shown that at most a countable number of elements g of G can contain a point which is not a condensation point both of the collection P_g of predecessors of g in G and the collection F_g of all successors of g in G . Using this result as a lemma it is shown that any nonseparated collection G of cut-

tings of a connected hereditarily separable point set M in a semi-metric topological space S contains a saturated subcollection Q differing from G by only a countable number of elements and such that each element q of Q is closed in M , irreducibly separates M into just two components, and has potential order 2 in M relative to Q .

W. R. Utz.

Hunter, R. P.: Type of (n, k) adherence and indecomposability. Portugaliae Math. 15, 115—122 (1957).

Let $M = M_0$ be a connexe (nondegenerate and connected). A sequence of sets P_1, \dots, P_{n+1} constitutes an (n, k) -adherent sequence of M provided $M_0 - P_1 \supset M_1 - P_2 \supset \dots \supset M_{n-1} - P_n \supset M_n \supset V \supset P_{n+1}$ where (a) M_i is a proper subclosed connexe of M_{i-1} , (b) $P_i \cdot M_{i-1} = 0$ ($1 < i \leq n$), (c) V is open in M_k . For M to be indecomposable it is necessary and sufficient that it contain no $(1, 0)$ -adherent sequence. In order that every proper connexe subclosure of M be indecomposable it is necessary and sufficient that M contain no $(2, 1)$ -adherent sequence. It is also shown that, if M is an n -essential sum, i. e., $M = M_1 + \dots + M_n$, M_i : connexe, $M_i - M_j \neq 0$, $i \neq j$, and if M contains no $(n, n-1)$ -adherent sequence, then M is the essential sum of n noncompact hereditarily indecomposable closed connected sets. The author gives several other theorems interrelating indecomposability with the concept of (n, k) -adherent sequences.

C. J. Neugebauer.

Fadell, Edward: On spaces without isolated noncut points. Proc. Amer. math. Soc. 8, 362—365 (1957).

Let $f: X \rightarrow X$ be a map from a topological space X into itself. A point $x \in X$ is free if $f(x) \neq x$. The map f is called a φ -map if for every $x \in X$ there exists a free point $x' \neq x$ which does not separate $f(x')$ and x . Denote by: $\Omega = X^X$; Φ the class of φ -maps in Ω ; Φ' the maps in Ω which free at least one noncut point; Φ'' the maps in Ω which free infinitely many noncut points; Ω_0 the "onto" maps in Ω . By definition, the identity map is in Φ, Φ', Φ'' . Let X now be a Peano continuum. A simple arc $\gamma = ab$ of X is termed a tail if $\gamma - b$ is open in X . The following results are obtained: (I) X fails to have a tail if and only if either $\Phi' = \Phi''$ or $\Omega = \Phi \cup \Omega_0$. (II) The noncut points of X are dense in X if and only if either $\Phi = \Phi'$ or $\Omega = \Phi$. (III) For $f \in \Omega$, let $F(f)$ denote the set of fixed points of f . Two maps f, g in Ω are termed F -homotopic if there exists a homotopy $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ with $H_0 = f$, $H_1 = g$, $F(H_t) = F(f)$ for all $t \in [0, 1]$. Let now X be an ANR (compact metric). A necessary and sufficient condition that for any $f \in \Omega$ there exists a $g \in \Omega$, F -homotopic to f , with $g(X) = X$, is that X fail to have a tail.

C. J. Neugebauer.

Ward jr., L. E.: Mobs, trees and fixed points. Proc. Amer. math. Soc. 8, 798—804 (1957).

„A mob“, ce que je propose de traduire en français par „un amas“ est un semi-groupe S pourvu d'une topologie séparée pour laquelle la multiplication est continue. Il est dit monotone si $\forall x \in S$ l'ensemble $\{(a, b); ab = x\}$ est connexe dans $S \times S$. Un arbre est un continu localement connexe dans lequel tout couple de points est séparé par un troisième. Théorème: La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace topologique ordonné X soit un arbre est qu'il soit un amas compact idempotent commutatif tel que $ax = a$ et $bx = b$ implique $ab = a$ ou $ab = b$. L'A. avait précédemment prouvé (ce Zbl. 57, 150) qu'un arbre X était caractérisé par: X est un espace compact pourvu d'un ordre tel que si $L(x) = \{u; u \leq x\}$ et $M(x) = \{u; x \leq u\}$, on ait 1. $L(x)$ et $M(x)$ sont fermés $\forall x \in X$ (ce que l'A. appelle la semi-continuité de l'ordre), 2. l'ordre est dense, 3. $\forall x, y \in X$, $L(x) \cap L(y)$ est une chaîne non vide, 4. $\forall x \in X$, $M(x) - \{x\}$ est ouvert. Il montre ici que l'ordre d'un arbre est toujours continu: i. e. l'ensemble représentant la relation d'ordre dans $X \times X$ est fermé (ce qui implique 1). Il définit des „arbres généralisés“ comme satisfaisant aux conditions 1', 2, 3. et 4. : Si Y est une partie fermée connexe de X , Y a un plus petit élément. Il montre que tout arbre est un

arbre généralisé, que tout arbre généralisé est un continu héréditairement unicohérent et que réciproquement un tel continu est un arbre généralisé s'il a un ordre partiel satisfaisant 1'. et 2. Il donne deux nouvelles caractérisations des arbres: 1. continu localement connexe tel que l'ordre obtenu par coupure soit dense, 2. continu localement connexe héréditairement unicohérent. Enfin, il établit un théorème de point fixe pour les arbres généralisés: pour toute application continue f d'un arbre généralisé dans lui-même, il existe un point x tel que $f(x) = x$. *A. Revuz.*

Kosiński, A.: On involutions and families of compacts. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 1055—1059 (1957).

Let M be a compact space, $\dim M \leq n$, and let $q: M \rightarrow M$ be an involution (i. e. a continuous mapping with $q^2 = 1$) such that $\dim T \leq n - 1$ where T is the set of fixed points of q . In this note the author proves the following results. (1) There exist two compact subsets F_1 and F_2 such that $M = F_1 \cup F_2$, $q(F_1) = F_2$ and $\dim F_1 \cap F_2 \leq n - 1$. (2) If $q_*: H_n(M) \rightarrow H_n(M)$ (the coefficient group being the group of integers reduced mod 2) is the identity, then $k_*: H_n(M) \rightarrow H_n(M^*)$ is trivial where M^* is the space obtained from M by identification of all pairs $(x, q(x))$ and k is the identification mapping. (3) Generalizations of theorems concerning families of acyclic compacta in the Euclidean n -space E^n which have been obtained in papers: K. Borsuk, this Zbl. 66, 414; K. Borsuk and A. Kosiński, this Zbl. 65, 160; A. Kosiński, Fundamenta Math. 46, 47—59 (1958). *K. Morita.*

Švarc, A. S.: Einige Abschätzungen des Geschlechts eines topologischen Raumes im Sinne von Krasnosel'skij. Uspechi mat. Nauk 12, Nr. 4 (76), 209—214 (1957) [Russisch].

Let a finite group G act freely on a space X . The G -genus of S is defined to be the least number n such that there exists a collection A_1, \dots, A_n of n closed subsets of X with the following properties (i) $A_i \cap g A_i = \emptyset$ for any $g \in G$, $g \neq 1$, (ii) the A_i and their G -translates cover X . First it is shown that if the G -genus of X is n , then there is an equivariant map from X to a G -free G -complex of dimension $n - 1$. Conversely if there is such a map then the G -genus of X is $\geq n$. So if the G -genus of X is n , then the natural homomorphism $H^*(G, A) \rightarrow H^*(X/G, A)$ is zero in dimensions $\geq n$ for any coefficient domain A . Now the argument of the Leray-Hirsch theorem applied to the Cartan-Leray spectral sequence yields the following remark: If A is a field, and $H^*(X/G, A) \rightarrow H^*(X, A)$ is an epimorphism in dimensions $< n$, then $H^n(G, A)$ maps isomorphically into $H^n(X/G, A)$. Therefore if in addition $H^n(G, A) \neq 0$, then by the above remarks the G -genus of X is $\geq n + 1$. By specializing this result the author gets estimates for the G -genus of X in various cases. *W. T. van Est.*

Pannoli Massaro, Giliana: Quelques questions préalables à propos du problème des sélections, en rapport avec celui des fonctions implicites. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 153—155 (1957).

Pannoli Massaro, Giliana: Constructions à propos du problème des sélections. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 294—297 (1957).

E application continue d'un fermé H de R^n dans l'espace des fermés de R (avec semble-t-il sa topologie classique). $x_0 \in H$ étant donné, ainsi que $y_0 \in E(x_0)$, recherche d'une application continue f d'un voisinage V de x_0 dans R telle que $y_0 = f(x_0)$ et $f(x) \in E(x)$, $\forall x \in V$. Si f existe, (x_0, y_0) est dit accessible. Pour $n = 1$, on a: L'ensemble des points inaccessibles, s'il n'est pas vide est dense en soi. Constructions d'applications E telles que l'ensemble des points inaccessibles se projette sur H suivant un ensemble parfait non dense donné, ou suivant un ensemble gerbé (1^{ère} catégorie) donné. *A. Revuz.*

Michael, J. H.: Continuous mapping of subsets of the Euclidean n -sphere. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 133—137 (1957) u. russ. Zusammenfassg. XII (1957).

Let A and B be closed subsets of the Euclidean n -sphere $S^n = (x; x \in R^{n+1} \text{ and } \|x\| = 1)$ with $A \neq S^n$ and let f be a continuous mapping of A onto B with the following two properties: I. $f\{\text{Fr}(A)\}$ and $f\{\text{Int}(A)\}$ are disjoint; II. $f\text{Fr}(A)$ is homeomorphism. Kuratowski conjectured that $f\{\text{Fr}(A)\} = \text{Fr}(B)$ (hence $f\{\text{Int}(A)\} = \text{Int}(B)$) and proved this conjecture for the case when $\text{Int}(A)$ is connected. This paper proves the general case of the conjecture. *J. Stein.*

Kuratowski, K.: Sur quelques invariants topologiques dans l'espace euclidien. *J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. 36, 191—200 (1957).

Let S^n be an n -sphere and A, B two closed subsets of S^n . In case there is a homeomorphism from A onto B we have $p_r(S^n - A) = p_r(S^n - B)$. Here p_r denotes the r -dimensional Betti number. In this paper the author extends this well-known theorem by proving the following theorems. (1) If there exists a continuous map $f: A \rightarrow B$ such that the partial map $f|_F$ is a homeomorphism from F onto $\text{Fr}(B)$ (the boundary of B) for some compact set $F \subset A$, then $p_r(S^n - B) \leq p_r(S^n - A)$ for $0 \leq r \leq n-1$. (2) If there exists a damping map f from A onto B , then $p_r(S^n - B) = p_r(S^n - A)$ for $0 \leq r \leq n-1$. Here a continuous map $f: A \rightarrow B$ is called damping if $f(\text{Fr}(A)) = \text{Fr}(B)$, $f(\text{Int}(A)) = \text{Int}(B)$ and the partial map $f|_{\text{Fr}(A)}$ is one-to-one. This notion is introduced by the author as an analogue of damping maps in the sense of K. A. Sitnikov (this Zbl. 47, 165). Indeed it is proved that if $f: A \rightarrow B$ is damping then the partial map $f|_{\text{Int}(A)}$ is damping in the sense of Sitnikov and a fundamental theorem of Sitnikov is used in proving (2). As the author shows, the above results for case $n = 2$ can be established without using the notions from algebraic topology. As for general results concerning homology groups, cf. Kosiński (this Zbl. 71, 162). *K. Morita.*

Frum-Ketkov, R. L.: The behaviour of cycles in the continuous mapping of compacts. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 115, 249—252 (1957) [Russisch].

Verf. beweist folgenden Satz: Sei $F \subset R^m$ ein Kompaktum und z^n ein Zyklus mit $z^n \sim 0$ in F . Die Abbildung $f: F \rightarrow M^n$ (n -dimensionale Mannigfaltigkeit) sei so beschaffen, daß $f(z^n) = 0$ ist. Für beliebiges k ($0 \leq k < n$) gibt es einen k -dimensionalen Zyklus z^k , der wesentlich ist (d. h. es gibt einen Träger, auf dem er nicht berandet), so daß $z^k \sim 0$ in F und z^k durch f in die Null abgebildet wird. Letzteres besagt, daß $f(z^k)$ auf dem f -Bild eines seiner Träger homolog Null ist. Dieser Satz beantwortet eine Verallgemeinerung einer Frage, die von P. S. Alexandroff gestellt wurde. Zu dieser Frage gelangt man, wenn man in obigem Satz auch F als n -dimensionale Mannigfaltigkeit annimmt. Der Beweis dieses Satzes benutzt den Satz über im R^n verschlungene Zyklen und den sogen. Phragmén-Brouwersehen Satz. Im letzten Teil der Note werden ohne Beweis noch einige Sätze angegeben, die in ähnlicher Richtung zielen wie obiger Satz. *F. W. Bauer.*

Ryškov (Ryshkov), S. S.: On a class of continuous mappings of some ∞ -dimensional sets. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 114, 961—963 (1957) [Russisch].

The author defines a class of mappings A such that two polyhedra in Hilbert space in the sense of Boltjanskij which are A -equivalent have isomorphic homology groups. Further it turns out that if F and F' are closed subsets of Hilbert space such that there is a A -equivalence between F and F' that extends to a sequence of uniformly shrinking neighbourhoods of F and F' , then the homology groups of F and F' are isomorphic. *W. T. van Est.*

Ryškov (Ryshkov), S. S.: On the combinatorial topology of Hilbert space. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 114, 494—497 (1957) [Russisch].

The author shows that if a closed subset of Hilbert space admits two cellular decompositions in the sense of Boltjanskij (this Zbl. 65, 161) then the homology groups with the same deficiency index for these two decompositions are isomorphic. *W. T. van Est.*

Kodama, Yukihiro: On a right inverse mapping of a simplicial mapping. Proc. Japan. Acad. **33**, 136—138 (1957).

Let X and Y be simplicial complexes and $f: X \rightarrow Y$ be simplicial. The author obtains a homological condition equivalent to the existence of simplicial $g: Y \rightarrow X$ so $fg = \text{identity}$. If A is complex, B a subcomplex, then A^k denotes the k -skeleton of A , \tilde{A} the barycentric subdivision of A relative to B (i. e. B is not subdivided), $H(A, B)$ the homology sequence of (A, B) with integer coefficients. Associated with simplicial $f: A \rightarrow C$ is $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{C}$. Now let X be the barycentric subdivision relative to $f^{-1}(Y_0)$. Theorem: there is a simplicial $g: Y \rightarrow X$ with $fg = \text{identity}$ only if there is a homomorphism $k: H(Y^1, Y^0) \rightarrow H(X^1, X^0)$ such that $\tilde{f}_* k = \text{identity}$ (where $\tilde{f}_*: H(X_1, X_0) \rightarrow H(Y_1, Y_0)$ is induced by \tilde{f}). S. Stein.

Milnor, John: The geometric realization of a semi-simplicial complex. Ann. of Math., II. Ser. **65**, 357—362 (1957).

The author shows in this paper that to any semi-simplicial complex $K = \bigcup_{i \geq 0} K_i$ may be associated a topological space $|K|$ called the geometric realization of K such that if $S(X)$ is the singular complex of a space X , then the singular homology and homotopy groups of $|S(X)|$ and X are canonically isomorphic (theorem 4). The construction of $|K|$ is as follows. For each $n \geq 0$ let Δ_n be a standard n -simplex and $\partial_i: \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$, $s_i: \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$ the face and degeneracy maps respectively. Let K be the disjoint union of open sets $k_i \times \Delta_i$ where $k_i \in K_i$, $i = 0, 1, \dots, n, \dots$. Then $|K|$ is defined as the identification space of \bar{K} with respect to the equivalence relation generated by the relations $(\partial_i k_n, \delta_{n-1}) \sim (k_n, \partial_i \delta_{n-1})$, $(s_i k_n, \delta_{n+1}) \sim (k_n, s_i \delta_{n+1})$, for each $k_n \in K_n$, $\delta_{n \pm 1} \in \Delta_{n \pm 1}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Wu Wen-tsin.

Gugenheim, V. K. A. M. and J. C. Moore: Acyclic models and fibre spaces. Trans. Amer. math. Soc. **85**, 265—306 (1957).

Let $p: E \rightarrow B$ be a fibre map with fibre F . Then Serre has shown that there exists a spectral homology sequence $\{E^r\}$ such that E^∞ is the bigraded group associated with $H_*(E)$, suitably filtered and $E_{p,q}^2 = H_p(B * H_q(F))$, the p^{th} homology group of B with coefficients in the local system of groups $\{H_q(F)\}$ over B . Serre used cubical singular theory, defined degeneracy in terms of the last coordinate (the aft system of degeneracies in the language of the present paper), and defined the filtration of a singular cube u of E in terms of the amount of degeneracy of the projected cube pu of B . Thus it is possible a priori that the spectral sequence depends on the choice of singular theory and degeneracy system and is not simply a function of the fibre space. The main result of this paper is that the spectral sequence does not depend on these choices and thus merits the name of the singular homology spectral sequence of the fibre space. In particular, one may choose the more usual definition of degeneracy, that is, degeneracy on any coordinate (the symmetric system of degeneracies), define an appropriate filtration and then obtain a spectral sequence isomorphic (from E^2 onwards, understood) to the Serre sequence. This definition has great advantages where products of fibre spaces are considered, e. g., where p is a homomorphism of H -spaces. Again one may base oneself on the simplicial singular theory and obtain a spectral sequence isomorphic to the Serre sequence. The technique of proof is that of acyclic models, due to Eilenberg and MacLane (this Zbl. **50**, 172), which is developed in a very abstract setting to formalize the notions of singular theory and local coefficients. This enables the authors to prove that singular homology theory with local coefficients based on cubes is isomorphic with singular homology theory with local coefficients based on simplexes, a result proved for global coefficients by the method of acyclic models (in the paper cited above). [The abstractness of the authors' treatment renders this paper difficult to read and the signposting does not always seem as helpful as one would wish; moreover,

the authors' commendable practice of carrying a geometrical example along in the early stages unfortunately peters out on p. 276 before filtered modules and spectral sequences have been mentioned. Thus it is no easy matter to discover just what the filtration is by which the authors replace Serre's filtration. Again it is difficult to understand the vital Theorem 1. 5, since C^D appears, by definition, to be a functor into $d\mathcal{Q}$ and $E_{o,q}^2$ is a functor out of $d\mathcal{F}$. P. Hilton.

Forrester, Amasa: Acyclic models and de Rham's theorem. Trans. Amer. math. Soc. 85, 307—326 (1957).

The main aim of this paper is the proof by acyclic models of de Rham's theorem giving an isomorphism between the singular cohomology ring of a paracompact C^∞ manifold and the cohomology ring based on differential forms and exterior derivatives and products. The author requires a generalization of the notion of representability of a functor $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Q}_A$ where \mathcal{A} is a category (with models) and \mathcal{Q}_A is the category of left A -modules. First a formalization of a model theory is given. Let $F(\mathcal{A}, \mathcal{Q}_A)$ be the category of covariant functors from \mathcal{A} to \mathcal{Q}_A and natural transformations: this is an additive category. Then a direct model theory on \mathcal{A} is a pair (R, Γ) where R is an additive covariant functor from $F(\mathcal{A}, \mathcal{Q}_A)$ to itself and Γ is a natural transformation of R to the identity. An inverse model theory is defined similarly (Γ is then from I to R) and it is shown how a category with models $(\mathcal{A}, \mathcal{M}, S)$ gives rise to a direct model theory on \mathcal{A} and an inverse model theory on \mathcal{A}^* . Then (compare the paper reviewed above and the paper by Eilenberg-MacLane cited in that review) a representation of T is a natural transformation $\chi: T \rightarrow R(T)$ such that $\Gamma(T)\chi = 1$ (if (R, Γ) is an inverse system we require $\chi \Gamma(T) = 1$, $\chi: R(T) \rightarrow T$). If the naturality requirement on χ is dropped, χ is called a semi-representation of T . Following this definition, Chapter I closes with the definition of the product of two model theories and shows that the product preserves (semi-) representability. Chapter II is devoted to the general development of the theory of acyclic models. If $\partial\mathcal{Q}_A$ is the category of chain complexes in \mathcal{Q}_A then a functor $K: \mathcal{A} \rightarrow \partial\mathcal{Q}_A$ is acyclic in dimension n if there are natural transformations $\Delta_n: K_n \rightarrow K_{n+1}$, $\Delta_{n-1}: K_{n-1} \rightarrow K_n$ such that $\partial_{n+1}\Delta_n + \Delta_{n-1}\partial_n = 1$. Dispensing with the naturality of Δ_n , Δ_{n-1} one gets the notion of semi-acyclicity. The author obtains generalizations of the main theorems of Eilenberg-MacLane (on acyclic models) involving semi-acyclicity and semi-representability assumptions which ensure that two chain transformations of chain functors induce homology isomorphisms; there are dual statements in cohomology. Chapter III is devoted to a formalization of the notion of cup-product of cochains and cohomology classes. In Chapter IV the singular C^r -homology theory of C^r manifolds is described and it is shown (by the method of acyclic models) that if $s < r$ then the C^s - and C^r -homology theories coincide on C^r manifolds. Chapter V describes the de Rham theory and establishes the fundamental isomorphism.

P. Hilton.

Matuzjavičius (Matuzevichus), A.: Cross-sections of twofold fiber spaces. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 272—273 (1957) [Russisch].

In dieser Note wird das Problem behandelt, Aussagen über Schnittflächen in gewissen Faserräumen zu machen. Seien $\mathfrak{P}_1 = \{P_1, p, B\}$, $\mathfrak{P}_2 = \{P_2, p', P_1\}$ zwei Faserräume, in denen die Basis des zweiten der Raum des ersten ist und seien $\mathfrak{S}_i: B^r \rightarrow P_1$ zwei Schnittflächen in $P_i|B^r$, die in B^{r-1} zusammenfallen. Man betrachte die durch die Abbildung induzierten Faserräume $\mathfrak{P}_{\mathfrak{S}_1}$, $\mathfrak{P}_{\mathfrak{S}_2}$. Ferner wird angenommen, es gäbe in $\mathfrak{P}_{\mathfrak{S}_1}$, $\mathfrak{P}_{\mathfrak{S}_2}$ (welche über B^{r-1} zusammenfallen) eine Schnittfläche ψ . Man kann jetzt die Obstruktionen für ψ , $z_i^r \in Z^r(B^r, \pi^{r-1}(C'))$ ($C' = (p')^{-1}x$, $x \in C_1 \subset P_1$) und die entsprechenden Kohomologieklassen Z_i^r bilden, ebenso die Differenzkette $d^r\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2}$ von \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 in \mathfrak{P}_1 , welche hier ein Kozyklus ist, beziehungsweise deren Kohomologieklassen $D^r\mathfrak{S}_{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2}$. Verf. beschreibt nun mittels der Homotopiesequenz der entsprechenden Faserräume einen Operator $\hat{A}: H^r(B^r, \pi^r(C_1)) \rightarrow H^r(B^r, \pi^{r-1}(C'))$

$(C_1 = p^{-1}(x_0), x_0 \in B)$ und beweist die Formel $Z_1^r - Z_2^r = \hat{A} D_{\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2}^r$. Am Schluß wird dann noch ein Beispiel für obige Formel und deren Brauchbarkeit angegeben.

F. W. Bauer.

Dehevels, René: Classes caractéristiques d'une application continue. Centre Belge Rech. math., Colloque de Topologie algébrique, Louvain les 11, 12 et 13 juin 1956, 121—133 (1957).

Une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens $(1): 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ sur un espace topologique paracompact X est dite localement triviale si pour tout faisceau F , la suite

$$(2) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}(F, A) \rightarrow \text{Hom}(F, B) \rightarrow \text{Hom}(F, C) \rightarrow 0$$

est aussi exacte. Dans ce cas, soit Φ la classe fondamentale de $\text{Hom}(C, C)$ définie par l'application identique de C dans C . Son image $\gamma \in H^1(X, \text{Hom}(F, A))$ par l'homomorphisme cobord de la suite exacte de cohomologie définie par (2), avec $F = C$, est appelée classe caractéristique de la suite (1) sur X . L'A. montre que l'homomorphisme cobord $H^n(X, C) \rightarrow H^{n+1}(X, A)$ de la suite de cohomologie définie par (1) est le cup produit par γ dans l'accouplement canonique de $H^n(H, C)$ et $H^1(X, \text{Hom}(C, A))$ à $H^{n+1}(X, A)$. Comme cas particulier, il décrit la classe caractéristique d'une application continue introduite dans une Note antérieure (ce Zbl 65, 164). Enfin, il établit un isomorphisme entre la cohomologie de Čech et la cohomologie d'Alexander-Spanier de X , à coefficients dans un faisceau d'anneaux.

A. Borel.

Rochlin (Rokhlin), V. A.: On Pontrjagin characteristic classes. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 276—279 (1957) [Russisch].

Ein zentrales Problem der modernen Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist die Frage der Invarianz der Pontrjagin-Klassen. In dieser Note wird bewiesen, daß die Pontrjaginklasse (rat. Koeff.) $p_4(M^5)$ für eine beliebige differenzierbare 5-dimensionale Mannigfaltigkeit eine topologische Invariante ist. Allgemein wird bewiesen, daß $s_{4k}(M^{4k+1}) - \varphi_k(p_4, \dots, p_{4k})$ eine topologische Invariante ist, wobei φ_k ein Polynom mit ganzen Koeffizienten in den rationalen Pontrjaginklassen ist. Bereits bekannt ist, daß $p_4(M^4)$ oder allgemeiner $s_{4k}(M^{4k})$ eine topologische Invariante ist. Das Ergebnis ist deshalb von Wichtigkeit, weil sich i. a. diese Pontrjaginklasse $p_4(M^5)$ nicht mehr durch den Kohomologiering und dessen Invarianten ausdrücken läßt. Der Beweis verläuft so, daß man sich zwei topologisch äquivalente Exemplare M^{4k+1} und M_1^{4k+1} sowie zwei $4k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten $V^{4k} \subset M^{4k+1}$ bzw. $V_1^{4k} \subset M_1^{4k+1}$, denen ein vorgeschriebenes Element $u^{4k} \in H^{4k}(M^{4k+1})$ entspricht, vorgibt. Mit ganz elementaren Mitteln kann man zeigen, daß es zum Beweis der Behauptung genügt nachzuweisen, daß für den Index der Mannigfaltigkeiten $\sigma(V_1) = \sigma(V)$ gilt. Beim Beweis dieser Beziehung wird nun wesentlich benutzt, daß $\dim M - \dim V = 1$ ist, d. h. V eine Umgebung U in M besitzt, die aus lauter geodätischen Normalen zu V besteht, die von V in zwei Teile U_1, U_2 geteilt wird. Man kann V_1 in U_1 einbetten und es gibt eine Mannigfaltigkeit K^{4k+1} die von der Vereinigung von V, V_1 berandet wird. Diese Mannigfaltigkeit K braucht nicht differenzierbar eingebettet zu sein. Da nun $\sigma(V) - \sigma(V_1) = \sigma(\text{Rand von } K) = 0$ ist wegen eines Satzes von Thom, ist $\sigma(V) = \sigma(V_1)$. Die Note enthält ferner einen Beweis, daß $p_4(M^n)$ für $n > 4$ nicht durch den Kohomologiering von M definiert ist, sowie Übertragungen von Sätzen über $s_{4k}(M^{4k})$ auf $s_{4k}(M^{4k+1})$.

F. W. Bauer.

Rochlin (Rokhlin), V. A. and A. S. Švare (Schwarz): The combinatorial invariance of Pontrjagin classes. Doklady Akad. Nauk SSSR 114, 490—493 (1957) [Russisch].

Diese Note enthält einen Beweis für die kombinatorische Invarianz der Pontrjaginklassen mit rationalen Koeffizienten, eine Konstruktionsvorschrift für gewisse

Klassen $\sigma_{4k}(M^n)$, für kombinatorische Mannigfaltigkeiten, aus denen sich für differenzierbare Mannigfaltigkeiten die Pontrjaginklassen berechnen lassen, und allgemeine Betrachtungen, die sich an die Milnorsche Sätze anschließen und die in der Alternative enden: Entweder ist die Hauptvermutung der kombinatorischen Topologie falsch oder aber eine gewisse (schon von Milnor konstruierte) Mannigfaltigkeit ist nicht differenzierbar. Der Hauptsatz der Arbeit lautet folgendermaßen: Seien M_0^n und M_1^n zwei glatte abgeschlossene Mannigfaltigkeiten, die isomorphe C^1 -Triangulationen K_0 und K_1 zulassen, und sei $\varphi: M_0^n \rightarrow M_1^n$ eine homöomorphe Abbildung, die einen Isomorphismus von K_0 und K_1 herstellt. Sodann ist $\varphi^*(p_{4k}(M_1^n)) = p_{4k}(M_0^n)$ ($k = 1, 2, \dots$). Schon hier stellt sich ein enger Zusammenhang zur „Hauptvermutung“ heraus: Wenn diese richtig ist, dann sind die Pontrjaginzahlen wegen obigen Satzes topologisch invariant. J. Milnor konstruierte zwei Mannigfaltigkeiten M_k^7 , welche zur S^7 homöomorph sind, ohne diffeomorph zu sein. Die Verff. zeigen, daß diese beiden Mannigfaltigkeiten isomorphe C^1 -Triangulationen besitzen, ihr Satz also hier in nicht trivialer Weise angewandt werden kann. Der Beweis benutzt außer zwei elementaren Lemmata die beiden Sätze, daß (1) (Thom) der Index einer Mannigfaltigkeit additiv und für berandete Mannigfaltigkeiten Null ist, und daß es (2) (Serre und Thom) eine Zahl m gibt, so daß jedes mu , $u \in H_{4k}(M^n)$ eine differenzierbare orientierte Untermannigfaltigkeit N^{4k} enthält, so daß für eine gewisse glatte Abbildung $f: M^n \rightarrow S^r$ und für einen Punkt $c \in S^r$, $N^{4k} = f^{-1}c$ und c ein sogenannter allgemeiner Punkt der Abbildung ist, d. h. daß in allen Punkten von N der Rang der Funktionalmatrix r ist. Der Beweis selber verläuft so, daß man zunächst $\varphi^*(p_{4k}(M_1)) = p_{4k}(M_0)$ auf $\varphi^*(s_{4k}(M_1)) = s_{4k}(M_0)$ zurückführt, was ohne weiteres möglich ist, weil die s_{4k} Polynome in den Pontrjaginklassen bis zur Dimension $4k$ sind und sich aus der zweiten Beziehung also die p_{4k} sukzessive berechnen lassen. Um die Gleichheit der s zu beweisen, zeigt man, daß das Skalarprodukt von beiden Gliedern mit jeder Klasse $u \in H_{4k}(M^n)$ gleich ist, was zu der Gleichung $\sigma(N_0) = \sigma(N_1)$ für den Index der oben mit N bezeichneten Mannigfaltigkeiten, die zu der Klasse u in M_0 bzw. M_1 gehören, führt. Diese letzte Behauptung wird nun durch eine einfache Homotopiebetrachtung bewiesen. Dabei konstruiert man im Prisma über M_0 (mit dem Dach M_1) eine Mannigfaltigkeit, die gerade $N_0 - N_1$ als Rand hat, so daß wegen obigen Satzes der Index von $N_0 - N_1$ gleich Null ist, was die behauptete Indexformel liefert. Der Index einer gewissen Mannigfaltigkeit, die man aus obigem Satz (2) von Thom und Serre erhält, liefert die Klassen σ_{4k} als Elemente des rationalen Kohomologieringes. Im differenzierbaren Falle kann man dann mit deren Hilfe s_{4k} erklären, die dann zu den Pontrjaginklassen führen. Trotzdem die Note nur recht kurz ist, sind die Hauptergebnisse verständlich. Es sei noch erwähnt, daß einige Ergebnisse dieser Arbeit, wie dem Referenten mitgeteilt wurde, unabhängig von R. Thom gefunden worden sind. Das ist insofern auch nicht verwunderlich, weil die Beweismittel der Verff. fast alle auf Thomsche Vorarbeiten zurückgehen.

F. W. Bauer.

Kan, Daniel M.: On c. s. s. complexes. Amer. J. Math. 79, 449–476 (1957).

This paper contains detailed proofs of the results announced in the author's paper Abstract Homotopy III (this Zbl. 71, 168). We recall the basic concepts. A c. s. s. complex K is required to satisfy an extra condition in order that the full force of homotopy theory may be brought to bear. This condition is called the extension condition; it corresponds roughly to the requirement that it should be possible to „fill in“ a simplex when all but one of its faces are given. If \mathcal{S} is the category of c. s. s. complexes and \mathcal{S}_E the full subcategory of c. s. s. complexes satisfying the extension condition, let $Q: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_E$ be a functor and $q: I \rightarrow Q$ a natural transformation of the identity I into Q . Then (Q, q) is called an H -pair if (a) Q respects homotopy, (b) qK is a homotopy equivalence if $K \in \mathcal{S}_E$, (c) if $f: QK \rightarrow QK$ satisfies $f(qK) = qK$, then f is a homotopy equivalence. These

conditions ensure that homotopy notions in \mathcal{S} may be transferred to \mathcal{S}_E and retain their identity and that two H -pairs induce the same homotopy notions. An example of an H -pair is the pair $(\mathcal{S} \mid |, j)$ where $|$ is the geometric realization functor, \mathcal{S} is the singular functor, and j assigns to K the natural embedding $j_K: K \rightarrow \mathcal{S} \mid |K|$. In this paper the author describes and discusses an H -pair $(\text{Ex}^\infty, e^\infty)$ which is defined in a purely combinatorial way. The functor Ex^∞ is obtained from a functor $\text{Ex}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ and a natural transformation $e: I \rightarrow \text{Ex}$ such that e embeds K in $\text{Ex} K$. Then $\text{Ex}^\infty K$ is the direct limit of the sequence $K \xrightarrow{e_K} \text{Ex} K \xrightarrow{e(\text{Ex} K)} \text{Ex}^2 K \rightarrow \dots$ and $e^\infty K$ is the embedding of K in the direct limit. The functor Ex turns out to be the right adjoint (in a sense due to the author) of the subdivision functor $\text{Sd}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. The author proves (Theorem 8.3) that if $K, L \in \mathcal{S}$ with K finite and if $f: |K| \rightarrow |L|$ is a map, then there exists a c. s. s. map $h: K \rightarrow \text{Ex}^n L$ such that $|h| \simeq e^n L |f|$. The dual of this is the simplicial approximations theorem for c. s. s. complexes.

P. Hilton.

Inoue, Yoshiro: A note on homotopy classification and extension. *Proc. Japan Acad.* **33**, 87—89 (1957).

Let Y be a space such that $\pi_i(Y) = 0$ for $0 \leq i < n$, $n < i < q$, $q < i < r$, where $n > 1$. Mizuno (this Zbl. **66**, 414, we refer to this paper as M) has obtained expressions for certain obstructions to extensions and homotopies of maps of a complex K into Y when $r < 2q - 1$. In this note the author solves the same problems when $r \geq 2q - 1$; the notations of the note and this review are those of M. The resulting formulae closely resemble those of M; in fact, the difference lies in a modification of the y_r -operation of M. The latter depended on a chain transformation $\gamma_{n,q}: K, L \rightarrow K(\pi, n, \pi', q, k)$, of degree $(n - n_1) + (q - q_1)$, which itself depended on the pair $x_{n_1} \in Z^{n_1}(K, L_1; \pi)$, $x_{q_1} \in Z^{q_1}(K, L_2; \pi')$. This the author replaces by a chain transformation $R_{n,q}$, of degree $q - q_1$, which depends on an admissible pair $x_n \in Z^n(K, L_0; \pi)$, $c_q \in C^q(K, L_0; \pi')$ (see Lemma 1.1 of M) and $x_{q_1} \in Z^{q_1}(K, L_1; \pi')$. [Reviewer's note: $L = L_1 \cup L_2$ in M, $L = L_0 \cup L_1$ in this note, c_q appeared as x_q in M.] The procedures for defining $\gamma_{n,q}$ and $R_{n,q}$ are essentially similar. Then an operation $y_\cap(x_n, c_q; x_{q_1})$ is defined analogously to y_r in M and Lemma 3, Theorem 1 and Theorem 2 of this note are then the expected modifications of Theorems 7.2, 7.4 and 8.1 of M. [Reviewer's comment: The author defines a more general transformation $R_{n,q}$ depending on x_n, c_q and x_{q_1}, \dots, x_{c_r} . No application is made of this increased generality which serves only to mask the resemblance of $R_{n,q}$ to $\gamma_{n,q}$. Moreover the number r occurring here is not related to the number r which appears in the hypothesis on Y .]

P. Hilton.

Hilton, P. J.: Generalizations of the Hopf invariant. *Centre Belge Rech. math., Colloque de Topologie algébrique, Louvain les 11, 12 et 13 juin 1956*, 9—27 (1957).

A survey on different approaches and generalizations in the theory of the Hopf invariant. The classical definition, definitions according to Steenrod by means of the mapping cylinder or alternatively by means of attaching a $2n$ -cell (given a map $S^{2n-1} \rightarrow S^n$) and squaring the generator of H^n . Properties of the Hopf invariant. Hilton's homomorphism $H^*: \pi_r(S^{n+1}) \rightarrow \pi_{r+1}(S^{2n+2})$ defined by pinching the equator of $S^{n+1} (\rightarrow S_1^{n+1} \vee S_2^{n+1})$, then applying the homotopy boundary homomorphism $\pi_r(S_1^{n+1} \vee S_2^{n+1}) \rightarrow \pi_{r+1}(S_1^{n+1} \times S_2^{n+1}, S_1^{n+1} \vee S_2^{n+1})$, and finally pinching $S_1^{n+1} \vee S_2^{n+1}$ to a point. Its relation to G. W. Whitehead's H_r for $r \leq 3n$. viz. $H_0 = sH^*$ where s is the suspension. A more recent generalization (cf. this Zbl. **64**, 173) by Hilton using the decomposition $\pi_r(S_1^{n+1} \vee S_2^{n+1}) \cong \pi_r(S_1^{n+1}) + \pi_r(S_2^{n+1}) + \sum_{i=3}^{\infty} \pi_r(S^{qi n+1})$, where each factor is embedded by means of an appropriate basis product. Another generalization by I. M. James (this Zbl. **71**, 170), and unpublished results.

H. Freudenthal.

James, I. M.: Multiplication on spheres (I). Proc. Amer. math. Soc. 8, 192—196 (1957).

On the n -sphere S^n a multiplication is homotopy-commutative if and only if $n = 1$. There exists an element of Hopf invariant unity in $\pi_{2n+1}(S^{n+1})$ if and only if S^n admits a multiplication.

H. Freudenthal.

Curtis, M. L. and M. K. Fort jr.: Homotopy groups of one-dimensional spaces. Proc. Amer. math. Soc. 8, 577—579 (1957).

Verff. beweisen: die n -dimensionalen Homotopiegruppen, $n > 1$, eines eindimensionalen separablen metrischen Raumes sind Null.

J. Weier.

Kelly, Paul J.: A congruence theorem for trees. Pacific J. Math. 7, 961—968 (1957).

Es seien a_1, a_2, \dots, a_n bzw. b_1, b_2, \dots, b_n ($n \geq 3$) die Knotenpunkte eines Baumes A bzw. B . Es sei weiter $c(a_i)$ bzw. $c(b_i)$ ein Teilgraph des Graphen A bzw. B , der aus A bzw. B durch das Weglassen des Knotenpunktes a_i bzw. b_i samt allen mit a_i bzw. b_i inzidenten Kanten entsteht. Verf. beweist folgenden sehr interessanten Satz: Sind $c(a_i)$ und $c(b_i)$ für jedes $i = 1, 2, \dots, n$ zueinander isomorph, so gilt dasselbe auch für A und B . Der Beweis dieses Satzes ist kompliziert und wird nur für den Fall der Bäume mit Bizentren durchgeführt.

K. Čulík.

Angewandte Geometrie:

Camps, F. et M. Leprepre: Influence de la distorsion d'un objectif en aérotriangulation et en aéronivellement. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 26, 299—313 (1957).

● Rainsford, Hume F.: Survey adjustments and least squares. London: Constable & Co. Ltd. 1957. X, 326 p. 50 s.

Das Werk geht in seiner Zielsetzung auf die praktischen Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate im Vermessungswesen aus und widmet insbesondere der Ausgleichung von Triangulationen einen breiten Raum, ein Gebiet, auf dem Verf. in langjähriger Tätigkeit an verantwortlicher Stelle reiche Erfahrungen sammeln konnte. Demgemäß beschränken sich die Ausführungen über die Theorie der Beobachtungsfehler (Kap. 1—2) auf einen gedrängten Überblick mit Hinweisen auf die Originalliteratur. Die Kap. 3—5 behandeln die Bildung und Auflösung der Normalgleichungen für vermittelnde und bedingte Beobachtungen sowie die Berechnung der mittleren Fehler von ausgeglichenen Größen und von Funktionen derselben. Von den numerischen Verfahren zur Auflösung der Normalgleichungen werden der modernisierte Gaußsche Algorithmus und die Cholesky-Methode an Hand von Zahlenbeispielen und mit Betrachtungen über die erforderliche Rechengenauigkeit sehr eingehend erläutert. Da die bei der Weiterentwicklung der numerischen Verfahren in den letzten 20 Jahren gemachten Fortschritte hier erstmalig in einer geschlossenen Darstellung gebracht werden, dürfte dieser Teil auch für einen der Geodäsie fernstehenden Leser interessant sein, der sich bei der Auswertung von Beobachtungsergebnissen gleich welcher Art einer ökonomischen und durch laufende Proben gesicherten Rechenmethode bedienen möchte. Die Kap. 6—10 sind vorwiegend der Ausgleichung von Triangulierungen und von Nivellements- und Polygonnetzen gewidmet. Die Stationsausgleichungen (Kap. 6) werden wie üblich getrennt für Winkelmessungen und Richtungssmesungen behandelt. Dabei wird die Frage, ob es zweckmäßiger sei, nach Winkeln oder nach Richtungen auszugleichen, vom Verf. zugunsten der ersteren entschieden, obwohl die aus einem beobachteten Richtungssatz abgeleiteten Winkel nach herkömmlicher Auffassung nicht als „freie Funktionen“ anzusehen sind und daher streng genommen nicht wie unabhängige Beobachtungen behandelt werden dürfen. Der Abschnitt Netzausgleichung (Kap. 7) bringt die bekannten Beziehungen für die Aufstellung der Winkelsummen- und Seitenbedingungen sowohl für Winkel- wie für Richtungsausgleichung und gibt insbesondere für die

numerische Durchführung wertvolle Hinweise. Am Beispiel komplizierterer Netzfiguren wird gezeigt, wie man durch Einführung von fingierten Richtungen, die vor Aufstellung der Normalgleichungen zu eliminieren sind, die Bedingungsgleichungen finden kann. In der Frage, ob man Winkel oder Richtungen als beobachtete Größen in die Netzausgleichung einführen soll, gelangt Verf. auf Grund von Gewichtsbetrachtungen und aus praktischen Überlegungen heraus zu der Auffassung, daß der Ausgleich nach Winkeln der Vorzug zu geben sei. Schließlich wird die vermittelnde Ausgleichung eines Netzes mit Zwangsanschlüssen behandelt. Der Abschnitt Näherungsmethoden (Kap. 8) befaßt sich mit der Zerlegung eines Netzes in Teilnetze, die dann schrittweise unter Zwang aneinander angeschlossen werden, und mit der graphischen Verteilung von Anschlußwidersprüchen. Ferner werden hier Koordinatenumformungen mit empirischer Bestimmung der Umformungskonstanten und die Ausgleichung fehlerzeigender Punktreihen behandelt. Für die Ausgleichung von Polygonnetzen und Höhennetzen (Kap. 9) werden stark vereinfachende Methoden angegeben; dabei wird die Frage des Gewichtsansatzes für trigonometrische Höhennetze eingehend erörtert. Die beim Schließen eines aus Dreiecksketten gebildeten Kranzsystems auftretenden Seiten-, Azimut- und Koordinatenbedingungen werden in Kap. 10 für die Rechnung auf dem Sphäroid und in der Projektionsebene aufgestellt. Ein Zahlenbeispiel für eine unter Zwang angeschlossene Dreieckskette mit als bekannt angenommenen wahren Fehlern gibt Aufschluß über den Rechengang und über die durch die Kranzbedingungen bewirkte Steigerung der Genauigkeit. Die beiden letzten Kapitel behandeln die Fehlertheorie von Basismessungen, die Ausgleichung von Radarnetzen, Bildtriangulationen und astronomischen Positionsbestimmungen sowie statistische Fragen. Das Buch, das mit kritischem Sinn aus der Praxis heraus für die Praxis geschrieben wurde und sich durch eine außerordentliche Klarheit der Darstellung auszeichnet, wird insbesondere dem mit der Materie bereits vertrauten Fachmann eine Fülle von Anregungen geben können. Im Anhang finden sich Tafeln zur Gaußschen Fehlerkurve und ein Schriftenverzeichnis mit fast 300 Titeln.

W. Hofmann.

Adams, Ernst: Beitrag zum Problem der schnellsten Flugverbindung zwischen zwei Punkten. *Z. Flugwiss.* 5, 12—15 (1957).

Für den praktischen Luftverkehr ist es von großer Wichtigkeit, den schnellsten Flugweg zwischen zwei gegebenen Punkten bei beliebiger Windverteilung zu kennen. Solange die Flugstrecke nur einige 100 km beträgt, ist es möglich, diese Aufgabe in einer Ebene zu lösen. Bei größeren Flugstrecken ist jedoch die Kugelgestalt der Erde zu berücksichtigen. Verf. behandelt diese Aufgabe nach den üblichen Methoden der Variationsrechnung und entwickelt hieraus eine Näherungskonstruktion, die bei Kenntnis des Feldes der Windrichtungen und Windstärken die Ermittlung des sphärischen Minimalweges in der ebenen Mercatorkarte gestattet. *G. Bock.*

Theoretische Physik.

● **Fischer, Otto F.:** Five mathematical structural models in natural philosophy with technical physical quaternions. Stockholm: Axion Institute N. Kungsvägen 1957. VI, 412 p. \$ 10,—.

Schon in einem vorangegangenen Werk (*Universal mechanics and Hamilton's quaternions*; dies. Zbl. 44, 385) hat Verf. eine Reihe von Gegenständen der theoretischen Physik mit Hilfe der „Quaternionen“ dargestellt. Diese Studien werden in dem vorliegenden Werk für fünf ausgewählte Gegenstände vertieft betrieben. Die Ergebnisse nennt Verf. „mathematische Strukturmodelle“ innerhalb einer Wissenschaft, die er versuchsweise „Strukturologie“ betitelt. Der Stoff ist stark gedrängt.

Der Leser muß mit der Tensoranalysis und mit den betrachteten physikalischen Gegenständen gut vertraut sein; von besonderem Nutzen wird ihm das oben genannte Buch des Verf. sein. Beide Bücher sind in Rotaprint-Druck hergestellt. Ein erstes Kapitel bringt gedrängt das nötigste über Quaternionen, Achtervektoren u. a. Im Kapitel II werden die klassischen Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik in Quaternionenform behandelt. Das führt zu dem ersten Modell: die vierdimensionale Elektrodynamik findet Ausdruck in sechs Gleichungen, die in ästhetischer Form in einer „Potentialpyramide“ aufgebaut werden. Im Kapitel III und IV werden die orthogonalen Transformationen des vierdimensionalen Raumes betrachtet und auf die relativistischen Transformationen der speziellen Relativitätstheorie angewandt, die elastischen Deformationen des vierdimensionalen Raumes auf die Feldtensoren der relativistischen Elektrodynamik. Das liefert das zweite Modell. Ein drittes Modell in den Kapiteln V und VI entsteht durch die Anwendung des Kalküls der Motoren nach v. Mises auf die klassische Mechanik und die Mechanik der deformierbaren Medien. In den Kapiteln VII und VIII wird als viertes Modell das „quantenmechanische Modell der Diracschen Achtervektoren“ dargestellt. Die letzten beiden Kapitel bringen ein Modell, das der Verf. „the quaternionian de Broglie wave model“ nennt. Dabei führen das Hamiltonsche und das Lagrangesche Extremalprinzip zu den de Broglie-Wellen, die aber wieder von einem algebraischen Standpunkt aus betrachtet werden.

G. Bayer.

Brand, Louis: The Pi theorem of dimensional analysis. Arch. rat. Mech. Analysis 1, 35—45 (1957).

1. Let the physical quantities involved X_i to have positive measures x_i which depend upon a system of m fundamental units U_1, U_2, \dots, U_m . When these units are changed to $U'_j = U_j/t_j$, ($t_j > 0$), the positive variables x_i also change. If the new value x'_i is related to the old by the equation $x'_i = t_1^{a_{i1}} \dots t_m^{a_{im}} x_i$, we say that x_i (strictly X_i) has the dimensions (a_{i1}, \dots, a_{im}) in the units U_1, \dots, U_m . The dimensions of n quantities X_i may be arranged in a rectangular $n \times m$ „dimensional matrix“ (a_{ij}) . 2. If the measure of the physical quantity is expressed as a function of x_1, \dots, x_n , $n = f(x_1, \dots, x_n)$, and if this equation holds for all changes of units, then under the given unit change this function is dimensionally homogeneous or „isobaric“, i. e., it satisfies the identity in t_1, \dots, t_m :

$$f(t_1^{a_{11}} \dots t_m^{a_{1m}} x_1, t_1^{a_{21}} \dots t_m^{a_{2m}} x_2, \dots) = t_1^{a_{11}} \dots t_m^{a_{1m}} f(x_1, x_2, \dots)$$

3. Thus, the Pi theorem can be stated as follows: Let the function f in a equation $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ with n arguments be isobaric with respect to m fundamental units U_1, U_2, \dots, U_m . Then if the $n \times m$ dimensional matrix of x_1, \dots, x_n is of rank $r = n - k$, the given equation is equivalent to $f(1, 1, \dots, 1, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k) = 0$, in which the first r arguments are 1, and the π 's are $n - r$ independent and dimensionless products formed from x_1, \dots, x_n . 4. In the second part of the paper, the author workes out an example which shows that certain „paradoxes“ arising in the application of the Pi theorem are not due to any failure of this theorem, but are due to the choice of fundamental units. For every physical assumption, the Pi theorem gives a corresponding answer, and experiment alone can decide which of several answers most nearly matches the fact.

Dan Gh. Ionescu.

● **Newman, F. H. and V. H. L. Searle:** The general properties of matter. 5th ed. London: Edward Arnold (Publishers) Ltd. 1957. XI, 428 p. 32 s. 6 d. net.

Die wohlbegründeten Kenntnisse über die physikalische Struktur der Materie haben nicht nur für Physiker, sondern auch für Ingenieure und Chemiker Bedeutung. Deswegen werden einige ausgewählte und in den üblichen Lehrbüchern meistens nicht ausführlich dargelegte, doch wichtige und interessante Kapitel der klassischen phänomenologischen, sowie der statistischen Theorien der Materie in dem vorliegenden Lehrbuch in ausgezeichnete Weise dargelegt. Die behandelten Probleme werden

gleicherweise vom Standpunkte der experimentellen und theoretischen Physik, sowie von den benützten mathematischen Methoden aus ausführlich und befriedigend behandelt, so daß es kein Wunder ist, daß die vorliegende Auflage schon die fünfte ist. Es sei aber bemerkt, daß diese letzte Ausgabe eine völlig durchgearbeitete Version der früheren ist. — Zuerst werden die allgemeinen Prinzipien der Mechanik und der festen Körper zusammengestellt (Kap. I); dann wird die Beschleunigungswirkung des Gravitationsfeldes und insbesondere die Theorie des Eötvösschen Pendels eingehend behandelt (Kap. II). In den nächsten zwei Kapiteln werden die klassische Feldtheorie des Gravitationsfeldes und die Elemente der relativistischen Mechanik (Kap. III), sowie die Theorie der gyroskopischen Bewegung und der gyroskopischen Apparate zusammengefaßt (Kap. IV). Kap. V beschäftigt sich mit der Kontinuums-theorie des Elastizität. Die nachfolgenden Kapitel sind insbesondere für Chemiker von Bedeutung, in diesen wird nämlich die Theorie der Flächenspannung (Kap. VI), der Viskosität (Kap. VII), sowie die kinetische Theorie der Materie (Kap. VIII), endlich die phänomenologische Theorie der Osmose und der Diffusion (Kap. X), behandelt. Dazwischen in Kap. IX werden die grundlegenden Sätze der Fourierschen Reihen dargelegt. Dann werden die Theorie der Vibrationen (Kap. XI), die dynamischen Bewegungsgleichungen (Kap. XII), die Theorie der Wellenbewegung (Kap. XIII) und endlich in Kap. XIV die Einheitssysteme, sowie die Elemente der Dimensionsanalyse behandelt. — In allen Kapiteln werden die verschiedenen Methoden durch zahlreiche ausführlich gelöste konkrete und vom Standpunkte der Praxis aus wichtige Probleme erklärt. Die ausgezeichnete didaktische Methode der Verf. macht ihr Buch für fortgeschrittene Hochschulstudenten und Fachleute zur Weiterentwicklung in der praktischen physikalischen Materiekunde sehr brauchbar.

J. I. Horváth.

● **Russian-english glossary of electronics and physics.** New York: Consultants Bureau, Inc. 1957, II, 343, XI p. 10 dollars.

Das vorliegende Wörterbuch befriedigt das dringende Bedürfnis nach einem russischen Spezial-Lexikon. Es ist ein Teil von acht Fachwörter-Verzeichnissen, die die Grundlage zu einem physikalischen Lexikon Russisch-Englisch bilden und später zu einem vollständigen Fachwörterbuch zusammengefaßt werden sollen. Dieser Teil enthält rund 20000 Stichwörter aus den verschiedenen Gebieten der Elektronik. Die Auswahl erfolgte aus den letzten Bänden russischer Fachzeitschriften (insbesondere aus *Avtomatika i telemekhanika*, *Žurnal tehničeskij fiziki* u. a.). Ein Anhang enthält ein Verzeichnis sowjetischer Röhrenbezeichnungen, Einheiten, Abkürzungen usw.

H. W. Streitwolf.

● **Russian-english glossary of nuclear physics and engineering.** New York: Consultants Bureau, Inc. 1957, II, 195 p. 10 dollars.

Dieses weitere Heft aus der Reihe der „Russian English Glossaries“, die vorläufig nach Fachgebieten geordnet einzeln in gut lesbaren Typographien veröffentlicht werden (vgl. vor- und nachstehendes Referat), enthält die Termini aus der Kernphysik, Kerntechnik und verwandten Gebieten. Die Grundlage bildet ein in der UdSSR erschienenes Russisch-Englisches Wörterbuch der Kernphysik von N. N. Ershov, Y. V. Semenov und A. J. Cherny. Es wurde um 2000 Wörter erweitert, die den letzten Heften sowjetischer Zeitschriften (insbesondere *Žurn. éksper. teor. Fiz.*, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, u. a.) entnommen wurden. Das Heft umfaßt etwa 11000 Stichwörter.

H. W. Streitwolf.

● **Russian-english glossary of solid state physics.** New York: Consultants Bureau, Inc. 1958. 90 p. 10 dollars.

Dieser weitere Band der acht russischen Fachwörter-Verzeichnisse umfaßt etwa 4000 Stichwörter, die aus den letzten Bänden russischer Fachzeitschriften (insbesondere *Žurnal éksperimental'noj i teoretičeskij fiziki*, *Žurnal tehničeskij fiziki* und *Doklady Akademii Nauk SSSR*) entnommen worden sind. Dabei wurden

vor allem Begriffe aus der Festkörperphysik, der Kristallographie, der Metallphysik, Metallurgie usw. berücksichtigt. Der Text ist in gut lesbarer Schreibmaschinenschrift geschrieben.

H. W. Streitwolf.

Infeld, L. and J. Plebański: On a further modification of Dirac's functions. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 51—54 (1957).

Fortsetzung einer früheren Arbeit der Verff. (vgl. dies. Zbl. 71, 392). [Anbringung von Vereinfachungen.]

W. Klose.

Mechanik:

● Szabó, István: Einführung in die Technische Mechanik. Nach Vorlesungen. 3. verbesserte und erweiterte Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1958. XII, 419 S. mit 517 Abb. Ganzln. DM 22,50.

Die dritte Auflage dieses vorzüglichen Lehrbuches der Technischen Mechanik unterscheidet sich von der zweiten (s. dies. Zbl. 70, 405) im wesentlichen nur durch einen Anhang, der 15 neue Aufgaben enthält (u. a. räumlich gekrümmter Stab mit beliebiger Belastung, Spannungsverteilung im stark gekrümmten Stab, ein Raketen- und ein Satellitenproblem).

A. Weigand.

Chicarro, Mateo F.: Projektive Transformationen in der Punktmechanik. Gac. mat., Madrid 9, 108—115 (1957) [Spanisch].

Siegel, Carl Ludwig: Vereinfachter Beweis eines Satzes von J. Moser. Commun. pure appl. Math. 10, 305—309 (1957).

Jürgen Moser hat einen Konvergenzbeweis für die Transformation einer inhaltstreuen analytischen hyperbolischen Abbildung in die Normalform gegeben (J. Moser, dies. Zbl. 72, 408). Für den Satz wird ein vereinfachter Beweis gegeben (Majorantenmethode).

E. Hardtwig.

Vâlcovici, Victor: Une extension des liaisons non holonomes et des principes variationnels. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. 102, Nr. 4, 39 p. (1958).

Der Verf. führt als Bedingungsgleichungen nur Beziehungen zwischen den Verschiebungen $d\vec{r}_i$ an Stelle von Gleichungen in den generalisierten Koordinaten $f_j(q, \dot{q}, t) = 0$ ein (vgl. dies. Zbl. 71, 180). Die Bindungen können stets linear und homogen $\sum_{i=1}^n \bar{a}_{ij} d\vec{r}_i + b_j dt = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$ angesetzt werden. Die eindeutigen Funktionen \bar{a}_{ij} und b_j sind stetige und differenzierbare Funktionen von $t, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n, \ddot{\vec{r}}_1, \dots, \ddot{\vec{r}}_n$. Die virtuellen Verschiebungen $\delta\vec{r}_i$, die in die Zentralgleichung

$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \delta\vec{r}_i = 0$ eingehen, sind mit den Bindungen verträglich, wenn

$\sum_{i=1}^n \bar{a}_{ij} \delta\vec{r}_i = 0$, $j = 1, \dots, m$ gilt. Hieraus leitet sich ein allgemeines Integralprinzip

$$\Omega \equiv \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta L + \delta' T + 2 T \frac{d}{dt} \delta t \right) dt = [m_i \dot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i]_{t=t_0}^{t=t_1}$$

mit

$$\delta L = \sum_1^n \bar{F}_i \delta\vec{r}_i, \quad \delta' T = \sum_1^n m_i \dot{\vec{r}}_i \left(\delta\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \delta t \right) \quad T = \frac{1}{2} \sum_1^n m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$

ab, das den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \bar{F}_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{a}_{ij}$ völlig äquivalent ist, wenn $\delta\vec{r}_i$ mit den Bindungen verträglich ist. Das Prinzip der kleinsten Wirkung folgt, wenn δt der Gleichung $\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta' T dt$ genügt und im Fall quasikonservativer Kräfte (vgl. dies. Zbl. 71, 180) ergibt sich eine Erweiterung der

Ergebnisse von M. E. Storch (Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 18, 162—167 (1955)). Das Hamiltonsche Prinzip (bei konservativen Kräften $\bar{F}_i = V_i U$) folgt in seiner üblichen Form, wenn δt so gewählt wird, daß

$\int_{t_0}^{t_1} E \frac{d}{dt} \delta t dt = 0$ mit $E = T - U$, was z. B. durch $\delta t = 0$ erreicht werden kann. Verallgemeinerungen dieses Prinzips ergeben sich leicht für quasikonservative Kräfte,

wenn δt der Gleichung $\int_{t_0}^{t_1} E \frac{d}{dt} \delta t dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial U}{\partial t} \delta t dt$ genügt. Für diesen Fall läßt sich eine zweiparametrische Schar von Variationsprinzipien von der Form

$\delta' \int_{t_0}^{t_1} (\alpha_1 T + \alpha_2 U) dt = 0$ herleiten, wobei δ' bedeutet, daß die Zeit in einer bestimmten

Art mitvariiert werden muß. Betrachtet werden die Spezialfälle: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$; $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$; $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$; $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$. Das allgemeine Integralprinzip wird auch im Falle nicht konservativer Kräfte zu einer Schar von Integralprinzipien erweitert, indem man δt einer Bedingung $\omega = \lambda \Omega + \lambda' \Omega'$ mit $\Omega' \equiv \alpha_1 \int \delta' T dt + \alpha_2 \int \delta L dt + \alpha_3 \int 2 T \frac{d}{dt} \delta t dt = 0$ und beliebigem λ, λ' und α_i unterwirft. Es gilt ähnlich wie bei quasikonservativen Kräften, daß aus $\Omega = 0, \Omega' = 0, \omega = 0$ die Bewegungsgleichungen folgen, wenn man je zwei der Gleichungen herausgreift, eine davon als Integralprinzip auffaßt und die andere als Bedingungsgleichung für δt .

F. Selig.

Murphy jr., Charles H.: The prediction of nonlinear pitching and yawing motion of symmetric missiles. J. aeronaut. Sci. 24, 473—479 (1957).

Treten beim Flug von symmetrischen Körpern (Symmetriewinkel $\leq 120^\circ$) größere Anstellwinkel auf, so muß man bei den Momenten (Luftkraft-, Magnus-, Dämpfungsmoment) auch nichtlineare Glieder berücksichtigen. Bei vorliegenden Untersuchungen ist der Widerstandsbeiwert konstant angenommen und das Verhältnis der Rotations- zur Translationsgeschwindigkeit soll unverändert bleiben. Dadurch vereinfachen sich die Gleichungen, und man kann bei geringen Abweichungen des Momentenverlaufs von der Linearität diese durch Anwendung des Verfahrens von Kryloff-Bogoljuboff lösen. Umgekehrt lassen sich dann aus dem Flugverhalten die nichtlinearen Beiwerte bestimmen. Von besonderem Interesse ist das Stabilitätsverhalten, das sich durch Eigenschaften der Kurven in der Amplitudenebene (Ebene K_1^2, K_2^2 , wenn die Lösung die Form $\tilde{\xi} = K_1 \exp[i(\phi_1 + \psi_1)] + K_2 \cdot \exp[i(\phi_2 + \psi_2)]$ hat) beschreiben läßt. Mehrere solcher Kurven (für nichtlineares Dämpfungsmoment und Magnusmoment) sind angegeben und werden mit experimentell gewonnenen Kurven verglichen.

H. Molitz.

Toraldo di Francia, Giuliano: Sulla traiettoria ottima di un missile leggero, soggetto a una resistenza quadratica, funzione esponenziale dell'altezza. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 12, 401—410 (1957).

Un missile è soggetto nell'intervallo $0 < t < t_1$ ad una forza propulsiva $F(t) = F(t) \mathbf{a}(t)$ [$\mathbf{a}(t)$ versore funzione di t , $F(t) > 0$] e alla resistenza dell'aria che viene supposta proporzionale al quadrato della velocità e variabile con l'altezza secondo una legge esponenziale. Supposto assegnato $F(t)$ e il missile leggero, cioè la sua massa abbastanza piccola da poter trascurare peso e forza d'inerzia rispetto a $F(t)$ (la legittimità di questa approssimazione è ampiamente discussa) viene determinato il valore di $\mathbf{a}(t)$ per cui la gittata è massima. In questo caso risulta (a meno di una traslazione) indipendente dalla $F(t)$ la traiettoria del missile, la sua velocità dipende però da $F(t)$.

D. Graffi.

Stefaniak, Hans St.: Beitrag zur Stabilität von selbststeuernden Flugkörpern. Z. Flugwiss. 5, 347—355 (1957).

Betrachtet wird die Bewegung eines Flugkörpers in einem beschleunigten Gleitflug. Die Grundgleichungen der Längsbewegung werden unter Berücksichtigung von Ausschlägen des Höhenruders aufgestellt. Es werden nun Regelungen untersucht, die die Aufgabe haben, durch Steuerung des Längsneigungswinkels den Flugkörper auf ein vorgegebenes Ziel hinzulenken. Bei der theoretischen Behandlung dieser Frage werden die in der Regeltechnik üblichen Betrachtungsweisen benutzt. Die gefundenen Ergebnisse werden mit den Resultaten von Windkanalversuchen verglichen.

G. Bock.

Steffensen, J. F.: On the problem of three bodies in the plane. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. **31**, Nr. 3, 18 p. (1957).

Es handelt sich um Reihenentwicklungen nach Potenzen von t im ebenen Dreikörperproblem mit endlichen Massen. Verf. führt die Veränderlichen $\varrho_i = r_{k,l}^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2$, $\sigma_i = |r_{k,l}|^{-3}$, $i \neq k \neq l = 1, 2, 3$, ein; der Ansatz von Potenzreihen für diese Größen führt auf Rekursionsformeln für die unbestimmten Koeffizienten, die eine relativ einfache und handliche Form haben. Verf. kann hinreichende Konvergenzbedingungen angeben; an einem numerischen Beispiel ($m_1 = 2$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$) wird die Brauchbarkeit der Entwicklungen illustriert. In besonderen Fällen, z. B. wenn $\dot{\xi}_i(0) = \dot{\eta}_i(0) = 0$ ist, vereinfachen sich die Formeln wesentlich. O. Volk.

Beleikij (Beletsky), V. V.: Integrability of equations of motion of a solid around a fixed point under the action of a central Newtonian field of force. Doklady Akad. Nauk SSSR **113**, 287—290 (1957) [Russisch].

Verf. untersucht ein gegenüber dem klassischen Fall des schweren symmetrischen Kreisels (Lagrange) erweitertes Problem, bei dem das Schwerfeld nicht als Parallelfeld, sondern als Radialfeld vorausgesetzt wird. Untersuchungen dieser Art sind für die mit der Schulerschen 84-Minuten-Periode zusammenhängenden Theorien einer beschleunigungsfreien Lotanzeige von Bedeutung. In drei Fällen läßt sich die Lösung des Problems auf Quadraturen zurückführen: 1. für die ebene Bewegung (verallgemeinertes physikalisches Pendel), 2. für einen Kreisel, bei dem der Fixpunkt mit dem Massenmittelpunkt (der hierbei nicht mit dem Schwerpunkt zusammenfällt!) übereinstimmt, 3. für einen Kreisel mit symmetrischem Trägheitsellipsoid und auf der Symmetrieachse liegendem Massenmittelpunkt. K. Magnus.

Grioli, Giuseppe: Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **27**, 90—102 (1957).

L'A. considera un corpo rigido, asimmetrico, C , con un punto fisso O , soggetto alle forze esercitate da un campo magnetico H uniforme su cariche elettriche solidali col corpo e distribuite con densità tale che i momenti d'inerzia e di deviazione, rispetto a O , delle cariche siano proporzionale agli analoghi momenti materiali. Determina anzitutto un'integrale primo dell'equazione del moto diverso da quello dell'energia; dimostra poi l'esistenza di rotazioni (ovviamente uniformi) che avvengono solo intorno a un'asse parallelo a H e che coincide, salvo per speciali valori della velocità angolare, con un asse principale d'inerzia; infine prova l'inesistenza di precessione regolari. D. Graffi.

Fung, Y. C.: Some general properties of the dynamic amplification spectra. J. aeronaut. Sci. **24**, 547—549 (1957).

Ein Schwingungssystem mit einem Freiheitsgrad und schwacher Dämpfung wird durch einen Impuls $\mathfrak{F}(t)$ erregt, wobei $\mathfrak{F}(t)$ für $t < 0$ und $t > t_0$ verschwindet und zur Zeit t_m ($0 \leq t_m < t_0$) den Maximalwert 1 erreicht. Ist ω die Eigenfrequenz des Systems, so wird bei hinreichend kleinem $\omega \cdot t_m / \pi$ der Maximalausschlag zu einer Zeit erreicht, wo der Impuls schon vorüber ist; die Größe des Ausschlages läßt sich allgemein durch eine Reihenentwicklung angeben, bei der die Momente der Impulsfunktion als Koeffizienten auftreten. Man kann aber nicht umgekehrt aus den Maximalausschlägen (Spektrum) die Momente bestimmen; dafür ist das negative Spektrum (q_{\min}) und das Beschleunigungsspektrum (\ddot{q}_{\max}) geeigneter. Das Ver-

halten bei großen Eigenfrequenzen läßt sich mittels asymptotischer Formeln, die nach einem Verfahren von Willis gewonnen werden, abschätzen. Das Maximum wird dann zur Zeit t_m erreicht und hat den Wert $1 - [\tilde{g}(0)/\omega] \cdot \sin \omega t_m + 0(1/\omega^2)$.
H. Molitz.

Sacerdoti, Silvana: Sulle deformazioni di una corda soggetta a forze col punto d'applicazione mobile. Atti Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., Ann. 245°, Rend. XI. Ser. 4, Nr. 2, 119—139 (1957).

L'A. intègre par la transformation de Laplace l'équation des cordes vibrantes en supposant la corde soumise à une force concentrée mobile (cas d'un mouvement uniforme et d'un mouvement uniformément accéléré).
C. Blanc.

Ludeke, Carl A. and John D. Blades: Fine structure of response curves of frequency entrained oscillations. J. appl. Phys. 28, 1326—1328 (1957).

By simulating with an electro-mechanical analog a forced van der Pol like system, it has been possible to observe some of the jump and hysteresis phenomena suggested by Cartwright. The dependence of entrainment band width on forcing amplitude, as suggested by Andronow and Witt, has also been observed.
Zusammenfassg. des Autors.

● Artobolevskij, I. I. und A. S. Ševčenko (unter der Redaktion von): Fragen der Theorie der Mechanismen und Maschinen. Artikelsammlung. [Voprosy teorii mekhanizmov i mašin. Sbornik statej.] Ordžonikidze-Institut für Flugwesen. Moskau: Staatsverlag der Verteidigungsindustrie 1957. 146 S. R. 7.85 [Russisch].

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln und unter der Abkürzung „Voprosy Teorii Mekhanizmov i Mašin“ angezeigt.

Hahn, W.: Zur Theorie der Relais-Regler mit Unempfindlichkeitszonen. Z. angew. Math. Mech. 37, 224—227 (1957).

Verf. studiert eine Regelung mit Hilfsenergie bei starrer Rückführung; das physikalische Gesetz der Regelstrecke wird durch ein lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung in den Regelgrößen beschrieben, der Einfluß der Stellgröße und der Rückführung ist linear, und nur der Stellmotor weist eine Nichtlinearität auf. Er soll ein Relais mit toter Zone und Lose sein, so daß seine Kennlinie Hystereseseform hat. Durch eine bestimmte lineare Variablentransformation bringt Verf. die Grundgleichungen des Regelungssystems auf die von Lur'e als kanonisch bezeichnete Form. Dann fragt er nach Selbstschwingungen des Systems und stellt ihre Existenzbedingungen auf. Schließlich prüft er die Stabilität dieser Schwingungen (im Sinne von Ljapunov), die niemals eine asymptotische sein kann. Dazu bildet er ein homogenes lineares Gleichungssystem in den Variationen für die Werte der Regelgrößen am Anfang und zu den Umschaltzeiten sowie für diese selbst, durch das ein der Selbstschwingung benachbarter Prozeß festgelegt ist. Ferner wird noch der Fall erörtert, daß eine Umschaltung des Relais an den Schwellenwerten seiner Eingangsgröße nicht erfolgen kann, weil deren Geschwindigkeit einen zu kleinen Betrag hat.

R. Reißig.

Roginskij (Roguinsky), V. N.: Equivalent transformations of relay circuits of class P. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 328—331 (1957) [Russisch].

The author defines the equivalent schemes, equivalent transformations and absolute equivalent transformations, respectively, for the π -class schemes, which contain contacts, relay windings and resistances. To a relay winding and a resistance, we associate the conductivity G , where $0 < G < 1$. Introducing the notion of „order of conductivity“ the author characterizes the action of a conductivity G on the functioning of a relay A , viz., we consider the three situations $G_{>A}$, $G_{=A}$, $G_{<A}$. E. g. $G_{>A}$ means that G in parallel to A short circuits the relay A and interrupts the functioning of the same, while in series with A does not affect its functioning. Laws of calculation for the conductibilities of the relays and the conductibilities of the contacts and relays are also given, on the ground of which we execute the equivalent transformations. The author illustrates the application of the equivalent transformations in case of the synthesis of the binary counter.

P. Constantinescu.

Temčenko (Temchenko), M. E.: On the stability of one of the mechanical equilibrium positions of a certain mechanical system. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 50—51 (1957) [Russisch].

Der Verf. untersucht die Stabilität der ausgearteten Gleichgewichtsbewegung für einen starren Körper, der an einem drehenden Faden aufgehängt ist. Oberhalb gewisser kritischer Werte für die Drehgeschwindigkeit existiert eine stationäre Bewegung, bei der sowohl der Faden als auch die Verbindungslinie von Aufhängepunkt und Schwerpunkt des Körpers von der Vertikalen abweichen. Mit Hilfe der sog. 2. Methode von Ljapunov wird nachgewiesen, daß diese Bewegungsform stabil ist.

K. Magnus.

Išlinskij (Ishlinsky), A. Ju. (A. Yu.): A bifurcation instance not leading to insteady forms of stationary motion. Doklady Akad. Nauk SSSR 117, 47—49 (1957) [Russisch].

Bei den bisher bekannt gewordenen Verzweigungsproblemen der Statik oder der Dynamik wird der vor Erreichen des Verzweigungspunktes stabile Grundzustand jeweils nach Überschreiten dieses Punktes instabil. Der Verf. zeigt nun, daß das nicht notwendig so sein muß und führt als Beispiel die Bewegung eines an einem drehenden Faden aufgehängten schweren starren Körpers an. Es existieren dabei zwei kritische Werte für die Drehgeschwindigkeit, bei denen eine Verzweigung der Gleichgewichtslage stattfindet. Der Grundzustand bleibt jedoch auch nach der Verzweigung stabil.

K. Magnus.

● **Kaufmann, Walther:** Statik der Tragwerke. (Handbibliothek für Bauingenieure, N. R.) 4. ergänzte und verb. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1957. VIII, 327 S. mit 367 Abb. Ganzleinen DM 31,50.

Die 4. Auflage dieses in den Bauingenieurkreisen bekannten Handbuches unterscheidet sich im wesentlichen nicht von der 3. Auflage und enthält auf 325 Seiten 6 Abschnitte, deren Titel der in dem Buche elementar und klar dargestellten Thematik entspricht: 1. Allgemeine Grundlagen, 2. Momente, Quer- und Normalkräfte an statisch bestimmten Stabwerken, 3. Ermittlung der Spannkkräfte statisch bestimmter Fachwerke, 4. Die elastischen Formänderungen, 5. Theorie der statisch unbestimmten Systeme, 6. Statisch unbestimmte Tragwerke.

S. Drobot.

● **Kinney, J. Sterling:** Indeterminate structural analysis. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1957. 655 p. 773 illus.

Contents: A brief history of structural theory. Stability and determinateness of structures. Basic concepts. Methods for computing deflections. The general method. The method of least work. The column analogy. Introduction to moment distribution. Additional applications of moment distribution. Analysis of frames with nonprismatic members by moment distribution. The slope deflection method. Influence lines. Elastic arches. Model analysis of structures.

Arrighi, Gino: I fondamenti della statica in una trattazione logico-deduttiva. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 12, 679—688 (1957).

L'A. présente la loi du parallélogramme en statique, comme une conséquence mathématique d'un système d'axiomes (A) et d'un postulat (P), qui devraient constituer, selon l'A., des hypothèses minimales: A I: Un déplacement rigide maintient l'équilibre ou l'équivalence de systèmes statiques de forces, A. II: Deux forces équivalentes (non-nulles) ont la même direction, A. III: Si deux forces égales appliquées au même point M , font un angle x et leur résultante a la grandeur scalaire f , il existe un angle x_1 , tel que l'une des limites de f soient finies, lorsque $x \rightarrow x_1 + 0$ ou $x \rightarrow x_1 - 0$, P. I: Deux forces égales, non-nulles, appliquées au même M et de sens différents, forment un système équivalent à une force (résultante), appliquée en M . La dém. fait intervenir les solutions de l'équation fonctionnelle

$$2\varphi(y)\varphi(x) = \varphi(x+y) + \varphi(y-x).$$

En passant, on remarque: 1. L'A. définit la force: action physique aux effets mécaniques égaux à ceux d'un fil tendu. Cette déf. ne semble jamais intervenir.

2. On pose la déf.: on appelle intensité d'une force F un scalaire f , tel qu'il soit néc. et suf. pour l'équivalence des $S_1 = \sum F_r$, $S_2 = \sum F_s$, la condition $\sum f_r = \sum f_s$. Quel sens cela a-t-il si les F_r , F_s n'ont pas une même „droite d'action“? La condition impliquerait un postulat. 3. Au § 4., on dit que la ligne d'action de la résultante de A. II est la bisectrice de x de A. III. Il n'y a pas de démonstration et cela implique un postulat.

A. Froda.

Argyris, J. H.: Die Matrizentheorie der Statik. Ingenieur-Arch. 25, 174—192 (1957).

Die Arbeit bringt in Zusammenfassung und Erweiterung einer früheren Abhandlung eine umfassende Matrizentheorie der Statik, wie sie für die hohen Anforderungen der modernen Flugzeugstatik und im Hinblick auf den Einsatz digitaler Rechenautomaten in den letzten Jahren unter wesentlicher Mitwirkung des Verf. entwickelt worden ist. Im allgemeinen Teil werden zunächst Kraft- und Deformationsmethode als duale Verfahren für nichtlineares und lineares Elastizitätsgesetz einander gegenübergestellt. In der Kraftmethode wird ein Verfahren zur Behandlung von Systemen mit Ausschnitten als Modifikationen regelmäßig gebauter Grundsysteme entwickelt. Auch die oft auftretende Aufgabe einer Modifikation einzelner Bauelemente läßt sich mit dem Matrizenverfahren auf elegante und einfache Weise lösen.

R. Zurmühl.

Hain, Kurt, Ferdinand Freudenstein, Gerd Kiper, Wolfgang Rößner, Nicolai Rosenauer, Leo Hagedorn, Rudolf Beyer, Kurt Schnarbach und Johannes Volmer: Erzeugung ungleichförmiger Umlaufbewegungen. VDI-Forschungsh. 23, Nr. 461, 56 S. (1957).

Hain, K.: Einleitung S. 5; **Freudenstein, F.:** Ungleichförmigkeitsanalyse der Grundtypen ebener Getriebe S. 6—10; **Kiper, G.:** Zur Ungleichförmigkeit periodischer Umlaufgetriebe S. 10—11; **Rößner, W.:** Viergliedrige Gelenkgetriebe in Stellungen mit extremen Werten der Abtriebs-Winkelgeschwindigkeit S. 11—14; **Rosenauer, N.:** Komplexe Synthese einer Doppelkurbel für vorgegebene Übersetzungsgrenzen S. 14—16; **Rosenauer N.:** Zur Synthese einer Doppelkurbel mit gegebenem Ungleichförmigkeitsgrad S. 16—18; **Kiper, G.:** Graphische Ermittlung von Doppelkurbeln für vorgegebene Extremwerte des Übersetzungsverhältnisses S. 18—22; **Hain, K.:** Übertragungsgünstigste unsymmetrische Doppelkurbel-Getriebe S. 23—25; **Hagedorn, L.:** Abtriebs-Winkelgeschwindigkeit umlaufender Doppelkurbel-Getriebe S. 26—29; **Hain, K.:** Die umlaufende Kurbelschleife S. 30—31; **Beyer, R.:** Räumliche Malteserkreuzgetriebe S. 32—36; **Hain, K.:** Das sechsgliedrige Zweistandgetriebe S. 37—38; **Kiper, G.:** Einfache Kurvengetriebe S. 38—40; **Hain, K.:** Einfache Bandgetriebe S. 40—42; **Schnarbach, K.:** Zahnradgetriebe mit ungleichförmig umlaufendem Abtrieb S. 43—51; **Volmer, J.:** Räderkurbelgetriebe S. 52—55; Schrifttum S. 55—56.

Das vorliegende Heft ist vorwiegend den periodischen Getrieben mit umlaufenden Abtrieb gewidmet: Gelenkgetriebe: Kiper gibt eine zweckmäßige Definition des Ungleichförmigkeitsgrades an umlaufenden Getrieben, Rößner bringt — unabhängig von Freudenstein und Meyer zur Capellen — einen neuen Beweis für das Extremum des Übersetzungsverhältnisses, Hain beschreibt kurz das sechsgliedrige Zweistandgetriebe, während die Doppelkurbel teils synthetisch teils analytisch durch Rosenauer, Kiper, Hain und Hagedorn untersucht und ausgewertet wird, während Hain kurze Betrachtungen zur umlaufenden geschränkten Kurbelschleife bringt. — Rädertriebe: Schnarbach behandelt elliptische Zahnräder, exzentrische Stirnradgetriebe in Paarung mit Stirnrad oder „Unrundrad“, während Volmer auf die Kopplung zwischen Gelenk- und Rädertrieben eingeht. — Kurventriebe: Die Studie von Kiper betrachtet wesentlich die Übertragungsgüte von Kurventrieben. — Schaltgetriebe oder Getriebe mit aussetzender Bewegung werden von Beyer aus räumlichen, insbesondere sphärischen Kurbeltrieben entwickelt unter Angabe der Formeln für die Bewegungsverhältnisse. — Bandgetriebe sind in dem Beitrag von Hain berücksichtigt, wobei Konstruktion, Wirkungsweise und die Anwendung auf ein Getriebe mit zwei Bahnkurven gezeigt wird. Eine Zusammenstellung der Ungleichförmigkeiten in Getrieben insbesondere auch der

Extrema von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen für einfache Fälle gibt Freudenstein. Ein ausführliches Schrifttumsverzeichnis, das leider wichtige Arbeiten nicht berücksichtigt, schließt das Heft ab. *W. Meyer zur Capellen.*

Elastizität. Plastizität:

Smith, G. F. and R. S. Rivlin: Stress-deformation relations for anisotropic solids. *Arch. rat. Mech. Analysis* **1**, 107—112 (1957).

Without assuming a strain-energy function the relations between the components of the stress-tensor and the displacement gradients assumed as polynomial functions of the latter are directly established for an elastic anisotropic medium subject to finite strains under the conditions of invariance under rigid-body rotation. The restrictions imposed on these relations by the particular crystal symmetry is investigated for the monoclinic and rhombic systems. *A. M. Freudenthal.*

Graiff, Franca: Sul significato della funzione e del tensore di congruenza. *Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur.* **91**, 707—713 (1957).

In due recenti note (questo Zbl. **71**, 186) L. Finzi ha dato espressive interpretazioni della funzione e del tensore di congruenza, il cui annullarsi implica, rispettivamente nel caso bidimensionale e tridimensionale, la congruenza del tensore linearizzato di deformazione. In questa nota, assegnato un generico tensore simmetrico, si cerca di renderlo congruente con l'aggiunta di un tensore isotropo, oppure di uno ad invariante lineare nullo. Si riesce così a dare nuove interpretazioni della funzione e del tensore di congruenza. *T. Manacorda.*

Thomas, T. Y.: The Lüder's band problem. *J. Math. Mech.* **7**, 17—27 (1958).

A rather elaborate study of the formation of Lüder's bands under uni-axial tension is presented using the von Mises and the Prandtl-Reuss relations, including the effect of rotation. The results show that the inclination of these lines, established by Nadai long ago, is independent of stress-strain relations selected, a fact which is quite obvious from physical considerations. *A. M. Freudenthal.*

Chatterjee, P. N.: A numerical method for determination of critical buckling loads of two-hinged elastic arches. *J. Technol.* **2**, 145—159 (1957).

Chattarji, P. P.: Elastic distortion of a cylindrical hole by tangential tractions varying with depth on the inner boundary. *J. Technol.* **2**, 141—144 (1957).

Amenzade, Ju. A. (Yu. A.): The bending of a prismatic rod weakened by a circular cavity. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **114**, 37—40 (1957) [Russisch].

L'A. étudie la flexion de la poutre droite de section rectangulaire, pourvue d'un trou circulaire longitudinale. On utilise la méthode des fonctions de variables complexes. Un exemple numérique de calcul permet la comparaison avec les méthodes élémentaires de calcul. *P. P. Teodorescu.*

Aben, H.: The elastic stability and postbuckling behaviour of a long cylindrical panel under shear. *Izvestija Akad. Nauk Èstonsk. SSR, Ser. techn. fiz.-mat. Nauk* **7**, Nr. 1, 3—6, engl. Zusammenfassg. 6 (1958) [Russisch].

Jung, Hans: Über die Bestimmungen von Eigenspannungen in Scheiben. *Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg* **2**, 45—50 (1958).

Weinel, E.: Die Schubverzerrung in Schalen. *Z. angew. Math. Mech.* **37**, 289—291 (1957).

Die Schwierigkeit der klassischen Theorie der Schalen liegt in der sachgemäßen Formulierung der Randbedingungen. Insbesondere nimmt sie eine am Rande verschwindende Schubverzerrung an. Diese Annahme ist zwar nicht ganz berechtigt, doch nimmt die Schubspannung mit der Entfernung vom Rande sehr rasch ab. Die vervollständigten Platten- und Schalentheorien von Reißner, H. Hencky und M. Schäfer tragen diesem Sachverhalt Rechnung. Im Hinblick auf die bei technischen Schalenproblemen wenig genau Definiertheit der Randbedingungen hat H. Hencky die Schubspannung nur in recht summarischer Weise berücksichtigt.

Verf. überträgt diesen Gedankengang auf die Schalentheorie und leitet die Verschiebungsdifferentialgleichung her bei Berücksichtigung einer mittleren Schubverzerrung.
E. Hardtwig.

Karas, K.: Die Auswölbungen der Kreis- und Kreisringmembranen unter hydrostatischem Druck. I. Homogener Spannungszustand. Ingenieur-Arch. 25, 359—380 (1957).

Eine in vertikaler Ebene liegende Kreis- oder kreisringförmige Membran wird einem einseitigen hydrostatischen Druck ausgesetzt. Der Außenrand der Membran wird als fest, der Innenkreis als frei, elastisch oder fest gelagert angenommen. Vorausgesetzt, daß der Spannungszustand gleichförmig ist, wird die Auslenkung der Membran auf Grund der üblichen linearen Theorie ermittelt, indem die dem Drucke im Membranmittelpunkt entsprechende Teilauslenkung und die übrige einzeln betrachtet werden. Im Falle der Kreismembran ergibt sich, daß die Höhenlinien des Wölbhügels zirkuläre Kurven dritter Ordnung mit der vertikalen Symmetrieachse sind. Die Fälle der Kreismembran, der Kreisringmembran mit fester, beweglicher oder elastisch befestigter Innenkreisplatte werden einzeln und ausführlich untersucht und mit Zahlenbeispielen illustriert.
S. Drobot.

Remizova, N. I.: Determination of elastic displacements in cylindrical shells by the integral equation method. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1958, 263—265, russ. und engl. Zusammenfassg. 266 (1958) [Ukrainisch].

Levi, Franco e Luigi Goffi: Studio flessionale di volte sferiche su pilastri isolati. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 91, 455—483 (1957).

Ivachnin (Ivakhnin), I. I.: Stability of a conic shell of circular section under uniform compression along the generants. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1958, 267—271, russ. und engl. Zusammenfassg. 271 (1958) [Ukrainisch].

● **Lechnickij, S. G.:** Anisotrope Platten. [Anizotropnye plastinki.] Zweite, umgearbeitete und erweiterte Aufl. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1957. 464 S. R. 16,55 [Russisch].

Die vorliegende zweite, neu bearbeitete und ergänzte Auflage des im Jahre 1947 erschienenen Buches ist eine viel umfassende Monographie der linearen Elastizitätstheorie der anisotropen Platten, mit spezieller Berücksichtigung der folgenden drei Problemkreise: 1. Der verallgemeinerte ebene Spannungszustand, 2. Biegung, und 3. Stabilität der anisotropen Platten. Die wegen der Fülle des Materials knappe Darstellung bevorzugt die praktische Seite der Lösungen und verzichtet auf ausführlichere Herleitung der Formeln, wohl aber mit genauer Quellenangabe der Originalarbeiten, deren großer Teil dem Verf. gehört. Die Lösungen vieler praktischen Aufgaben werden dagegen bis zu numerischen und graphischen Ergebnissen geführt. Das Buch hat in etwa 460 Seiten 16 Kapitel. Nach den zwei ersten einführenden Kapiteln wird in dem neu bearbeiteten Kap. 3 die Biegung der geraden und gekrümmten anisotropen Balken besprochen. In den 4.—8. Kapiteln werden die Spannungszustände im unbegrenzten Halbraume, in runder und elliptischer Platte, und in verschiedenförmig gelöcherten Platten dargestellt, wobei das neue 8. Kapitel verschiedene angenäherte praktische Lösungsmethoden anführt. Die drei nächsten Kapitel handeln mit der Biegung, und die letzten, 12.—16. Kapitel geben zahlreiche Lösungen der Stabilitätsfragen der anisotropen Platten mit Berücksichtigung verschiedener Belastungen und Befestigungen. Das Buch scheint noch bis jetzt die einzige Monographie zu bleiben, in welcher viele in der Literatur zerstreute und manchmal schwer zugängliche Einzelergebnisse zusammengefaßt und ergänzt wurden.
S. Drobot.

Sonntag, G.: Die in Schichten gleicher Dicke reibungsfrei geschichtete Halbebene mit periodisch verteilter Randbelastung. Forsch. Gebiete Ingenieurwes. 23, 3—8 (1957).

Stadelmaier, Hans H.: Spannungsfeld der auf den Rand einer elastisch anisotropen Halbebene wirkenden Tangentialkraft. *Z. angew. Math. Phys.* 8, 285—290 (1957).

Verf. betrachtet eine anisotrope Halbebene mit geradzahlig Symmetrie der x - oder y -Achse. Die Differentialgleichung der Spannungsfunktion ist $\zeta^2 q \zeta y^4 + 2a \zeta^2 q \zeta x^2 \zeta y^2 + b \zeta^2 q \zeta x^4 = 0$, wobei $a = (\zeta'_{12} + \zeta'_{22}/2) \zeta'_{11}$, $b = \zeta'_{22} \zeta'_{11}$, und die ζ'_{ik} Voigt'sche Elastizitätskoeffizienten sind. Es wird die Spannungsfunktion für eine auf dem Rand der Halbebene wirkenden Tangentialkraft angegeben. Durch Zusammensetzung mit der Spannungsfunktion einer Normalkraft (Stadelmaier, dies. Zbl. 71, 397) wird die Lösung für eine Randlast beliebiger Richtung gewonnen.

Dan Gh. Ionescu.

Narodeckij (Narodetsky), N. S.: The solution of two-dimensional problems in the theory of elasticity by means of special functions. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 114, 729—732 (1957) [Russisch].

L'A. démontre comment on peut résoudre une large classe de problèmes élastiques planes pour un domaine doublement connexe (fini, infini ou demi-infini), bordé par des cercles et actionné par des charges extérieures sur celles-ci. On utilise deux suites de fonctions spéciales, liées entre elles, définies par certaines relations de récurrence. On étudie entièrement le cas du plan élastique infini avec deux trous circulaires à l'intérieur.

P. P. Teodorescu.

Narodeckij, M. Z.: Über ein Problem der ebenen Elastizitätstheorie, das in geschlossener Form gelöst werden kann. *Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR* 19, 263—266 (1957) [Russisch].

On présente une étude du plan élastique infini à deux trous circulaires, actionné par une charge extérieure sur la frontière à distance finie. Dans ce problème on ne connaît qu'une solution basée sur des méthodes approximatives. En utilisant la méthode des fonctions de variable complexe, l'A. trouve la solution sous forme finie du problème. On donne un exemple numérique de calcul.

P. P. Teodorescu.

Neou, Ching-Yuan: A direct method for determining Airy polynomial stress functions. *J. appl. Mech.* 24, 387—390 (1957).

The method expresses the stress function under the form of a infinite power series, $\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} x^m y^n$, where m and n stand for positive integers and C_{mn} are determined from the boundary conditions and from the equation of compatibility.

Dan Gh. Ionescu.

Niedenfuhr, F. W.: On choosing stress functions in rectangular coordinates. *J. aeronaut. Sci.* 24, 460—461 (1957).

Eine Methode wird angegeben zum Auffinden von Spannungsfunktionen von polynommaler Form. Solche Funktionen erweisen sich als besonders nützlich bei der Behandlung von Aufgaben an rechteckigen Balken, deren Last selbst durch ein Polynom dargestellt werden kann.

E. Hardtwig.

Chatterjee, B. B.: Stresses in an aeolotropic elliptical disc rotating about an axis of symmetry lying in its middle plane. *J. Technol.* 2, 137—139 (1957).

Ling, Chih-Bing: Stresses in a perforated strip. *J. appl. Mech.* 24, 365—375 (1957).

Ein unendlich langer Streifen weist an einer Stelle eine unsymmetrisch gelegene, kreisförmige Perforierung auf. An dem Streifen greifen, symmetrisch zur Lage der Perforierung, beliebige Spannungen an. Gesucht sind die Spannungen an beliebigen Stellen des Streifens. Zur Lösung der Aufgabe wird die Spannungsfunktion konstruiert, und zwar durch Beziehen von vier biharmonischen Reihen und einem „biharmonischen Integral“. Die vier Reihen werden mit periodischen, harmonischen Funktionen gebildet, die für den vorliegenden Zweck eigens definiert wurden. Für den Fall longitudinaler Spannung und transversaler Biegung werden numerische Beispiele gebracht.

E. Hardtwig.

Horvay, G. and K. L. Hanson: The sector problem. *J. appl. Mech.* **24**, 574—581 (1957).

L'A. présente une étude du secteur plan circulaire élastique, actionné par des tensions sur la frontière. On utilise quatre suites de fonctions d'efforts de la forme $f_k(r) h_k(\theta)$, $f_k(r) g_k(\theta)$, $F_k(\theta) H_k(r)$, $F_k(\theta) G_k(r)$. La technique conventionnelle de l'analyse de Fourier nous permet de prendre en considération les conditions aux limites. Les fonctions $f_k(r)$ et $F_k(\theta)$ constituent séparément des suites complètes de fonctions orthonormales. L'article est accompagné de tables numériques qui nous permettent d'utiliser les fonctions d'efforts. *P. P. Teodorescu.*

Rongved, L.: Dislocation over a bounded plane area in an infinite solid. *J. appl. Mech.* **24**, 252—254 (1957).

After mentioning briefly the method of P. F. Papkovitch (this Zbl. **5**, 226) for solving equations of elastic equilibrium in displacement components by introducing four harmonic functions, author discusses some properties of Green's formula, when the harmonic function is known in a plane area. Papkovitch functions for given arbitrary discontinuities in normal and tangential components of displacement over a given area in the plane $z = 0$ can be determined by quadratures. In the special case of a constant discontinuity in the displacement over a rectangular area, these functions can be obtained in closed form. *A. Kuhelj.*

Gusejn-Zade (Husein-Zade), M. I.: Impact at an infinite plate lying on elastic liquid semispace. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **113**, 523—526 (1957) [Russisch].

The author considers the effect of impact at an infinite plate lying on elastic liquid semispace which can be considered as a rigid elastic body with the 2nd Lamé's constant equal a zero. Using cylindrical coordinates and the displacement potential $\Phi(r, z, t)$, which satisfies the known wave equation with initial and boundary conditions, the system of two partial differential equations is solved by means of Petrashen's method including Laplace transforms. *D. Rašković.*

Verma, G. R.: Application of Dirac's delta-function in isolated force problems of semi-infinite elastic solid of problems of isotropic and nonisotropic materials. *Z. angew. Math. Mech.* **37**, 34—38 (1957).

Probleme, bei denen Einzelkräfte auf die Grenzfläche eines unendlichen isotropen oder anisotropen Halbraumes wirken, werden mit Hilfe der Diracschen δ -Funktion gelöst. (Vgl. auch dies. **66**, 185. Red.) *Zusammenfassg. des Autors.*

Jung, H.: Zur Theorie der Wärmespannungen. *Wiss. Z. Hochschule Schweremaschinenbau Magdeburg* **1**, 15—24 (1957).

L'A. construit une théorie de la thermoélasticité dans l'hypothèse que le nombre de Poisson est connu ($m = 2$), le module d'élasticité transversale dépend de la température $G = G(T)$ et le coefficient de dilatation linéaire dépend de la température et de la pression hydrostatique dans le corps $\alpha = \alpha(T, \sigma_0)$. On passe en revue les équations fondamentales de la chaleur et les équations thermoélastiques, en développant les fonctions mentionnées ci-dessus en série Taylor. Pour le problème plane et pour le problème à symétrie axiale on donne des résultats intéressants (de même un exemple de calcul pour un tube à pression intérieure). *P. P. Teodorescu.*

Goodier, J. N.: Thermal stress and deformation. *J. appl. Mech.* **24**, 467—474 (1957).

Entwickelt werden die Grundzüge der Thermo-Elastizität an Hand einiger wichtiger Beispiele. Insbesondere werden die Formeln für den Fall der dünnen, flachen Platte mit verschiedenen Temperaturverteilungen an der Oberfläche behandelt, die axialsymmetrische Temperaturschwingung einer kreisförmigen Platte, der Streifen, die dünnwandige Röhre sowie allgemein dünnwandige Schalen. Schließlich folgen dickwandige Röhren mit kreisförmigem Querschnitt, Zylinder und Prisma. Umfangreiches Literaturverzeichnis. *E. Hardtwig.*

Boley, B. A. and A. D. Barber: Dynamic response of beams and plates to rapid heating. *J. appl. Mech.* **24**, 413—416 (1957).

In der Theorie der Thermalspannungen werden diese sowie die Deformationen für eine vorgegebene Temperaturverteilung berechnet, die an sich zeitabhängig sein kann. In Lösungen dieser Art tritt die Temperatur als Parameter in Erscheinung, der Ablauf der Spannungen und Deformationen erscheint als eine Folge von stationären Zuständen. Die Trägheit spielt keine Rolle. Die Annahme, die Trägheit sei vernachlässigbar, darf bei schnellen Temperaturänderungen nicht mehr gemacht werden. Beispiele dafür: fliegende Projektile und wohl auch Flugzeuge. Verf. leitet die Grundzüge der Thermoelastizität ab mit Berücksichtigung der Trägheit. Eine entscheidende Rolle spielt dabei ein Parameter B , der neben der Eigenfrequenz des Körpers auch eine temperaturabhängige Zeitgröße enthält. Die Rolle der Trägheit wird als grundlegend wichtig erkannt, wenn es sich um rasche Wärmeimpulse oder um dünne Schalen handelt.

E. Hardtwig.

Boley, Bruno A.: The calculation of thermoelastic beam deflections by the principle of virtual work. *J. aeronaut. Sci.* **24**, 139—141 (1957).

Die Verbiegung eines Balkens wird üblicherweise aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen hergeleitet und führt auf eine bekannte und immer wieder angewandte Formel für diese Verbiegung. Da das Variationsprinzip unabhängig davon gelten muß, ob die auftretenden Spannungen von eingepägten Kräften herrühren oder ob sie Thermospannungen sind, wendet Verf. dieses Prinzip auch auf den letztgenannten Fall an und leitet eine Formel für solche Verbiegungen her, die auf Erwärmen des Balkens zurückgehen. Die Temperaturverteilung wird als beliebig angenommen. Die gewonnene Formel wird auf den rechteckigen Balken angewandt. Abschätzung der Genauigkeit der Formel.

E. Hardtwig.

Baehr, H. D.: Nichtstationäre Wärmespannungen in ausgemauerten Behältern und die Berechnung der Ausmauerung an Hand eines Temperatur-Schaubildes. *Ingenieur-Arch.* **25**, 330—349 (1957).

Es handelt sich um ein neues Berechnungsverfahren der von innen ausgemauerten zylinderförmigen stählernen Behälter, unter Berücksichtigung der auftretenden nichtstationären Wärmespannungen, mit Hilfe eines Temperaturschaubildes. Als Voraussetzung wird verlangt, daß die Ausmauerung sich nicht vom Eisenmantel ablösen darf, was wegen der Temperatur und des Wärmedehnzahlunterschiedes zwischen den beiden Stoffen möglich ist. Im Mauerwerk dürfen keine Zugspannungen auftreten und die Eisenmantelbeanspruchung darf nicht unzulässig hoch werden. Diese drei Forderungen führen zu einem bestimmten Verhältnis zwischen den Wandstärken des Mantels und des Mauerwerks. Die exakte Lösung dieser Aufgabe ist bedeutend erschwert, da sich das thermische und das Festigkeitsproblem gegenseitig beeinflussen, sowie auch durch die Abhängigkeit des Temperaturverlaufs von den nicht eindeutig definierten Stoffwerten des Mauerwerks. Um zu einer praktisch genügend genauen, aber einfachen Näherungslösung zu gelangen, vereinfacht der Verf. die allgemeinen Gleichungen für die auftretenden Spannungen und für den Temperatur- und Druckverlauf in Eisenmantel und Mauerwerk. Die Vereinfachung und die Umformung der allgemeinen Gleichungen ergibt für den Anpreßdruck p zwischen Mauerwerk und Mantel und für den im Mauerwerk wirkenden Axialdruck p_m lineare Gleichungen in Abhängigkeit von den Temperaturen im Mauerwerk und im Eisenmantel. Ähnliche Gleichungen sind auch für die im Mauerwerk und Eisenmantel auftretenden Spannungen σ abgeleitet. Die Abhängigkeit der Spannungen und des Druckes vom Verlauf der mittleren Mauerwerktemperatur t_m und der Eisenmanteltemperatur t_e ermöglichen den Aufbau eines (t_e, t_m) -Diagrammes, in welchem die nichtstationären Vorgänge im Mauerwerk verfolgt werden können. Die Eisenmanteltemperatur und die Mauerwerktemperatur bilden für den Anheiz- und für den Abkühlvorgang im (t_e, t_m) -Diagramm einen Kurvenzug. Der Verlauf der so erhaltenen Kurven hängt von den Bedingungen ab, unter denen Anheizen und Abkühlen erfolgen, also von den Stoffwerten, den Wärmeübergangsverhältnissen und

noch von der Mauerwerksdicke. Aus den linearen Gleichungen für der Anpreßdruck p und die Spannung σ entstehen durch Einsetzen der Anfangs- und Grenzbedingungen für die Festigkeitsforderungen wieder lineare Gleichungen, die im (t_e, t_m) -Diagramm als Geraden eingetragen sind und deren Verlauf in bezug auf den Anheiz- und Abkühlungstemperaturkurvenzug zeigt, wann für die Ablösung des Mauerwerks vom Eisenmantel Gefahr entsteht. Ferner zeigen die Geraden, wann im Mauerwerk Zugspannungen oder unzulässige Spannungen im Eisenmantel eintreten und wie die Wandstärken des Mauerwerks und des Eisenmantels sich zueinander verhalten sollen. Das Referat enthält 41 Gleichungen, 20 Abbildungen und ein Rechnungsbeispiel, durchgeführt für drei Fälle: 1. Nachprüfung eines in Betrieb befindlichen Zellstoffkochers, 2. Neuberechnung eines ausgemauerten Behälters und 3. werden die Stoffwerte des Mauerwerks verändert. *W. Iwanow.*

Molodožnikov, A. A.: Zur Frage der Bestimmung der Restspannungen beim Schweißen. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 12, Nr. 3, 31—38 (1957) [Russisch].

Koppe, E.: Zur nichtlinearen Torsion eines Kreiszylinders, Ingenieur-Arch. 25, 1—9 (1957).

Der Verf. hat sich folgende Aufgabe gestellt: Wenn ein als inkompressibel vorausgesetzter gerader Kreiszylinder der reinen Torsion unterworfen ist, also alle seine Querschnitte eben bleiben und wenn seine Streckung verhindert ist, so daß infolge der Inkompressibilität auch die radialen Abstände erhalten bleiben, diejenige Kräfteverteilung an den Endflächen des Zylinders zu finden, welche solche Verformung hervorruft. Zu diesem Zweck weist der Verf. auf eine Tensormethode, die den gestellten Forderungen und gemachten Voraussetzungen gut angepaßt ist. Er bildet einen Spannungstensor vom gemischten Typus $\tau_e^\beta = p \delta_e^\beta + \Phi h_e^\beta + \Psi h_\alpha^\beta h_e^\alpha$, wobei δ_e^β das Kronecker-Symbol, p einen Lagrangeschen Multiplikator, der durch die Randbedingungen bestimmt wird, und h_e^β den Henckyschen (logarithmischen) Tensor in folgender Gestalt $|h_e^\beta| = \frac{1}{2} \ln ||\hat{g}^{e\alpha} g_{\alpha\beta}||$ bezeichnen. Dabei sind $\hat{g}^{e\alpha}$ und $g_{\alpha\beta}$ die Maßtensoren vor und nach der Verformung des Zylinders, während Φ und Ψ folgende zwei Funktionen bezeichnen

$$\Phi = 2 \partial(\hat{\rho} w) / \partial h_\alpha^e h_e^\alpha, \quad \Psi = 3 \partial(\hat{\rho} w) / \partial h_\alpha^e h_\sigma^\alpha h_e^\sigma,$$

wenn $\hat{\rho}$ die Dichte vor der Verformung bedeutet und wenn w die spezifische Formänderungsenergie ist. Außerdem beschreibt der Verf. eine Versuchs- und Meßeinrichtung zur Untersuchung der erwähnten Torsion bei größeren Winkeln.

T. P. Angelitch.

Seth, B. R.: Finite bending of a plate into a spherical shell. Z. angew. Math. Mech. 37, 393—398 (1957).

Il lavoro riguarda la trasformazione di una piastra circolare elastica comprimibile in uno strato sferico. Non ostante la deformazione sia supposta finita, la relazione stress strain è assunta lineare, in accordo con precedenti ricerche dell'A. [ad es. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 234, 231—264 (1935)] che se pure possono dar luogo a qualche riserva dal punto di vista teorico (cfr. ad es. C. Truesdell, questo Zbl. 46, 173), possono anche dare in diversi casi risultati soddisfacenti. La trasformazione è ottenuta con l'applicazione di sole forze superficiali ai bordi della piastra, e si adatta bene a rappresentare la voluta deformazione per una membrana, solo approssimativamente per una piastra di spessore finito. Come applicazione viene esaminato a fondo il caso in cui il rapporto di Poisson ha il valore $1/3$.

T. Manacorda.

Giesekus, Hans Walter: Einige Bemerkungen zu M. Hanin und M. Reiner: „On isotropic tensor-functions and the measure of deformation“. Z. angew. Math. Phys. 8, 303—306 (1957).

In Nr. 5 ihrer Arbeit zeigen Hanin-Reiner [Z. angew. Math. Phys. 7, 377—393 (1956)], in welcher Weise sich das Hencky-Maß für die elastische Verrückung tensoriell ausdrücken läßt durch das Maß von Hamel-Almasi. Hier wird nun auf eine wesentliche Vereinfachung in der Ableitung dieser Beziehung hingewiesen. Weiter wird hier (in Ergänzung und teilweise auch Korrektur der Hanin-Reinerschen Darlegungen) an Hand eines Beispiels gezeigt, daß der Tensor der Deformationsgeschwindigkeit ein strenges und zugleich das einzige Maß darstellt für die Geschwindigkeit der Deformation. Der exemplifizierte Sachverhalt soll in aller Allgemeinheit gelten.

E. Hardtwig,

● Beljaev, N. M.: Arbeiten zur Theorie der Elastizität und Plastizität. [Trudy po Teorii uprugosti i plastičnosti.] Mit einem Abriß von Leben und Werk N. M. Beljaevs. (Bibliothek der Russischen Wissenschaften: Mathematik, Mechanik, Physik, Astronomie.) Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1957. 632 S. R. 16,75 [Russisch].

The book is devoted to the souvenir of N. M. Belajev (1890—1944) and begins with a portrait of that outstanding Russian savant in field of theoretical and practical theory of elasticity and plasticity. The purpose of this book is to publish some (16) of many author's papers printed in various reviews. Some of these papers are: The application of Hertz's theory on the local stresses in the case of contact between a wheel and railway (p. 9—31); The local stresses in the case of pressure of elastic bodies (three parts with four chapters, p. 31—141); The stability of prismatic bar under the action of permanent axial forces (named „Belajev's problem“); On the election of the formula for the coefficient which diminishes the permitted stresses in railway constructions; The theory of plastic deformations („Plastic deformations, principles and theories“, Brooklyn, 1948); The stresses and deformations in thin cylinders; Baukontrolle des Betons (Wien, 1929); etc. The group of Russian savants gives the description of Belajev's life activity (the first part deals with technical, pedagogical and scientific activities, but in the second part one gives critical reviews about the author's investigations). The theoretical investigations of that savant are of great interest in the fundamental problems of elasticity and plasticity, but his experimental labors are very useful in the technology of beton. On the end of the book is the list of all papers (53 papers). Belajev is the writer of known Russian books: The strength of materials (Soprotivlenie materialov), ten editions, and The collection of the problems on the strength of materials (four editions).

D. Rašković.

Shaffer, Bernard W. and Raymond N. House jr.: The significance of zero shear stress in the pure bending of a wide curved bar. J. aeronaut. Sci. 24, 307—308 (1957).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 66, 189) zeigten Verff., daß bei reiner Biegung eines gekrümmten Balkens in jedem Querschnitt die Schubspannung sowohl im elastischen als auch im plastischen Bereich verschwindet. Daraus folgt bei Zugrundelegung des Gesetzes von Prandtl-Reuss im plastischen Gebiet, daß durchweg die Schubverzerrung $\gamma_{r\theta}$ verschwindet. Unter der Annahme, daß das Material in jedem Zustand inkompressibel ist, ergeben sich unter der Voraussetzung $\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{r\theta} = 0$ aus den Beziehungen zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen für die Radialverschiebung u und die Tangentialverschiebung v in Abhängigkeit der Polarkoordinaten r, θ sowohl im elastischen als auch im plastischen Bereich die Formeln $u = \dots [A/r + B r] + K_1 \cos \theta$, $v = 2 B r \theta - K_1 \sin \theta$ mit konstanten A, B, K_1 . Die Diskussion der Formeln zeigt insbesondere, daß die Querschnitte nach der Deformation eben bleiben.

R. Moufang.

Shaffer, Bernard W. and Raymond N. House jr.: Displacements in a wide curved bar subjected to pure elastic-plastic bending. J. appl. Mech. 24, 447—452 (1957).

Die in der vorstehenden Arbeit abgeleiteten Formeln für u, v enthalten 3 Integrationskonstanten, die nun aus geeigneten Randbedingungen bestimmt werden. Durch passende Wahl der Richtung $\Theta = 0$ läßt sich zunächst K linear durch A und P eliminieren. Die Konstanten A, B werden alsdann eindeutig in Abhängigkeit des Biegemomentes M berechnet für den vollelastischen Zustand (I), den elastisch-plastischen Zustand (II), bei dem ein elastischer Kern $\varrho_i \leq r \leq \varrho_0$ von zwei plastischen Randzonen $a \leq r \leq \varrho_i$, $\varrho_0 \leq r \leq b$ eingeschlossen ist, und für den für $M = M_p$ erreichten vollplastischen Zustand (III) mit $\varrho_i = \varrho_0$. An der Grenze zwischen elastischem und plastischem Bereich gilt Stetigkeit der Radialspannung und die Misessche Fließbedingung. Die erhaltenen Beziehungen werden durch Diagramme für die Abmessungen $b/a = 1, 5, 2, 0, 2, 5$ und $3, 0$ erläutert: über M/M_p werden aufgetragen die relative Drehung $\Delta\Theta/\Theta$ eines Querschnitts, die relative Dickenänderung $\{u(b) - u(a)\}/(b - a)$ des Balkens an der Stelle $\Theta = 0$, die nach anfänglich linearem Anstieg bei $M = M_p$ verschwindet, und die relative Zunahme des inneren Radius $u(a)/a$. — Bis zum Wert $M/M_p = 0,95$ bleiben die Verzerrungen und Verschiebungen im Zustand II von der Größenordnung derjenigen des Zustandes I. Die relative Dickenänderung wird maximal für $M/M_p = 0,65$.

R. Moufang.

Hopkins, H. G.: On the plastic theory of plates. Proc. roy. Soc. London, Ser. A. 241, 153—179 (1957).

Eine ursprünglich ebene Platte der Dicke $2h$ werde in einem kartesischen Koordinatensystem x_i ($i = 1, 2, 3$) durch $-h \leq x_3 \leq h$; $\varphi(x_1, x_2) \geq 0$ beschrieben. Um eine allgemeine Theorie der ideal-starrplastischen (statischen oder dynamischen) Formänderung zu entwickeln, legt Verf. das Trescasche Fließkriterium $\max |\frac{1}{2}(\sigma_i - \sigma_j)| = k_F$ (σ_{ij} = Spannungstensor, σ_i = Hauptspannungen, k_F = Fließgrenze) als plastisches Potential zugrunde und nimmt an: (1) Zur Plattenmittelfläche senkrechte Werkstoffssäulen infinitesimalen Querschnitts gehen in ebensolche über; (2) $|\sigma_{3k}|, |\sigma_{33}| \ll |\sigma_{kl}|$ (im Mittel über die Plattendicke; $k, l = 1, 2$); (3) Die Einflüsse von Querschnittsträgheit und Schergeschwindigkeit sind vernachlässigbar klein. Es folgen drei Schritte: I. Umformung der Grundgleichungen des ideal-

starrplastischen Körpers auf die neuen Variablen $Q_k = \int_{-h}^h \sigma_{3k} dx_3$ (Querkräfte),

$M_{kl} = \int_{-h}^h \sigma_{kl} x_3 dx_3$ (Biegemomente), κ_{kl} = Änderungsgeschwindigkeit des Krümmungstensors der Mittelfläche $\approx v_{,kl}$ (v = Verschiebungsgeschwindigkeit der Plattenmittellebene in x_3 -Richtung; Indizes hinter Komma bezeichnen Differentiationen nach den entsprechenden Raumkoordinaten; $k, l = 1, 2$). M_{kl}, κ_{kl} sind koaxial. II. Transformation dieser Gleichungen auf Hauptkrümmungskordinaten der Plattenmittelfläche. III. Diskussion derselben, insbesondere im Hinblick auf evtl. Singularitäten ihrer Integrale. Sie wird durch die Singularitäten des Trescaschen Kriteriums erschwert und erfordert mühevollen Fallunterscheidungen. Bei dem Beweis von (4. 2) und (4. 3) (wie schon in einer früheren Arbeit: dies. Zbl. 67, 418) unterläuft Verf. folgender Trugschluß, der leider manches Ergebnis von III. fraglich erscheinen läßt: Ist $G(\xi, \eta)$ eine Funktion zweier Veränderlicher und gilt $\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} G(\xi, \eta_0) = 0$, so folgt $\lim_{\eta \rightarrow \eta_0} \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} G(\xi, \eta) = 0$ (?). — Die in I. und II. entwickelte Theorie wendet Verf. in vorliegendem Aufsatz nicht zur Lösung spezieller Probleme an.

H. Lippmann.

Parsons, D. H.: Plastic flow with axial symmetry: A note on the effect of different flow criteria. J. London math. Soc. 32, 233 (1957).

Für achsialsymmetrische Verformung eines starr-idealplastischen Werkstoffes, der durch die Lévy-Misesschen Gleichungen und das Misessche Fließkriterium be-

geschrieben wird, gewann Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 72, 415) folgende Ergebnisse: (1) Das Grundgleichungssystem ist singulär; (2) Es läßt sich durch Einführung neuer Variabler auf ein gewisses lineares System (S) transformieren, welches eine Gleichung und eine Unbekannte weniger enthält; (3) Das System (S) ist nicht-singulär und unter analytischen Anfangsbedingungen analytisch eindeutig integrierbar; (4) Für drei Beispiele konkreter Umformung sind die Randbedingungen mittels der neuen Veränderlichen formulierbar. — In vorliegender Note bemerkt Verf., (1), (2) und (3) bleiben auch für allgemeinere Fließkriterien $\sigma_\theta = f(\sigma_z, \sigma_r, \tau_{rz})$ gültig ($r, \theta, z =$ Zylinderkoordinaten).
H. Lippmann.

Weir, C. D.: The creep of thick tubes under internal pressure. J. appl. Mech. 24, 464—466 (1957).

Nella teoria dello snervamento di un cilindro cavo sotto l'azione di una pressione interna uniforme, tra le altre ipotesi si adotta usualmente quella che la velocità di deformazione in una direzione principale di tensione sia il prodotto del deviatore di tensione relativo alla direzione considerata per una funzione $f(J_2)$ dell'invariante quadratico del deviatore degli sforzi. In genere si assume che tale funzione si riduca ad una potenza di J_2 . L'A. riesce qui a calcolare la distribuzione degli sforzi, sia nel caso isoterma che in presenza di una propagazione stazionaria di calore prescindendo da quest'ultima ipotesi restrittiva non sempre sperimentalmente soddisfacente.

T. Manacorda.

Sattler, K.: Plastizitätsprobleme bei Stahlbeton- und Spannbeton-Konstruktionen. I.: Betrachtungen über die Durchbiegungen von Stahlbetonträgern. II.: Beitrag zur Berechnung von Spannbeton-Konstruktionen. Sympos. Plasticita Sci. Costruzioni in Onore di A. Danusso 262—313 (1957).

Shield, R. T.: The application of limit analysis to the determination of the strenght of butt joints. Quart. appl. Math. 15, 139—147 (1957).

A discontinuous stress field solution previously obtained by the author for the problem of plastic indentation by a flat punch is applied to the problem of the strength of a butt joint under the assumption that the thin layer of joining material (adhesive) can be considered to be incompressible and rigid-plastic. This stress-field which provides the lower bound is supplemented by a kinematically admissible velocity-field for the estimate of the upper bound. The results reproduce the principal experimental observation that for thin layers the strength of butt joints is inversely proportional to the thickness of the adhesive layer.

A. M. Freudenthal.

Ziegler, H.: Thermodynamik und rheologische Probleme. Ingenieur-Archiv 25, 58—70 (1957).

An attempt is made to establish the thermo-dynamical basis of stationary visco-elastic deformation by identifying the dissipation function with the rate of entropy-production and formulating the dissipation-potential with the help of the Onsager relations. It is unfortunate that Biot's papers on the same subject (this Zbl. 57, 191; 65, 420; 71, 412) have come to the author's attention only when the article was already in print, since Biot's treatment is more general and comprehensive.

A. M. Freudenthal.

Eršov, L. V. und D. D. Ivlev: Der elasto-plastische Zustand eines konischen Rohrs unter Einwirkung eines inneren Drucks. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 12, Nr. 2, 51—52 (1957) [Russisch].

Federhofer, Karl: Erzwungene Schwingungen eines Kreisringes. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. II 166, 1—13 (1957).

Die genaue Berechnung der Eigenschwingungen eines dünnen Kreisringes wird in des Verf. Schrift „Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes“ (Wien, 1950) gegeben. Im folgenden werden die erzwungenen Biegungsschwingungen eines Kreisringes untersucht, der entweder durch vier gleich große, paarweise gegensinnig pulsierende radiale Einzelkräfte $P = P_0 \sin \Omega t$ oder durch eine stetige über den Ring-

umfang verteilte pulsierende Kraft $q(\alpha, t) = q_0 \cos \alpha \sin \Omega t$ beansprucht wird. Bei Beschränkung auf Biegungsschwingungen ohne Dehnung mit der radialen (u) und der tangentialen Verschiebung (w), $u(q, t) = \sum a_i \cos i\varphi$, $w(q, t) = \sum a_i i^{-1} \sin i\varphi$, $i = 1, \dots, n$, wo a_i die Hauptkoordinaten sind, folgt aus der Lagrangeschen Gleichung die folgende Differentialgleichung: $\ddot{a}_i + \omega_i^2 a_i = Q_i C_i$, wo $C_i = g i^2 / \pi r F \gamma (1 + i^2)$; $Q_i = 4 P \cos i\alpha$, die entsprechende generalisierte Kraft bedeutet und ω_i ist die Eigenfrequenz einer beliebigen Schwingungsart a_i . Folgende drei Sonderfälle sind dargestellt: 1. $\alpha = 0$ (d. h. die Wirkungslinien der vier Kräfte fallen in den gleichen vertikalen Durchmesser) mit $u(0) = 0,14147 k$, $0,14713 k$, $0,14817 k$, $k = Pr^3/EJ$ oder $u(\pi/2) = -0,14147 k$, $-0,13581 k$, $-0,13685 k$ mit einem, zwei oder dreien Gliedern der Reihe $u(q) = k\pi^{-1} \sum_{2,4,\dots} (1-i^2)^{-2} \cos i\varphi$; 2. $\alpha = \pi/4$ und 3. $\alpha = \pi/6$. Mit Hilfe der Ergebnisse des vorhergehenden Abschnittes sind die durch doppelt symmetrische Belastung, mit $dP = q r dx$, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, erzwungenen Biegungsschwingungen $u(q, t)$ dargestellt.

D. Rašković.

Goldsmith, Werner: An elongating string under the action of a transverse force. J. appl. Mech. **24**, 609—616 (1957).

The motion of a uniform undamped flexible string whose length increases with time has been investigated when an arbitrary time-dependent force acts transversely at the free end. The method of characteristics has been employed to derive analytical expressions for the transverse displacement in the subsonic regime.

Aus der Zusammenfassg. des Autors.

Handelman, George and Yih-O Tu: On the antisymmetric vibrations of a beam carrying a distributed added mass. J. appl. Mech. **24**, 312—313 (1957).

In this brief note the authors consider a simply supported uniform beam carrying a distributed added mass under the assumption, that the system executes antisymmetric vibrations about a nodal-point. Because of awkward transcendental equation they use minimum principle to obtain the approximate solutions. The approximate formula for the eigenvalue is given and the approximate solutions are plotted. The comparison with the exact solution shows that the worst error in eigenvalue is less than 0,5 per cent. The asymptotic behaviour for very large eigenvalues is shown also.

D. Rašković.

Fung, Y. C., E. E. Sechler and A. Kaplan: On the vibration of thin cylindrical shells under internal pressure. J. aeronaut. Sci. **24**, 650—660 (1957).

The frequency spectra and vibration modes of thin-walled circular cylinders subjected to internal pressure are considered assuming the cylinders to be freely supported in such a manner that the ends remain circular, and that no restraint on the axial or tangential displacement is imposed at the ends. It is shown that for very thin cylinders the internal pressure has a significant effect on the natural vibration characteristics (for example, as aircraft fuselage or missile bodies) and that the mode associated with the lowest frequency is in general not the simplest one. At higher values of internal pressure the frequency spectrum tends to be arranged in the regular manner. In this case the frequency increases with the increasing number of circumferential nodes, and the lowest frequency rises slowly with the internal pressure. Theoretical results for a freely supported cylinder are plotted. Experimental results on the frequency spectra, vibration modes, and structural damping of a series of thinwalled cylinders subjected to internal pressure are briefly described. These results show agreement with the features predicted by Reissner's shallow-shell vibration theory. The experiments reveal the complicated nature of cylinder vibration and point to various difficulties in obtaining accurate data. These experiments were designed for the verification of the main effects of the internal pressure as related to aeronautical engineering applications.

D. Rašković.

Kazanceva (Kazantseva), G. E.: On oscillations in thin circular plates. Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR 1957, 242—245, russ. und engl. Zusammenfassg. 246 (1957) [Ukrainisch].

In der Arbeit wird die Lösung einiger Randwertaufgaben der Dynamik kreisförmiger Platten von konstanter und veränderlicher Dicke untersucht.

Übersetzung aus der russ. Zusammenfassg.

Naruoka, M. and H. Yonezawa: A study on the period of the free lateral vibration of the beam bridge by the theory of the orthotropic rectangular plate. *Ingenieur-Arch.* **26**, 20—29 (1958).

In this paper, the theory of the orthotropic rectangular plate is theoretically and experimentally applied to the analysis of the free lateral vibration of the right beam bridge, and the result of the analysis is compared with that by the conventional analysis. Thus, it was made obvious that the theory of the orthotropic rectangular plate is very effective for the analysis of the free lateral vibration of the beam bridge.

Aus der Einleitung.

Horvay, G.: Saint Venant's principle: A biharmonic eigenvalue problem. *J. appl. Mech.* **24**, 381—386 (1957).

A rigorous formulation of Saint-Venant's principle is given for the truncated wedge $x \geq 0$, $|y| \leq y_0$, ($y_0 = 1 + x \operatorname{tg} \omega$) which is stress-free along the lateral edges, and is loaded by self-equilibrating shear and normal tractions along the edge $x = 0$.

Dan Gh. Ionescu.

Soška, František: Electrical equivalent circuit of damped shear vibrations of piezoelectric bars. *Czechosl. J. Phys.* **8**(82), 17—30, engl. Zusammenfassung 31 (1958) [Russisch].

Der Verf. untersucht die Schubschwingungen eines prismatischen piezoelektrischen Stabes mit rechteckiger Grundfläche im elektrostatischen Wechselfelde. Das Feld wird erzeugt durch Paare rechteckiger Elektroden, die den größten Seitenflächen des Stabes in geringem Abstände gegenüberstehen. Es werden vier verschiedene Formen der Anregung betrachtet, wobei entweder nur ein Elektrodenpaar vorhanden ist, oder zwei durch einen Längs- bzw. Querspalt getrennte, oder endlich vier Elektrodenpaare. Folgendes wird vorausgesetzt: 1. Das elektrische Feld ist homogen. 2. Die Verrückungen der Stabelemente finden nur in der Richtung des Feldes statt. 3. Das Hookesche Gesetz ist gültig. 4. Die inneren und äußeren Dämpfungskräfte sind den Geschwindigkeiten proportional. Nun wird die partielle Differentialgleichung der Bewegung aufgestellt. Unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen an den freien Enden des Stabes ergeben sich die stationären Schubschwingungen im zeitlich sinusförmig veränderlichen Wechselfelde als Summe von Eigenfunktionen, multipliziert mit dem gemeinsamen Faktor $e^{i\omega t}$. Aus diesem Ergebnis wird das elektrische Ersatzschaltbild hergeleitet. Es besteht aus einer Anzahl parallel geschalteter Zweige, von denen einer nur die statische Kapazität enthält. Jeder der übrigen Zweige besteht aus einer Reihenschaltung von Widerstand, Induktivität und Kapazität und entspricht einer gedämpften Eigenschwingung des Stabes. Erregt man den Stab in einer seiner Eigenfrequenzen, so reduziert sich das Ersatzschaltbild auf die Parallelschaltung aus dem dieser Frequenz entsprechenden Zweige und der statischen Kapazität; die Leitwerte aller übrigen Zweige können dagegen vernachlässigt werden. Für die vier betrachteten Anregungsformen werden die Ergebnisse zusammengestellt. Zum Schluß wird betont, daß die hier gemachten Voraussetzungen nur für einen dünnen Stab gelten, aber z. B. nicht für eine dünne Platte, weil bei dieser die Verrückungen senkrecht zur Feldrichtung nicht vernachlässigt werden dürfen. Der Verf. weist auf die Aufgabe hin, auch solche und andere kompliziertere Schwingungsvorgänge in ähnlicher Weise zu behandeln.

G. Günther.

Fehrle, L.: Kritische Drehzahlen gewisser Rotorformen unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung. II. *Ingenieur-Arch.* **25**, 319—329 (1957).

Die in dies. Zbl. **71**, 400 besprochene 1. Arbeit wird durch ein ausführliches Zahlenbeispiel ergänzt, das die früheren allgemeinen Ergebnisse bestätigt. Insbesondere weisen die Näherungen nach dem Grammel-Verfahren wesentlich höhere Genauigkeit auf als die Ritz-Näherungen. — Zur Berechnung der zweiten Eigenfrequenz wird ein eingliedriger Ansatz benutzt, der die noch unbekannte Knotenlage als freien Parameter enthält. Iterative Behandlung dieses Ansatzes führt zu sehr gutem Näherungswert.

R. Zurmühl.

Kane, T. R.: Reflection of dilatational waves at the edge of a plate. *J. appl. Mech.* 24, 219—227 (1957).

A two-dimensional theory developed in previous paper (this *Zbl.* 70, 193) is now used to study the reflection of a straight-crested dilatational wave at the edge of a semi-infinite plate. Considering a plate bounded by planes $z = \pm h$ the components of displacement in a plate are assumed to be given by the relations $u_x = v_x$, $u_y = v_y$, $u_z = z h^{-1} v_z$. The components v_x , v_y , v_z are the functions of x , y , t and are expressed in terms of three independent displacement potentials $\varphi_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$, governed by equations of motion $(V_1^2 + \delta_i^2) \varphi_i = 0$; $V_1^2 = \partial/\partial_{xx} + \partial/\partial_{yy}$; here $\delta_i = \gamma^{1/2}$ play the role of wave numbers. If any of the potentials φ_i is taken proportional to $\exp(j\gamma x)$, $j = (-1)^{1/2}$, there results a straight-crested wave, propagated in the x -direction and having a wave length equal to $2\pi/\gamma$ with the velocity $c = \omega/\gamma$. The relationships c/c_2 , where c_2 is the shear wave velocity, are plotted. A slow wave propagated toward the edge of the semi-infinite plate is obtained, when the potentials are $\varphi_1 = C \exp(j\gamma u)$, $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$, where u is the function of the angle of incidence. Three emergent waves are postulated: slow, fast, and shear wave. The boundary conditions impose restrictions on the amplitude ratios, whose are embodied in a system of three nonhomogeneous linear algebraic equations. Neumann's uniqueness theorem guarantees the unique solution of the problem. It is shown that a slow incident wave produces, in general, three reflected waves (two dilatational waves, a slow and a fast ones and a shear wave). The character of these waves depends on the angle of incidence. Special cases are examined; normal and oblique incidences are investigated in detail. Last section is devoted to a development of the theory of generalized plane stress and to the solution of the reflection problem in terms of this theory.

D. Rašković.

Baillard, Guy: Sur les sauts de pression exercée sur un écran par des ondes longitudinales dans un milieu élastique. *C. r. Acad. Sci., Paris* 245, 505—507 (1957).

La présente note concerne une observation mathématique sur l'équation des cordes vibrantes qui, généralisée dans l'espace à trois dimensions, conduit à la remarque suivante: les ondes longitudinales d'un milieu élastique, exercent sur un écran immobile, une pression dont les sauts se conservent au cours du temps, sans amortissement.

Zusammenfassg. des Verfassers.

Adachi, Ryuzo: A problem on the seismic prospecting. *Kumamoto J. Sci., Ser. A* 2, 363—377 (1956).

Adachi, Ryuzo: A method of exploration on the seismic prospecting. *Kumamoto J. Sci., Ser. A* 3, 1—19; 20—24 (1957).

Adachi, Ryuzo: Fundamental relations on the seismic prospecting and a method of exploration. *Kumamoto J. Sci., Ser. A* 3, 25—31 (1957).

Fortführung einer früheren Arbeit [ibid. 2, 253—258 (1955)] zur Berechnung der Laufzeit seismischer Wellen im zweischichtigen Medium. Zweidimensionale Behandlung des Problems, aber die Schichtgrenzen brauchen nicht eben zu sein. Die Lösung erfolgt in mehreren Stufen für schwache parabolische, schwache beliebige und völlig beliebige Krümmung der Schichtgrenze. Formeln für die Anwendung bei Refraktions- und Reflexionsverfahren werden angegeben.

W. Kertz.

Chopra, S. D.: The range of existence of Stoneley waves in an internal stratum. I. Symmetric vibrations. *Mothly Not. roy. astron. Soc., geophys. Suppl.* 7, 256—270 (1957).

Die hier betrachteten Wellen (vom Stoneley-Typ) sind eine Abart der Rayleigh-Wellen in einer Zwischenschicht, die an beiden Seiten mit identischen Halbräumen verschweißt ist. Es werden nur symmetrische Wellen diskutiert, die von einer Punktquelle in der Mitte der Zwischenschicht aus erregt werden könnten. Für hohe Frequenzen gehen die Wellen in Stoneley-Wellen an der Grenze zweier Halbräume über. Es wird untersucht, welche Bedingungen für die Existenz von Stoneley-Wellen erfüllt sein müssen. Wenn Stoneley-Wellen existieren, so liegt ihre Phasengeschwin-

digkeit zwischen der der Transversalwelle und der Rayleighwelle des Mediums mit kleinerer Geschwindigkeit.

W. Kertz.

Stoneley, Robert and Urs Hochstrasser: The attenuation of Rayleigh waves with depth in a medium with two surface layers. *Monthly Not. roy. astron. Soc., geophys. Suppl.* 7, 279—288 (1957).

Fortführung einer früheren Untersuchung (dies. Zbl. 55, 456) über die Ausbreitung von Rayleighwellen in einem elastischen Halbraum mit zwei Bedeckungsschichten der Dicken T_1 und T_2 . Für die Fälle $T_1/T_2 = 1; 2$ und 3 wurden mit Hilfe der SEAC-Maschine des National Bureau of Standards in Washington die horizontalen und vertikalen Verrückungen als Funktion der Tiefe berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabellenform und zum Teil in graphischer Darstellung angegeben.

W. Kertz.

Jobert, Georges: Déformation plane d'un solide élastique isotrope et hétérogène. *C. r. Acad. Sci., Paris* 244, 555—558 (1957).

Unter Benutzung der Fourier- und Hankel-Transformationen wird die Ausbreitung einer ebenen Welle in einem isotropen, heterogenen Medium berechnet, bei dem die Righeit exponentiell mit der Tiefe zunimmt und die Poissonsche Konstante sich nicht ändert.

W. Kertz.

Sparenberg, J. A.: On a shrink-fit problem. *Appl. sci. Research, A* 7, 109—120 (1958).

Eine unendlich lange, elastische Röhre mit kreisförmigem Querschnitt ist „aufgeschumpft“ auf einen halb-unendlich langen, starren Kern von ebenfalls kreisförmigen Querschnitt. Vorausgesetzt wird lückenloser Kontakt zwischen den beiden Körpern. Gegenstand der Untersuchung könnten die in der Röhre auftretenden Spannungen und Verrückungen sein. Verf. beschränkt sich auf die Untersuchung der Spannung (des Druckes) entlang der Berührungsfläche beider Körper und stellt für diesen Druck eine Integralgleichung auf, für die er nach dem Verfahren von Wiener-Hopf eine Lösung angibt. Das den Berührungsdruck darstellende Integral wird durch ein Näherungsverfahren ausgewertet, so daß ein zahlenmäßiger Einblick in die Druckverteilung entlang der Berührungsfläche gewonnen wird.

E. Hardtwig.

Pacelli, Mauro: Contatto con attrito tra due corpi elastici di forma qualunque: Compressione e torsione. *Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser.* 10, 155—184 (1957).

In questo lavoro vengono esposti in tutta completezza il procedimento ed i calcoli necessari per arrivare ai risultati già sinteticamente esposti in una precedente nota [*Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser.* 21, 296—303 (1956)]. Una analogia formale, esistente fra i vari gradi di approssimazione nelle soluzioni date da Cattaneo per il problema del contatto elastico tra due sfere e tra due corpi di forma qualunque, suggerisce all'A. la forma della soluzione esatta del problema, nel caso più generale, in analogia alla soluzione esatta di Lubkin del contatto tra due sfere. La verifica della soluzione sulle equazioni integrodifferenziali che traducono analiticamente il problema, richiede un approfondito e delicato esame. Dopo di che la questione è risolta con un successo completo.

T. Manacorda.

Barnhart jr., K. E. and Werner Goldsmith: Stresses in beams during transverse impact. *J. appl. Mech.* 24, 440—446 (1957).

Transverse impact on elastic beams has been studied by numerous investigators (Timoshenko, Lee, Zaner, Feshbach, Hoppmann, Eringen, etc.), but the purpose of this paper is to present the theoretical relations necessary to describe the behaviour of elastically mounted beams subjected to the transverse impact of a sphere. The solution of the problem is carried out under the assumption of a one dimensional theory of transverse vibrations of the beam and neglects the effects of shear, rotatory inertia, lateral beam contraction, and internal damping. Under these restrictions the

problem is described by the known integral equation which was originally solved by Timoshenko. The special case that symmetrical elastic springs at the end support the beam is treated. The series solutions usually obtained from the Euler-Bernoulli beam equation for free vibrations imply the existence of an infinite number of bending modes. A method is devised to account for the effect of an infinite number of bending modes. The influence of various force-indentation relations on the calculated stress history is discussed and a numerical evaluation of the bending-stress time history at the center of the beam is compared with experimental data for the same impact parameters for the case of central impact, using a time increment of 2 microsec. An experimental and four theoretical stress-line curves are plotted. In an appendix the most general frequency equation for an elastic beam with linear end constraints is derived. The distribution of roots of the frequency equation for symmetrical elastic springs at ends for the first five flexural modes of the beam is plotted also.

D. Rašković.

Ringleb, F. O.: Motion and stress of an elastic cable due to impact. *J. appl. Mech.* **24**, 417—425 (1957).

Contrary to B. de Saint Venant's formula for the longitudinal impact stress of an elastic string or a bar the end of which suddenly moves with a constant velocity (derived in 1868) the author derived (in 1948) the approximate formula for the same transverse-impact problem. The purpose of the present paper is to publish and to discuss some of the more general results of the author's investigations, especially the formulas for the phase velocities of waves of constant stress and of waves of constant slope including the effect of initial tension and neglecting lateral contraction. The main result derived in this paper consists of a formula which determines the oblique impact stress for a given impact velocity and a given impact angle. The distribution of the input energy on the moving-cable parts in the general case of oblique impact is discussed. Assuming that σ/E and σ_0/E are negligibly small compared with 1 approximative formulas are given. It is shown that the Saint Venant's formula for longitudinal and the author's earlier formula for the perpendicular impact stress are special cases of the author's present formula. The theoretical results are compared with measured impact stresses for three different cable diameters.

D. Rašković.

Hunter, S. C.: Energy absorbed by elastic waves during impact. *J. Mech. phys. Solids.* **5**, 162—171 (1957).

Basing on earlier results by G. F. Miller and H. Pursey (this Zbl. **55**, 455; **67**, 176) for the normal displacement of the free surface of a semi-infinite elastic medium under the influence of a uniform periodic surface pressure acting over a circular area, author derives first an expression for the energy of elastic vibration produced by a transient pulse. The results can be simplified if the pressure pulse is containing significant Fourier components only for small frequencies. Under certain assumptions, Hertz's static theory of impact can be extended to the collision of a small body with the plane surface of a massive specimen. It can be concluded that for impact velocities small compared with the propagation velocity of elastic waves in the specimen, only a negligible proportion of the original kinetic energy of the small body is transferred to the specimen by collision. There still remain differences between the experimental values of the restitution coefficient and those obtained by the present theory for steel ball bearings and massive steel specimens, which can be possibly attributed to either anelastic or viscous forces in steel.

A. Kuhelj.

Berry, D. S.: A note on stress pulses in visco-elastic rods. *Philos. Mag.*, **VIII**, Ser. **3**, 100—102 (1958).

The relation is discussed between the general solution for the passage of a stress-pulse along a semi-infinite visco-elastic rod and the steady state solution, defining the visco-elastic response by a continuous spectrum of retardation-times. The

attenuation coefficient and phase velocity as functions of steady state frequency are evaluated and compared with results obtained by Kolsky.

A. M. Freudenthal.

Desoyer, K.: Zur rollenden Reibung zwischen Scheiben mit verschiedenen Elastizitätskonstanten. Österreich. Ingenieur-Arch. 11, 146—160 (1957).

Das Problem der Normaldruck- und Schubverteilung im Berührungsgebiet zwischen zwei stationär und elastisch rollenden Zylindern mit verschiedenen Elastizitätskonstanten wird unter der Annahme des Coulombschen Reibungsgesetzes auf ein System von zwei singulären Integralgleichungen zurückgeführt. In Grenzfällen des vollkommenen Gleitens und Haftens werden diese Gleichungen geschlossen gelöst, in dem allgemeinen Fall werden dieselben Gleichungen auf eine Prandtlsche singuläre Integralgleichung zurückgeführt. In dem Literaturverzeichnis werden die bekannten Bücher wie z. B. von I. Štaerman (Das Kontaktproblem der Elastizitätstheorie, dies. Zbl. 39, 405) oder von L. Galin (Die Berührungsaufgaben der Elastizitätstheorie, Moskau 1953) nicht erwähnt.

S. Drobot.

Hydrodynamik:

● Sedov, L. I.: Ähnlichkeits- und Dimensionsmethoden in der Mechanik. [Metody podobija i razmernosti v mechanike.] Vierte, umgearb. und erweit. Aufl. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1957. 376 S. R. 13,65 [Russisch].

Die vierte, erweiterte und umgearbeitete Auflage dieses schon bekannten Buches gibt in 5 Kapiteln eine inhaltsreiche Übersicht verschiedener Anwendungen der Dimensions- und Ähnlichkeitsmethoden auf die Hydro- und Gasmechanik. Ein großer Teil der Ergebnisse gehört dem Verf. und seinen Mitarbeitern. Die im Kap. I dargestellte „allgemeine Dimensionstheorie verschiedener Größen“ hat zwar nicht den Zweck die Grundlagen dieser Theorie in aller mathematischen und logischen Strenge und Allgemeinheit zu erörtern, sie ist aber vollkommen ausreichend, um die Hauptideen der Methode und deren praktische Anwendungen klar darzustellen. Das erweiterte Kap. II trägt dazu besonders bei, indem es verschiedene lehrreiche Beispiele der Dimensionsbetrachtungen und des damit eng verknüpften Begriffes der physikalischen Ähnlichkeit und der Modelle anführt, wobei die Rolle des Experimentes und anderer mathematischer Mittel deutlich hervorgeschoben wird. Dem Ref. scheint die Erklärung des Rayleigh-Riabouchinsky's Paradoxons im § 5 nicht überzeugend zu sein (vgl. die Arbeit des Ref., dies. Zbl. 52, 409). Der neu geschriebene § 14 verallgemeinert den Begriff der selbstähnlichen (automodellen) Flüssigkeitsbewegung, welcher die übrigen Kapitel völlig gewidmet sind. Das Kap. III enthält verschiedene Anwendungen der Dimensionsbetrachtungen auf die Hydromechanik der zähen Flüssigkeiten. Hier werden viele in Zeitschriften und Büchern zerstreute Fragen von einem einheitlichen Standpunkte aus betrachtet, wie z. B. Diffusion der Wirbel in zäher Flüssigkeit, einige exakte Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen für inkompressible Flüssigkeit, Lösungen der Prandtlschen Gleichungen der Grenzschichttheorie, und die klassisch gewordenen Anwendungen der Dimensionsbetrachtungen auf die Theorie der Turbulenz, wobei mehrere wichtige neue Beiträge zu finden sind. Das Kap. VI behandelt ausführlich verschiedene eindimensionale, nichtstationäre, selbstähnliche Bewegungen einer kompressiblen Flüssigkeit mit sphärischen, zylindrischen oder ebenen Wellen. Auf Grund der Dimensionsbetrachtungen werden hier (wie übrigens auch im Kap. III) die partiellen Differentialgleichungen der Gasdynamik auf gewöhnliche zurückgeführt, was die exakte Lösung und deren eingehende Diskussion ermöglicht. Zwar bildet hier (wie auch im Kap. III) die Dimensionsanalyse nur den Ausgangspunkt der nachstehenden mathematischen Untersuchung, in welcher schon andere allgemeinen mathematischen Mittel benutzt werden, doch wird gerade diese grundlegende Bedeutung der Dimensionsbetrachtung

tungen besser ans Licht gebracht. Das letzte Kap. V gibt interessante und wichtige Anwendungen auf die Astrophysik, wobei der § 6 neu bearbeitet wurde.

S. Drobot.

Nazarov, A. G.: Zur Theorie der Ähnlichkeit. Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady 25, 101—106 (1957) [Russisch].

Unklare Äußerungen über einige elementare Fragen der mechanischen Ähnlichkeit.

S. Drobot.

● **Alferjew, M. J.:** Hydromechanik. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1958. VI, 226 S. mit 152 Bildern. DM 11,30.

Diese Arbeit, als Lehrbuch für die Hochschulen des Wassertransportwesens bestimmt, ist eine Einführung in die Grundprobleme der Hydromechanik. Das Werk zeichnet sich durch eine besondere Klarheit und durch das Bestreben aus, die Grundbegriffe und -methoden ins hellste Licht zu stellen, sich auf einwandfreie mathematische Beweisführung zu stützen und stets bis an die technisch wichtigen Fragen vorzudringen. In der Einleitung werden die Hauptmethoden der Hydrodynamik aufgezählt, ihre geschichtliche Entwicklung skizziert und auf ihren Einfluß auf die Entwicklung des Schiffbaus hingedeutet. Der erste Teil, Hydrostatik, enthält das übliche klassische Material und besonders eine schön aufgebaute Theorie des schwimmenden Körpers. Der zweite Teil bringt unter dem Titel: Der Ausfluß aus Öffnungen und die Flüssigkeitsbewegung in Rohrleitungen, zunächst eine elementare Theorie des Ausflusses, gegründet auf die Bernoullische Gleichung. Sehr interessant ist der ausführliche Abschnitt über Ähnlichkeitstheorie, wo der Verf. es wieder nicht versäumt, die Verbindung mit schiffsbautechnischen Fragen aufrechtzuerhalten, indem er die Ermittlung des Widerstandes schwimmender Körper durch Modellversuche behandelt. In dem Abschnitt über Rohrleitungen werden laminare und turbulente Strömungen untersucht und es werden Anweisungen zur praktischen Berechnung von Rohrleitungen gegeben. Die elementare Behandlungsweise dieses zweiten Teiles ermöglicht kaum eine tiefere mathematische Ausarbeitung, hat aber den Vorzug, die physikalischen Erscheinungen hervorheben zu können und dadurch dem Lernenden ein von vornherein richtiges Bild aufzubauen. Der dritte Teil, Die Mechanik einer Flüssigkeitsbewegung, enthält die Grundbegriffe der Kinematik, der Potential- und Wirbelbewegung, der Dynamik idealer Flüssigkeiten (Eulersche Bewegungsgleichungen, Differentialgleichungen von Gromeko für die Wirbelbewegung, Schukowskis Satz), sowie der Dynamik zäher Flüssigkeiten (Navier-Stokessche Bewegungsgleichungen, Kärsmänsche Integralbeziehung für die Grenzschicht, Bewegungswiderstand von Körpern in zähen Flüssigkeiten). Zum Schluß werden die Grundlagen der Wellentheorie besprochen, und zwar die Theorie unendlich kleiner Wellen nach Stretenski und Kotschin, sowie die Gerstnersche Theorie der Trochoidenwellen. Damit gestattet das Buch einen Ausblick auf die wichtigsten Gebiete der Hydromechanik. Die didaktischen Vorzüge des Werkes sind besonders hervorzuheben. Die Begriffe werden intuitiv und durch charakteristische Beispiele eingeführt, während die Beweisführung immer streng mathematisch bleibt; das klassische Material wird in seinen wichtigsten Teilen wiedergegeben, aber auch neuere Ergebnisse werden erwähnt. Im ganzen bildet dieses Buch eine vortreffliche Einführung in die Hydromechanik, die sowohl dem Lernenden als auch dem Lehrenden bestens empfohlen werden kann.

Dan Gh. Ionescu.

● **Prandtl, L. and O. G. Tietjens:** Fundamentals of hydro- und aeromechanics. Translated by L. Rosenhead. (Engineering Societies Monographs.) New York: Dover Publications, Inc. 1957. XVI, 270 p. \$ 1,85.

● **Prandtl, L. and O. G. Tietjens:** Applied hydro- und aeromechanics. Translated by J. P. Den Hartog. (Engineering Societies Monographs.) New York: Dover Publications, Inc. 1957. XVI, 311 p. \$ 1,85.

Es ist zu begrüßen, daß in der Reihe der preiswerten und gut ausgestatteten Dover-Editionen nunmehr auch die englische Ausgabe des bekannten Lehrbuches neu aufgelegt worden ist. Die deutsche Ausgabe, deren erste Auflage im Jahre 1929 erschien, ist seit langem vergriffen. Es erübrigt sich, auf die Vorzüge der Prandtlschen Darstellung in ihrer glücklichen Verbindung von physikalischer Anschauung und mathematischer Formulierung einzugehen. Bd. I enthält die Grundlagen der Strömungsmechanik und gliedert sich in die Teile: Statik und Kinematik der Flüssigkeiten und Gase sowie Dynamik der reibungsfreien Strömungen. Im Mittelpunkt stehen demgemäß die Theorie der Potentialströmungen und die Theorie der Wirbel. Bd. II ist den technischen Anwendungen gewidmet. Er enthält u. a. Strömungen in Rohren und Kanälen einschließlich der Einlaufvorgänge, die Grundlagen der Grenzschichttheorie und eine besonders instruktive Einführung in die Tragflügeltheorie bei inkompressibler Strömung. — Beide Bände können jedem Studierenden gelegentlich empfohlen werden.

W. Szablewski.

Kanwal, R. P.: Variation of flow quantities along streamlines and their principal normals and binormals in three-dimensional gas flows. *J. Math. Mech.* 6, 621—629 (1957).

Die Gradienten des Strömungszustandes werden mit den differentialgeometrischen Größen der Stromlinienkurven in Beziehung gebracht. Es zeigt sich, daß der Druck in Richtung der Binormalen konstant ist. Die Wirbelkomponenten können durch die Stromlinienkrümmung, den Geschwindigkeitsgradienten längs der Stromlinie und die Haupt- und Binormale ausgedrückt werden.

K. Oswatitsch.

Legendre, Robert: Sillage rotationnel d'une aile plane d'envergure infinie, normale au vent. *C. r. Acad. Sci., Paris* 244, 38—40 (1957).

Une méthode de recherche d'écoulements plans de fluides parfaits, comportant des remous à rotationnel constant, est illustrée dans un cas particulier. Voir ce Zbl. 71, 195.

Osler, Hansjörg: Erzwangene Schwingungen in rotierenden Flüssigkeiten. *Arch. rat. Mech. Analysis* 1, 81—96 (1957).

Der Arbeit liegt folgendes physikalische Problem zugrunde: In der Rotationsachse einer unendlich ausgedehnten, gleichförmig um die z -Achse rotierenden, inkompressiblen und reibungsfreien Flüssigkeit schwingt harmonisch eine Kreisplatte vom Radius r_0 auf und ab; die Ebene der Platte steht dabei stets senkrecht zur Rotationsachse; die Ruhelage der Platte ist die Ebene $z = 0$. In einer früheren Arbeit [Z. angew. Math. Mech. 24, 210—214 (1944)] zeigte H. Görtler, daß sich der Typus der beschreibenden Differentialgleichungen ändert beim Durchschreiten einer gewissen kritischen Frequenz der Schwingung. Der Verf. untersucht in der vorliegenden Arbeit die im hyperbolischen Fall auftretenden Charakteristiken, die, von den Unstetigkeitsstellen ausgehend, daß ganze Strömungsbild aufteilen.

Dan Gh. Ionescu.

• **Dolaptschiew, Bl.:** Bemerkungen über die Stabilitätsuntersuchungen der Wirbelstraßen. (Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematik. Heft 4.) Berlin: Akademie-Verlag 1957. 28 S.

Die vorliegende Darstellung, die als Vortrag im Institut für angewandte Mathematik der Humboldt-Universität und der Akademie der Wissenschaften-Berlin gehalten wurde, gibt einen kritischen Überblick über die historische Entwicklung der Stabilitätstheorie der Wirbelstraßen. Seit der ersten Behandlung durch v. Kármán (1911) sind eine große Anzahl von Einzelveröffentlichungen erschienen (es wurden über 40 Veröffentlichungen zitiert), die sich mit der Stabilität bei verschiedenen Wirbelanordnungen unter den Gesichtspunkten verschiedenartiger Stabilitäts-Kriterien und anderen Eigenschaften der Wirbelstraßen befassen. Das Problem ist jedoch auch heute noch nicht endgültig gelöst. Neben der ursprünglichen Behandlung der Wirbelstraße in inkompressibler, reibungsfreier Strömung sind später auch die Einflüsse der Flüssigkeitsreibung und der Kompressibilität untersucht worden.

J. Rotta.

Kiselev, A. A. und O. A. Ladyženskaja: Über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines instationären Problems für eine zähe inkompressible Flüssigkeit. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **21**, 655—680 (1957) [Russisch].

Le travail présente une démonstration complète et détaillée des résultats publiés dans deux notes précédentes (voir ce Zbl. **65**, 184; 7). *C. Woronetz.*

Krzywicki, A.: Sur un problème des forces et des moments exercés sur un obstacle par un fluide visqueux compressible. Studia math. **16**, 48—55 (1957).

In Fortsetzung früherer Arbeiten (dies. Zbl. **66**, 197; **70**, 201) wird nicht mehr allein die geradlinig gleichförmige Bewegung, sondern auch die Drehbewegung eines Körpers in zwei - und dreidimensionaler Strömung behandelt. *J. Pretsch.*

Foot, Joe R.: An asymptotic method for free convection past a vertical plate. Z. angew. Math. Phys. **9**, 654—67 (1958).

Zur Lösung der Differentialgleichungen von M. Finston (dies. Zbl. **71**, 402) der Konvektion an einer vertikalen Platte, deren Temperatur nach einem Potenzgesetz veränderlich ist, werden Reihen für Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung angesetzt, deren Koeffizienten Funktionen der Koordinate η senkrecht zur Plattenoberfläche sind. Für diese Funktionen ergibt sich ein rekursiv und exakt lösbares System von Differentialgleichungen; die Lösungen der ersten beiden Paare werden angegeben und liefern bei kleinen Werten des Entwicklungsparameters α eine Approximation der gesuchten Verteilungen. *G. Hämmerlin.*

Nieman, Frank and Karl Pohlhausen: Remarks on the paper by M. Finston: „Free convection past a vertical plate“. Z. angew. Math. Phys. **9**, 67—69 (1958).

Die Differentialgleichungen von M. Finston (dies. Zbl. **71**, 402) der Konvektionsströmung an einer vertikalen geheizten Platte (Plattentemperatur proportional einer Potenz der Entfernung von der Plattenunterkante), die bei fester Prandtl-Zahl Pr noch zwei Parameter enthalten, werden auf ein einparametriges Problem transformiert. Numerische Lösungen für verschiedene Parameterwerte ($Pr = 0,733$) werden graphisch und in einer Tabelle mitgeteilt. *G. Hämmerlin.*

Gustafson, W. A. and M. Z. v. Krzywoblocki: On multiplicity theorems and an exact solution in diabatic flow. I. II. Acta phys. Austr. **11**, 131—146 u. 294—320 (1957).

Die Theorie von Gasströmungen mit Wärmezufuhr (diabatische Strömungen) wird auf der Grundlage der Reibungsfreiheit und der Vernachlässigung der Wärmeleitung entwickelt und eine verallgemeinerte Bernoulli-Gleichung aufgestellt. Diese theoretischen Grundlagen werden dann dazu benutzt, die Vielfältigkeit von Strömungen zu untersuchen, die das gleiche Stromliniennetz und das gleiche Druckfeld besitzen. Eine entsprechende Theorie für isentropische Strömungen wurde bereits 1947 von Munk und Prim aufgestellt. Diese Konzeption der Lösungsvielfalt führt zu einem Substitutionsprinzip, welches aussagt, daß man aus einer gegebenen Strömung eine ganze Klasse von Strömungen mit dem gleichen Stromliniennetz und dem gleichen Druckfeld gewinnen kann, wenn man die Dichte mit l^2 , die Geschwindigkeit mit l^{-1} und die Temperatur sowie die Energieverteilung mit l^{-2} multipliziert, wobei $l^2(\psi)$ ein längs einer Stromlinie konstanter Parameter ist. Dieses Substitutionsprinzip schließt das Vorhandensein von Stößen nicht aus. Das Prinzip kann nun verallgemeinert werden auf Strömungen mit ähnlichem Stromliniennetz bei gleichem Druckfeld oder sogar auf Strömungen mit ähnlichem Stromliniennetz und ähnlichem Druckfeld. Im erstgenannten Fall ist zusätzlich zu den bereits genannten Substitutionen der örtliche Krümmungsradius einer Stromlinie mit l^{-2} zu multiplizieren, im zweiten Fall muß außerdem noch das Druckfeld mit diesem Faktor multipliziert werden. Die Stoßfrontbeziehungen sind auch für diese beiden Erweiterungen invariant, wobei allerdings für diabatische Vorgänge Druck und Dichte vor und hinter dem Stoß durch eine verallgemeinerte Rankine-Hugoniot-Formel verknüpft werden. Im zweiten Teil der Arbeit wird eine einparametrigte Familie exakter Lösungen dia-

batischer Strömungen entwickelt und der Einfluß der äußeren Energieverteilung auf das Stromliniennetz wird an verschiedenen Lösungsbeispielen diskutiert. Es wird gezeigt, daß diese Lösungen auch durch Betrachtung der kanonischen Impuls- und Kontinuitätsgleichungen gewonnen werden können.

W. Wuest.

● **Liepmann, H. W. and A. Roshko:** *Elements of gasdynamics.* (Galcit Aero-nautical Series.) New York: John Wiley & Sons, Inc.; London: Chapman & Hall, Ltd. 1957. XVI, 439 p. \$ 11,—.

Dieses Buch über Gasdynamik stellt eine völlige Neufassung des bekannten Werkes von Liepmann und Puckett (s. dies. Zbl. 29, 174) über kompressible Strömungen aus dem Jahre 1947 dar. Später soll dem vorliegenden Band ein weiterer folgen, der besonders auf die Anwendungen gerichtet ist und den in der Praxis stehenden Ingenieur ansprechen wird. Der bisher erschienene Teil behandelt vorwiegend die Grundlagen der Gasdynamik und enthält zur Belebung und Erläuterung der Theorie zahlreiche Übungsaufgaben. Der Inhalt wird wie folgt aufgeteilt: 1. Thermodynamik. 2. Stationäre Stromfadentheorie. 3. Instationäre Stromfadentheorie (Wellen). 4. Wellen in Überschallströmung. Besonders werden diejenigen Fälle behandelt, die sich auf einfache Wellen zurückführen lassen, also: schiefer Stoß, Profilstromung, Kegelstromung. 5. Strömung in Düsen und Windkanälen. 6. Zahlreiche Meßmethoden. 7. Bewegungsgleichungen für die reibungsfreie Strömung. 8. Linearisierte Gleichungen der Überschallströmungen; ebene Profilstromung. 9. Linearisierte Behandlung vom Rotationskörper und Körper kleiner Spannweite. 10. Ähnlichkeitsgesetze für Unterschall-, Überschall- und Hyperschallströmungen. 11. Schallnahe Ähnlichkeit, insbesondere erläutert am Keil. 12. Stationäre Charakteristikverfahren für ebene und achsensymmetrische Strömungen. 13. Strömungen mit Reibung und Wärmeleitung. 14. Kinetische Gastheorie. Übungsaufgaben sowie einige Tabellen und Diagramme am Ende des Buches. Hervorzuheben ist, daß der Leser hier viele Dinge findet, die er in anderen Büchern über Gasdynamik bisweilen vergeblich sucht. Etwa eine breite Einführung in die Thermodynamik (1), eine ausführliche Schilderung der Meßmethoden (6), eine Behandlung der Strömung mit Reibung und Wärmeleitung (13), sowie eine Darstellung der kinetischen Gastheorie (14). Zahlreiche vortreffliche Aufnahmen, die außerordentlich instruktiv sind, beleben den Text. Vieles stammt hier aus den eigenen wissenschaftlichen Arbeiten der Verff. Die Ausstattung des Buches ist hervorragend. Das Buch ist für jeden unentbehrlich, der sich mit Gasdynamik beschäftigt.

J. Zierep.

Frankl', F. I.: *Isentropic relativistic gas flows.* Soviet Phys., JETP 4, 401—403 (1957), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 31, 490—492 (1956).

Isentrope relativistische Gasströmungen werden analysiert. Der Verf. leitet eine relativistische Verallgemeinerung des Helmholtz-Thomson'schen Satzes über die zeitliche Konstanz der Zirkulation längs einer geschlossenen flüssigen Linie ab. Er zeigt dabei, daß an Stelle von Geschwindigkeit in der klassischen Hydrodynamik nicht etwa die Vierergeschwindigkeit u_i tritt, sondern die „Pseudogeschwindigkeit“ $v_i = (w/\rho) u_i$, wo w den relativistischen Wärmehalt auf die Einheit des Eigenvolumens bezogen und ρ die Restenergie, d. h. diejenige, die das Gas auf der Temperatur des absoluten Nullpunktes besitzt, bezeichnet. Außerdem ist eine nicht-lineare Verallgemeinerung der Gleichung für die Ausbreitung der Schallwellen gegeben.

T. P. Angelitch.

Todeschini, Bartolomeo: *Generalizzazione dell'equazione di Chaplygin.* Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 91, 413—423 (1957).

Die Gleichungen der stationären ebenen, isentropischen, aber nicht homentropischen (d. h. $S = \text{const}$ längs jeder Stromlinie, aber von Stromlinie zu Stromlinie variierend) und nicht isoenergetischen Strömung eines perfekten Gases werden in die Hodographenebene transformiert. Es ergibt sich einer Verallgemeinerung der Chaplygin-Gleichung für die Stromfunktion.

C. Heinz.

Finn, Robert and David Gilbarg: Three-dimensional subsonic flows, and asymptotic estimates for elliptic partial differential equations. *Acta math.* 98, 265—296 (1957).

Es werden für die Gleichung: $(\varrho \Phi_{,i})_{,i} = 0$, $\varrho = \varrho(\Phi_{,1}, \Phi_{,2}) > 0$, $(\Phi_{,i} = \partial \Phi / \partial x_i$, Summationsvorschrift) zunächst für $i = 1, 2, 3$ asymptotische Abschätzungen der $\Phi_{,i}$ für $x \rightarrow \infty$ angegeben. Diese werden dann zum Beweis der Einzigkeit der Strömung um einen gegebenen Körper benutzt, wobei am Körper selbst stellenweise Überschallströmung auftreten darf, im Unendlichen jedoch die Machzahl $M < 1$ sein soll. Ferner wird das d'Alembertsche Paradoxon für solche Strömungen bewiesen. Auch die Existenz dieser Strömungen läßt sich beweisen vorausgesetzt, daß im ganzen Strömungsfeld $M < 0,53$ ist (für $\gamma = 1,5$). Die asymptotischen Abschätzungen lassen sich auf den Fall $i = 1, \dots, n$ verallgemeinern. Hier werden auch Verallgemeinerungen der bekannten Maximumsätze gegeben, die vor allem den Punkt Unendlich einschließen. Für $n = 3$ vgl. hierzu L. Bers, dies Zbl. 58, 406.

C. Heinz.

Payne, L. E. and H. F. Weinberger: Note on a lemma of Finn and Gilbarg. *Acta math.* 98, 297—299 (1957).

Verschärfung der im vorstehenden Referat gegebenen asymptotischen Abschätzungen der Lösungen der Gleichung $(a^{ik} \Phi_{,i})_{,k} = 0$ für den Fall, daß für $x \rightarrow \infty$ die Matrix (a^{ik}) gegen die Einheitsmatrix strebt.

C. Heinz.

Schubert, Hans und Erich Schincke: Zum Konturproblem der Hodographenmethode im Unterschall. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl.* 102, Nr. 2, 25 S. (1957).

Die in der Gasdynamik vielbenutzte Hodographentransformation hat die angenehme Eigenschaft, daß die Strömungsdifferentialgleichung im Hodographen linear wird. Eine Schwierigkeit entsteht dadurch, daß das Bild der umströmten Kontur dort von vornherein nicht bekannt ist. Man spricht hier von dem sogenannten „indirekten bzw. direkten Problem“. Im ersten Fall wird die Randkurve im Hodographen mit vorgegeben und dort die Randwertaufgabe gelöst; anschließend muß dann in der Strömungsebene die Kontur bestimmt werden. Im zweiten Fall wird die Randkurve im Hodographen bei der Lösung der Randwertaufgabe mitbestimmt. Von den Verff. wird das direkte Problem behandelt, und zwar für die zirkulationsfreie Unterschallströmung um ein doppeltsymmetrisches Profil S . Die gesuchte Stromfunktion ψ wird zerlegt in $\psi = \psi + \chi$. Hier ist ψ die Stromfunktion einer bekannten Strömung um ein Nachbarprofil \tilde{S} von S . $\tilde{\psi}$ läßt sich etwa mit der Methode des indirekten Problems bestimmen. Die eigentliche Schwierigkeit liegt in der Randwertaufgabe für χ . Nach einigen Transformationen ergibt sich in der $\tilde{\Omega}, \tilde{\theta}$ -Ebene für χ die lineare Differentialgleichung: $\Delta \chi + 2k^2 \tilde{\Omega} \chi = 0$ ($k = \text{konst}$), jedoch muß sowohl ein Regularitätsbereich dieser Differentialgleichung bestimmt als auch auf dessen Rand eine lineare und eine nichtlineare Randbedingung erfüllt werden. Die einfache Form der Differentialgleichung für χ ist eine Folge der von den Verff. benutzten quadratischen Approximation der Adiabaten. Dies bringt manche rechentechnische Vorteile mit sich, ist jedoch für die allgemeine Methode ohne grundsätzliche Bedeutung. Ein Näherungsverfahren für dieses Problem ist in Arbeit und die Ergebnisse dürfen mit Spannung erwartet werden.

J. Zierep.

Glauert, M. B.: The flow past a rapidly rotating circular cylinder. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A* 242, 108—115 (1957).

The paper considers the two-dimensional flow past a circular cylinder of diameter d , immersed into a uniform stream U_0 , when the cylinder rotates about its axis with the peripheral velocity q so fast that separation is suppressed. The velocity at the boundary layer edge is $U = Q + 2U_0 \cos(2x/d) = Q(1 + \alpha e^{i\theta})$, where Q is the circulatory component of fluid velocity, $\theta = 2x/d$ is the angular co-ordinate

round the cylinder and $\alpha = 2 U_0/Q$. The solution of the flow in the boundary layer on the cylinder is obtained in the form of a power series in the ratio of the stream velocity to the cylinder's peripheral velocity:

$$\frac{1}{Q} \psi = y + \alpha f_1(y) e^{i\theta} + \alpha^2 \{f_2(y) e^{2i\theta} + g_2(y)\} + \dots$$

Expressions are deduced for the value of the circulation and the torque of the cylinder. Sufficient terms of the series are calculated explicitly to give reliable numerical values over the whole range of rotational speeds for which the assumption of non-separating flow is justifiable. The previously accepted theory, stated by Prandtl, predicted that the circulation does not exceed a certain maximum value equal to $2\pi d U_0$, to be reached when q is nearly equal to $4 U_0$. Since the lift $L = \rho U_0 K$, where ρ is the fluid density, this implies a maximum lift coefficient $C_L = L/(\frac{1}{2} \rho U_0^2 d)$ equal to 4π . The present theory indicates that the circulation increases indefinitely with increase of rotational speed. It should be noted that lift coefficients in excess of 4π have not been observed in experiments. The author nevertheless asserts that the actual experimental results must be regarded as inconclusive, because three-dimensional effects arise even on a cylinder of large aspect ratio fitted with end disks. It is also possible that two-dimensional flow would be subjected to instability in the neighbourhood of the stagnation point in the fluid.

Dan Gh. Ionescu.

Pychteev (Pyhteev), G. N.: Kirchhoff's discontinuous bounded flow past a family of curves. Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 513—516 (1957) [Russisch].

Les équations des lignes de glissement dans le problème de Helmholtz-Kirchhoff ne peuvent pas être obtenues par des quadratures que dans quelques cas spéciaux des obstacles simples. Dans un travail précédent (voir ce Zbl. 70, 199) l'A. étend considérablement cette catégorie des problèmes en donnant la solution pour une famille des courbes $L(m, \mu)$, dépendantes de deux paramètres m et μ . Dans le présent travail la même méthode est appliquée au cas où l'obstacle se trouve dans un courant limité par des parois. Les courbes étudiées $L(m, \mu, \varepsilon)$ dépendent de trois paramètres dont un doit être considéré comme donné, la largeur $H(m, \mu, \varepsilon)$ de courant étant connue. L'A. trouve les fonctions résolvant le problème et pousse le calcul jusqu'au bout dans un exemple où $m = 1$. Le cas limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, correspond au problème d'un courant illimité, étudié précédemment.

C. Woronetz.

Spiegel, E. van: Über singuläre Lösungen des Tragflächenproblems. Z. angew. Math. Mech. 37, 311—312 (1957).

Campbell, George S.: A finite vortex method for slender wing-body combinations. J. aeronaut. Sci. 25, 60—62 (1958).

The base-plane geometry is frequently too complicated to permit the usual transformation of the body to a circle. However, such problems may be solved by using a reasonable number of two-dimensional vortices and satisfying boundary conditions at appropriate "control points" in the cross-flow plane. The method is demonstrated for a slender wing plus infinite body and compared with the more exact theory.

Aus der Einleitung.

Janssen, E.: Flow past a flat plate at low Reynolds numbers. J. Fluid Mechanics 3, 329—343 (1958).

Der Verf. betrachtet die Platten-Strömung für die Re-Zahlen 0, 1, 1,0 und 10,0. Die Lösung der Gleichungen für die Stromfunktion und Wirbelstärke werden über eine elektrische Widerstandsnetz-Analogie mit Hilfe eines Relaxationsverfahrens ermittelt. Daraus werden der lokale und der Gesamtwiderstandskoeffizient und die Druckverteilung bestimmt. Die Ergebnisse werden mit denen von Haager, Tomotika und Aoi und den Experimenten von Janour verglichen.

P. Čolak-Antić.

Gadd, G. E.: A theoretical investigation of laminar separation in supersonic flow. J. aeronaut. Sci. 24, 759—771, 784 (1957).

Betrachtet werden ebene Strömungen; besonders interessieren die Einflüsse der Wandkrümmung und Wandtemperatur bei verschiedener Machscher und Reynolds-

scher Zahl auf die Ablösung. Annahmen: Konstante Wandtemperatur, Prandtl-Zahl $\sigma = 1$, Zähigkeit proportional der absoluten Temperatur. Die Grenzschicht wird in einen inneren und einen äußeren Teil aufgespalten, wobei das Verhalten im ersteren allein durch die Zähigkeit bestimmt wird (Stratford); das Geschwindigkeitsprofil im äußeren Teil wird mit Hilfe von Annäherungen gewonnen, die die Zähigkeit nicht in Rechnung stellen. Die innere Lösung wird stetig und mit stetiger 1. und 2. Ableitung an diese angeschlossen. Jedoch ergibt sich später, daß die unter Annahme einer sehr dünnen inneren Schicht (sehr hohe Reynoldssche Zahlen) gewonnenen Ergebnisse, verglichen mit dem Experiment, einen größeren Geltungsbereich als erwartet haben. Resultate und Vergleiche mit experimentellen Ergebnissen finden sich in graphischen Darstellungen und Tabellen. So zeigt sich z. B., daß konvexe Krümmung der angeströmten Wand den Druckkoeffizienten bei der Ablösung erniedrigt, während sich hingegen der Einfluß von Heizen und Kühlen nicht zuverlässig ergibt.

G. Hämmerlin.

Coburn, N.: *Intrinsic form of the characteristic relations in the steady supersonic flow of a compressible fluid.* Quart. appl. Math. 15, 237—248 (1957).

Die Gleichungen der dreidimensionalen stationären Überschallströmung eines polytropen Gases ($p = \rho^\gamma \cdot f(S)$) werden invariant formuliert und daraus die Gleichung der charakteristischen Flächen in bekannter Weise hergeleitet. Eingehendere Diskussion solcher Strömungen, bei denen eine Schar von charakteristischen Flächen Ebenen sind (Beltrami-Strömungen).

C. Heinz.

Šmyglevskij (Shmyglewsky), Ju. D. (Yu. D.): *A variation problem in the gas dynamics of axially symmetrical supersonic flows.* Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 520—522 (1957) [Russisch].

Ziel der Arbeit ist es, die Form eines Rotationskörpers zu finden, der in einer Überschallströmung einen minimalen Wellenwiderstand besitzt, bzw. die Form einer Düse mit geringsten Verlusten. Es wird isentropische Strömung angenommen. Bei der Lösung der Aufgabe wird ein von Nikolskij entwickeltes Verfahren benutzt. Bei der Veröffentlichung des Verf. handelt es sich offensichtlich um einen kurzen Auszug aus einer umfangreicheren Arbeit.

G. Bock.

Fenain, Maurice et Denise Vallée: *Effet d'épaisseur, en régime supersonique, pour certaines ailes en flèche effilées. Traînée d'onde minimum.* C. r. Acad. Sci., Paris 246, 549—551 (1958).

Verallgemeinerung der Überlegung einer vorangehenden Arbeit (dies. Zbl. 77, 395), in welcher nur flache Flügel diskutiert wurden, auf gewisse Flügel mit nicht verschwindender Dicke.

C. Heinz.

Ehlers, F. Edward: *A simple graphical method for constructing two-dimensional supersonic flows by means of a drafting machine.* J. aeronaut. Sci. 23, 69—70 (1958).

A simplification of the Puckett field method of characteristics for supersonic two-dimensional flows is explained. By means of special tables given here, an engineer can construct the Mach net rapidly using a drafting machine without any intermediate calculations.

Zusammenfassg. des Autors.

Helliwell, J. B. and A. G. Mackie: *Two-dimensional subsonic and sonic flow past thin bodies.* J. Fluid Mechanics 3, 93—109 (1957).

Mittels der Tricomigleichung werden ebene, stationäre Strömungen um Körper mit Schallgeschwindigkeit an der scharfen Schulter behandelt, in dem das Randwertproblem für die Stromfunktion um Hodographen formuliert wird. Es zeigt sich dabei gute Übereinstimmung mit der komplizierteren Theorie von Guderley und Yoshihara. Abschließend werden noch Störlösungen zur Umströmung eines Keiles berechnet.

K. Oswatitsch.

Daskin, Walter and Lewis Feldman: *The characteristics of two-dimensional sails in hypersonic flow.* J. aeronaut. Sci. 25, 53—55 (1958).

The aerodynamic and geometric characteristics of two-dimensional sails in a hypersonic flow are investigated. These surfaces would have very large lift and drag per unit weight. Simple

closed expressions are derived for the sail shape and the corresponding lift, drag, and moment coefficients. Charts of these quantities are presented for the entire useful design range.

Aus der Zusammenfassung der Autoren.

Linnell, R. D.: Hypersonic flow around a sphere. *J. aeronaut. Sci.* **25**, 65—66 (1958).

This note presents an estimate of the stagnation-point surface-velocity gradient and the axial shock detachment distance for hypersonic flow around a sphere. Real gas effects are taken into account.

Aus der Zusammenfassg. des Autors.

Franke, Wolfgang: Der durch eine vertikale Verdünnungswelle in der Atmosphäre erzeugte Verdichtungsstoß. *Z. Flugwiss.* **5**, 292—302 (1957).

Zur Zeit $t = 0$ wird eine eindimensionale isentropische Atmosphäre mit $\gamma = 1,4$ angenommen, die bei konstanter Schwerkbeschleunigung g im Gleichgewicht ist und daher eine endliche Höhe x^* hat (hier ist $x^* = 28$ km). — Die Luftschicht in $x = 4$ km Höhe soll sich nun für $0 < t < 18$ sec mit einer Beschleunigung $\ddot{x} \approx -0,6g$, dann unbeschleunigt abwärts bewegen. Die oberhalb dieser Schicht resultierende Strömung wird durch schrittweise Charakteristiken-Integration in der x - t -Ebene ermittelt. Bei $x \approx 8$ km, $t \approx 63$ sec entsteht (wesentlich unter Schwerkrafteinfluß) eine aufwärts gerichtete, aber zunächst durch die Strömung abwärts getragene Stoßwelle.

F. Wecken.

Whitham, G. B.: A new approach to problems of shock dynamics. Part I: two dimensional problems. *J. Fluid Mechanics* **2**, 145—171 (1957).

Wenn eine Stoßfront über eine konvexe Ecke wandert, tritt eine Brechung der Stoßwelle ein. Ebenso wie bei der Untersuchung der Stabilität von Stoßwellen treten hier Störungen auf, die man als längs der Stoßfront wandernde Wellen auffassen kann. Es zeigt sich, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit solcher Wellen mit zunehmender Machzahl anwächst, so daß sich die Störungen ähnlich wie beim Verdichtungsstoß selbst aufteilen und zu einer Diskontinuität, also zu einer auf dem Stoß laufenden Stoßwelle führen können („Stoß-Stoß“). An dieser Stelle des Strömungsfeldes ist demnach eine Diskontinuität der Machzahl und des Stoßfrontwinkels vorhanden, für die Beziehungen aufgestellt werden. Die Theorie wird auf den Spezialfall des Vorübergangs einer Stoßwelle an einer konkaven oder konvexen Ecke angewandt. Bei der konkaven Ecke tritt dabei eine Kompression mit Mach-Reflexion (Gabelstoß) ein, bei der konvexen Ecke dagegen eine Brechung. Es wird angedeutet, wie diese Beziehungen zur numerischen Behandlung allgemeinerer Wandformen benutzt werden können. Im Gegensatz zur zylindrischen Stoßfront erweist sich die ebene Front als stabil, und es wird berechnet, in welcher Weise Störungen abklingen. Die Dämpfung wird dabei (im Gegensatz zu früheren Bearbeitungen dieses Problems, welche die Lighthillsche linearisierte Theorie benutzen) im wesentlichen durch die Nichtlinearität der Wellen hervorgerufen, indem die Energie einer Störung in einem „Stoß-Stoß“ verzehrt wird. Die Instabilität zylindrischer Stoßfronten wird mit Hilfe einer Hodographentransformation nachgewiesen.

W. Wuest.

Freeman, N. C.: On the stability of plane shock waves. *J. Fluid Mechanics* **2**, 397—411 (1957).

Eine quasistationäre Stoßwelle durchläuft in x -Richtung ein im wesentlichen prismatisches Rohr, dessen Querschnitt jedoch in einem endlichen x -Intervall stetig mit x variiert. Anknüpfend an Chester (dies. Zbl. **51**, 423) untersucht Verf. ohne Berücksichtigung der Reibung das Abklingen der Störung an der Stoßfront für $x \rightarrow \infty$. Ergebnisse (Abklingen mit $x^{-3/2}$; Einfluß der Stoßmachzahl M) und Methoden sind sehr ähnlich wie bei E.-A. Müller (dies. Zbl. **77**, 192) trotz etwas abweichender geometrischer Bedingungen. Auch eine früher vom Verf. (dies. Zbl. **64**, 206) untersuchte ganz andere Störung der Stoßfront zeigte dasselbe Verhalten. — Spezielle symmetrische Querschnittsverläufe ergeben für bestimmtes M in der betrachteten Näherung Auslöschung der Störung, vergleichbar dem widerstandsfreien Busemann-

schen Doppelprofil. — Ein Vergleich mit Experimenten befriedigt nur qualitativ, weil idealisierende Annahmen nicht erfüllt sind. *F. Wecken.*

Drummond, William E.: Explosive induced shock waves. I. Plane shock waves. J. appl. Phys. **28**, 1437—1441 (1957).

Eine bei $x = t = 0$ gezündete ebene Detonationswelle in festem Sprengstoff trifft bei $x = x_0$ auf eine Metalloberfläche. Schwaden und Metall werden durch Zustandsbeziehungen $p = A \rho^\gamma + B$ bzw. $p = \alpha \rho^\xi - p^*$ beschrieben; α, ξ, p^* sind bekannt. Die Detonationsfront wird als Unstetigkeit behandelt. Die entstehenden Stoßwellen in Metall und Schwaden untersucht Verf. in der von ihm schon früher (dies. Zbl. **77**, 191) benutzten isentropischen Näherung. Beim Vergleich mit Experimenten über die Intensitätsabnahme der Stoßwelle im Metall wird für die Dicke x_0 ein Effektivwert angenommen, weil die Zündung bei $x = t = 0$ technisch nicht realisiert ist. Dann ergibt sich befriedigende Übereinstimmung bei $\gamma = 11/9$; doch sind zur Ermittlung von A, B, γ weitere Messungen erforderlich. *F. Wecken.*

Jukes, J. D.: The structure of a shock wave in a fully ionized gas. J. Fluid Mechanics **3**, 275—285 (1957).

Nach einleitenden Bemerkungen über die zugrunde gelegten Plasmaeigenschaften werden die Energie-Transportgleichung, die Impulserhaltungsgleichung unter Vernachlässigung elektrostatischer Kräfte und die Kontinuitätsgleichung formuliert. Durch Eliminieren erhält man dann eine totale Energiegleichung, deren Lösungsmannigfaltigkeit qualitativ diskutiert wird. Für den Fall $M \gg 1$ (starker Stoß) und $M > 1$ (schwacher Stoß) wird das Profil der Stoßfront angegeben. Hierbei zeigt sich, daß etwa für $M = 10$ der Druck, die Protonentemperatur und die Dichte innerhalb einer Schicht von nur ein bis zwei freien Weglängen der Protonen von ihrem Wert hinter der Stoßfront übergehen zum Wert vor der Stoßfront, während die Elektronentemperatur diese Änderung in einer Schicht von etwa 10 freien Weglängen der Protonen ausführt. Für die Protonentemperatur, die hinter der Stoßfront unter, vor ihr aber über der Elektronentemperatur liegt, ergibt sich ferner ein schwaches Maximum. *G. Wallis.*

Bruniak, R.: Über die Ablösung der Grenzschicht beim Verdichtungsstoß. Österr. Ingenieur-Arch. **11**, 243—246 (1957).

Es handelt sich um eine Ergänzung der in dies. Zbl. **70**, 429 besprochenen Arbeit des gleichen Verff. Auch bei starken Beschleunigungsprofilen und mäßiger Überschallgeschwindigkeit ergibt sich Ablösung. Einen kritischen Einblick in das hier erstmalig mit Impulsverfahren angefaßte Problem dürfte aber erst nach weiteren theoretischen und experimentellen Studien möglich sein. *H. Oswatitsch.*

Sedney, R.: Laminar boundary layer on a spinning cone at small angles of attack in a supersonic flow. J. aeronaut. Sci. **24**, 430—436 (1957).

Es wird dasselbe Problem wie bei J. C. Martin (dies. Zbl. **78**, 176) behandelt für eine konische Überschallströmung um einen Kreiskegel bei der Prandtlzahl Eins, bei linearer Abhängigkeit der Zähigkeit von der Temperatur und bei laminarer Grenzschicht. Die Transformationen von Howarth und Mangler führen das Problem zurück auf die Berechnung einer laminaren Grenzschicht in zweidimensionaler und inkompressibler Strömung. *K. Nickel.*

Archipov, V. N.: Über die Stabilität der laminaren Begleitzone. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. **12**, Nr. 4, 41—44 (1958) [Russisch].

Mittels der Galerkinschen Methode untersucht der Verf. die Stabilität der ebenen, laminaren Begleitzone hinter einem mit zäher Flüssigkeit umströmten Körper. Als spezieller Fall wird die Begleitzone hinter einem Kreiszylinder betrachtet. Dabei nimmt man für die Geschwindigkeitsverteilung der Grundströmung die von Tollmien abgeleitete Abhängigkeit an. Aus der berechneten Indifferenzkurve der zweiten Näherung bestimmt sich die kritische Re-Zahl $Re_{kr} = 36,5$, was mit dem experimentell ermittelten Wert $Re_{kr} = 40$ gut übereinstimmt. *V. Saljnikov.*

Sanyal, Lakshmi: Three-dimensional boundary layer equations. *Z. angew. Math. Mech.* **37**, 169—177 (1957).

Es werden für die Strömung längs einer beliebig gekrümmten Wand die dreidimensionalen Grenzschichtgleichungen aus den Navier-Stokesschen Gleichungen hergeleitet. Für die beiden Gleichungen in den Richtungen parallel zur Wand erhält der Verf. das gleiche Ergebnis wie L. Howarth (dies. Zbl. **42**, 191), während die dritte Gleichung gewisse Abweichungen zeigt. Die Überlegungen entsprechen denjenigen von H. Schmidt und K. Schröder (dies. Zbl. **28**, 123). *H. Schlichting.*

Struminskij (Struminsky), V. V.: Equations of a three-dimensional boundary layer in a compressible fluid for an arbitrary surface. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **114**, 271—274 (1957) [Russisch].

La note présente une généralisation des résultats obtenus dans un travail précédent (voir ce Zbl. **70**, 429) où ont été déduites les équations de la couche limite en trois dimensions dans le cas d'un fluide incompressible. L'A. obtient les équations correspondantes au cas où le fluide est supposé compressible et, par des transformations généralisées de Dorodnitsyne, amène ces équations à la forme analogue à celle du mouvement plan. *C. Woronetz.*

Sedney, R.: Some aspects of three-dimensional boundary layer flows. *Quart. appl. Math.* **15**, 113—122 (1957).

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit laminaren inkompressiblen dreidimensionalen Grenzschichtströmungen. Von den dreidimensionalen Grenzschichtgleichungen, die durch Koeffizientenvergleich der nullten Potenz einer Reihenentwicklung nach Potenzen von $\sqrt{\nu}$ (ν kinematische Zähigkeit) gewonnen werden, wird zunächst nachgewiesen, daß sie invariant sind gegenüber solchen Koordinatentransformationen, die die Koordinate senkrecht zur umströmten Wand ungeändert lassen. Unter Benutzung von Außenstromlinien-Koordinaten wird weiter gezeigt, daß bei Umströmung einer beliebigen krummen Fläche keine Sekundärströmung auftritt, wenn die Außenstromlinien mit den geodätischen Linien der umströmten Fläche zusammenfallen. Abschließend wird noch auf die Verdrängungswirkung einer dreidimensionalen Grenzschicht eingegangen und eine Gleichung zur Bestimmung der Verdrängungsdicke angegeben. *T. Geis.*

Fur, Bernard Le: Calcul de la couche limite laminaire dans un écoulement compressible avec gradient de pression et paroi thermiquement isolée. *C. r. Acad. Sci., Paris* **246**, 546—548 (1958).

Der Verf. untersucht mit Hilfe einer generalisierten Howarth-Stewartson Transformation die kompressible laminare Grenzschicht mit Druckgradienten bei isolierter Wand, unter der Voraussetzung, daß das Gas ideal ist und daß das Verhältnis der spezifischen Wärmen und die Pr-Zahl temperaturunabhängig sind. Dabei ist erlaubt daß $Pr \neq 1$ ist. Die Zähigkeit kann eine beliebige Funktion der absoluten Temperatur sein. Für die Temperaturverteilung in der kompressiblen Grenzschicht wird ein analytischer Ausdruck angesetzt, dessen Gültigkeit später diskutiert wird. Es wird der Zusammenhang zwischen den Größen der kompressiblen und inkompressiblen Grenzschicht (Impulsdicke, Verdrängungsdicke, Wandschubspannung, integrale Impulsgleichung) hergestellt. Für den Fall der ebenen Platte mit konstanter Außengeschwindigkeit erhält man für den Widerstandskoeffizienten den gleichen Ausdruck wie Chapman und Rubesin, ohne aber über die Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit besondere Voraussetzungen zu machen. *P. Čolak-Antić.*

Liepmann, H. W.: A simple derivation of Lighthill's heat transfer formula. *J. Fluid Mechanics* **3**, 357—360 (1958).

Ausgehend von der Darstellung $-q_w = \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u (h - h_\infty) dy$ (δ = Grenzschichtdicke, ρ = Dichte, u = Geschwindigkeitskomponente in Strömungsrichtung

x, h = Enthalpie) gelingt es durch geschickte Koordinatentransformation und durch Annahme einer ähnlichen Verteilung von $\rho\mu/q$ (μ = Zähigkeit), q_w in Abhängigkeit von Schubspannung, Dichte, Zähigkeit und Enthalpie darzustellen. Diese Darstellung ist einer Formel von Lighthill (dies. Zbl. 38, 115) äquivalent, wobei die geringe Abweichung eines Zahlenfaktors in der Vorgabe des Ähnlichkeitsmaßstabs begründet ist. Eine Formel für q_w , die in der Nähe des Ablösungspunktes gilt, wird in analoger Weise hergeleitet.

G. Hämmerlin.

Levine, Harold: Skin friction on a strip of finite width moving parallel to its length. *J. Fluid Mechanics* 3, 145—158 (1957).

Ein ebener, unendlich langer Streifen der Breite $2a$ befindet sich in einer ruhenden Flüssigkeit. Wird er plötzlich in Längsrichtung in eine gleichförmige Bewegung gebracht, so bildet sich eine instationäre Strömung aus, nach deren Reibungswiderstand hier gefragt wird; der Einfluß beider Kanten wird mitberücksichtigt. Mit Hilfe von Laplace-Transformation und Greenscher Funktion wird aus der Bewegungsgleichung eine Integralgleichung hergeleitet. Die erste Iterierte dieser Integralgleichung liefert eine Formel für den Reibungswiderstand, die für kleine Zeiten, also im Anfangszustand, gültig ist.

G. Hämmerlin.

Townsend, A. A.: Turbulent flow in a stably stratified atmosphere. *J. Fluid Mechanics* 3, 361—372 (1958).

Verf. untersucht turbulente Strömungen in stabil geschichteten Medien in großer Entfernung von begrenzenden Wänden. Die herangezogenen Methoden lehnen sich stark an den Fall konstanter Dichte an. Das Ziel der Arbeit ist ein Kriterium, das die Aufrechterhaltung der ausgebildeten turbulenten Strömung gewährleistet. Ausgehend von den Navier-Stokes-Gleichungen, der Kontinuitätsgleichung und dem Energie-satz für die turbulenten Zusatzgrößen, gelingt es, einen Zusammenhang zwischen der Richardson Zahl dieser Schwankungsgrößen (flux Richardson number) und der normalen Richardson-Zahl der Strömung herzustellen. Diese Beziehung liefert obere Schranken für diese beiden Größen bei deren Überschreitung die turbulente Strömung zusammenbrechen soll. Abschließend werden Vergleiche mit einschlägigen Messungen angestellt.

J. Zierep.

Biot, M. A.: Influence of thermal stresses on the aeroelastic stability of super-sonic wings. *J. aeronaut. Sci.* 24, 418—420, 429 (1957).

In einer vorausgegangenen Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 70, 433) wurde die aeroelastische Stabilität von Überschallflügeln bei Berücksichtigung einer Biegung in Tiefenrichtung untersucht. Es hatte sich dabei gezeigt, daß die Stabilität sehr empfindlich gegenüber dem „antiklastischen“ Effekt ist, d. h. gegenüber der Neigung des Flügels eine Sattelform anzunehmen. Die beim Flug mit hoher Geschwindigkeit auftretende Erwärmung und die dadurch hervorgerufenen Wärmespannungen vergrößern aber diesen Effekt. Zur vereinfachten Berechnung wird eine in Tiefenrichtung parabolische Temperaturverteilung angenommen, wobei die Temperatur vorn, in der Mitte und hinten als Parameter frei bleiben. Diese Annahme führt auf eine Differentialgleichung 4. Ordnung. Bei konvexer Temperaturverteilung (Temperatur in Flügelmitte größer als der Mittelwert vorn und hinten) wirkt der Temperatureffekt instabilisierend auf die Torsionssteifigkeit aber stabilisierend auf den antiklastischen Effekt. Bei konkaver Temperaturverteilung (die einer Abkühlphase entspricht) liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt.

W. Wuest.

Squire, H. B.: The motion of a simple wedge along the water surface. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A* 243, 48—64 (1957).

Untersucht wird die zweidimensionale Strömung bei stationärer Bewegung eines eingetauchten Keils quer zur Kante; die vordere Keilfläche wird flach geneigt, die hintere vertikal angenommen. — Im Rahmen einer linearisierten Theorie wird Druckverteilung, Auftrieb, Widerstand und Wellenprofil berechnet. Bei der Druckverteilung ergibt sich gute Übereinstimmung mit Ergebnissen von Maruo, welche die

dynamische Austausch nicht erfassen. — Beim Widerstand ergibt sich für konstante Gewichtsbelastung des Keils ein konstanter Druckwiderstand, der für kleine Geschwindigkeit im wesentlichen durch den Wellenwiderstand, für große Geschwindigkeiten durch den Spritzerwiderstand geliefert wird. Ein Widerstandsbuckel ergibt sich durch den tangentialen Reibungswiderstand, der nur bis zum Beginn der dynamischen Austausch ansteigt, um dann auf einen konstanten Wert zurückzufallen.

K. Eggers.

Miller, G. F.: On certain integrals occurring in a hydrodynamical problem. Proc. roy. Soc. London, Ser. A **243**, 65—77 (1957).

Die Arbeit beschreibt die Auswertung uneigentlicher Faltungsintegrale über Besselfunktionen, welche in einer Arbeit von Squire (s. vorsteh. Referat) auftreten. Es wird gezeigt, daß die Integrale für bestimmte Parameterwerte auf tabellierte Funktionen zurückgeführt werden können und daß die Ableitungen des Integrals nach dem Parameter elementare Funktionen sind.

K. Eggers.

Normandin, Michel: Sur la théorie du second ordre des phénomènes parasites dans un canal à houle. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 1880—1882 (1957).

In einem rechteckförmigen Hafen mit konstanter Tiefe werden die Schwingungen des eingeschlossenen Wassers untersucht, die durch eine longitudinale lineare ebene Dünung und durch ein zur Ruheebene des Wassers symmetrisches transversales ebenes Plätschern hervorgerufen werden. Es wird explizit die Gleichung für die freie Oberfläche angegeben. Neben den seit Miche und Biesel bekannten Gliedern zweiter Ordnung der Theorie der ebenen Erscheinungen treten auch dreidimensionale Wirkungen zweiter Ordnung auf, „am sinusförmigen Kamm tordierte Wellen“, die im Grenobler hydrodynamischen Institut auch beobachtet worden sind.

J. Pretsch.

Daubert, André: Sur une méthode de calcul approché au troisième ordre d'une houle complexe. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 1878—1880 (1957).

Die ebene Dünung in einem Becken konstanter Tiefe setzt sich zusammen aus einfallenden und reflektierten Elementarwellen, die in erster Näherung sich mit der Airyschen Geschwindigkeit ausbreiten, und solchen Wellen, die durch die nicht-linearen Wechselwirkungen zwischen diesen Elementarwellen erzeugt werden. Die bisherige Näherungstheorie, welche die Krümmung bis zur zweiten Ordnung erfaßt, wird mit Hilfe der Poincaréschen Methode kleinster Parameter bis zur dritten Ordnung vorangetrieben, ohne daß indessen die Konvergenz des Verfahrens bewiesen wird.

J. Pretsch.

Daubert, André: Calcul approché au troisième ordre d'une houle complexe. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 2006—2009 (1957).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit (s. vorstehendes Referat) werden die Formeln zur Berechnung der freien Oberfläche für die dort untersuchte Form einer Dünung mitgeteilt.

J. Pretsch.

Miles, John W.: On the generation of surface waves by shear flows. J. Fluid Mechanics **3**, 185—204 (1957).

Für die Erzeugung von Oberflächenwellen durch eine parallele Scherströmung $U(y)$ in einem angrenzenden Medium wird ein Gedankenmodell entwickelt unter Heranziehung der Orr-Sommerfeldschen Gleichung für reibungsfreie Flüssigkeiten. Das Maß der Energieübertragung auf eine Welle der Geschwindigkeit c erscheint proportional der Krümmung des Geschwindigkeitsprofils in der Höhe y , für welche $U = c$ gilt. Für das Beispiel der Erzeugung von Schwerewellen bei logarithmischem Geschwindigkeitsprofil wird die Verteilung der Energieübertragung über das Spektrum der Wellen verschiedener Ausbreitungsgeschwindigkeit berechnet. Unter Annahme laminarer Dissipation ergibt sich für die Erzeugung von Schwerewellen eine untere Grenze für die erforderliche Windgeschwindigkeit von 1 m/sec.

K. Eggers.

Goody, A. J. and T. V. Davies: The theory of symmetrical gravity waves of finite amplitude. IV. Steady, symmetrical, periodic waves in a channel of finite depth. Quart. J. Mech. appl. Math. 10, 1—12 (1957).

Im Anschluß an Teil III (dies. Zbl. 46, 199), wo eine Näherungslösung des Problems symmetrischer periodischer Schwerewellen endlicher Amplitude gegeben wurde, werden nunmehr numerische Ergebnisse in Tabellen mitgeteilt, aus denen die Wellengeschwindigkeit bei gegebenen Werten der Höhe und Länge der Welle sowie der Kanaltiefe und Flüssigkeitgeschwindigkeit bestimmt werden kann. J. Pretsch.

Roseau, Maurice: Sur le calcul des ondes courbes parallèles au bord dans un liquide pesant sur un fond incliné. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 2472—2474 (1957).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 42, 201) wird die Wellenbewegung einer schweren Flüssigkeit auf einem unter dem Winkel α abfallenden Strand in einer linearen Theorie untersucht, wobei nach einer Maßstabsänderung die Potentialfunktion φ der Gleichung $\Delta\varphi - k^2\varphi = 0$ zu genügen hat. Für $k < 1$ waren zwei Lösungen angegeben worden, von denen eine am Rand regulär war, die andere aber dort eine logarithmische Singularität hatte. Nunmehr wird ein Lösungsansatz für $k > 1$ untersucht. J. Pretsch.

Roseau, Maurice: Sur les ondes courbes parallèles au bord dans un liquide pesant sur un fond incliné. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 53—55 (1958).

In Fortsetzung der oben besprochenen Arbeit (s. vorstehendes Referat) werden die Eigenschaften der Lösungen erörtert. Für $\pi - 2\vartheta \neq 2n\alpha$, wo $\cos\vartheta = 1/k$ ist, erhält man zwei Lösungen, die sich nahe dem Rand wie $r^{-\pi/\alpha}(\sqrt{r^2 = x^2 + y^2})$ verhalten; für $\pi - 2\vartheta = 2n\alpha$ sind die Fälle n gerade und n ungerade zu unterscheiden. J. Pretsch.

Roseau, Maurice: Sur les solutions d'un problème aux limites de type mixte. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 226—227 (1958).

Aus den Ergebnissen der beiden vorstehend besprochenen Arbeiten wird abgeleitet, daß es für Schwerewellen auf einem unter dem Winkel α abfallenden Strand unendlich viele Lösungen gibt, die linear von den willkürlichen Konstanten q abhängen, wenn man die Oberflächenwelle im Unendlichen und eine Singularität im Ursprung von der Ordnung $r^{-q-\pi/\alpha}$ vorschreibt. J. Pretsch.

● Stoker, J. J.: Water waves. The mathematical theory with applications. (Pure and Applied Mathematics. Vol. 4.) New York: Interscience Publishers, Inc.; London: Interscience Publishers Ltd. 1957. XXVIII, 567 p.

Dem Verf. ist ohne Zweifel seine Absicht gelungen, „Interesse und Begeisterung“ für den vielseitigen Stoff der Wasserwellen zu entfachen. Durch eine abgewogene Darstellung der physikalischen Voraussetzungen und der mathematischen Ableitungen, durch eine gründliche Darstellung im ganzen wird das Buch auch für den Maschineningenieur, den Hydrauliker, den Schiffbauer eine genüßreiche Belehrung sein. Es strebt keineswegs Vollständigkeit an, sondern stützt sich bewußt auf die Fortschritte, die während des letzten Krieges vornehmlich am Institute of Mathematical Sciences der New Yorker Universität erzielt wurden. Das Buch gliedert sich nach Art der mathematischen Probleme, die zur Bewältigung der verschiedenen Fragenkreise der Oberflächenwellen gelöst werden müssen, in vier Abschnitte. Im ersten Teil werden aus der grundlegenden Hydrodynamik für ideale inkompressible Flüssigkeiten heraus die zwei Näherungsmethoden hergeleitet, die in den folgenden Abschnitten benutzt werden, nämlich die lineare Näherung der Potentialtheorie für kleine Wellenamplitude (2. Teil) und die nichtlineare Näherung für seichtes Wasser (3. Teil). Im zweiten Teil wird das Geschwindigkeitspotential als Lösung der Laplacegleichung mit gewissen linearen Rand- und Anfangsbedingungen behandelt für die in der Zeit harmonische Schwingung (Wellen am abfallenden Strand und gegen Steilfelsen), für die instationäre Bewegung aus einer Anfangsstörung von der Ruhe aus und Wellen auf fließendem Gewässer, wo die Bewegungen kleine Schwingungen um

die Ruhelage des Flüssigkeitsgleichgewichtes sind, sowie für Schiffswellen auf See. Der dritte Teil beschreibt die mit der Charakteristikenmethode arbeitende Seichtwassertheorie, die Fortpflanzung instationärer Wellen aus örtlichen Störungen in ruhendes Wasser hinein, das Wellenbrechen, die „solitäre“ Welle, frontale Unstetigkeiten in der Atmosphäre und die lineare Seichtwassertheorie für kleine Amplituden, die in der Theorie der Meeresgezeiten benutzt wird (schwimmende Wellenbrecher, Wellen in Häfen), sodann die hydraulischen Probleme der Wellen in offenen Kanälen und Flüssen, der Rollwellen in steilen Kanälen, der Flutvoraussagen in Flüssen (Ohio-Mississippi). Im vierten Teil schließlich werden Probleme mit nichtlinearen Bedingungen der freien Oberfläche exakt behandelt, z. B. der Beweis der Existenz periodischer Wellen endlicher Amplitude nach Levi-Civita oder das Zusammenbrechen von Flüssigkeitssäulen auf einer starren horizontalen Unterlage. — Nach der Lektüre des Buches wünscht man sich viele weitere Bände über andere Gebiete der Hydrodynamik aus der klaren, flüssigen und fesselnden Feder des Verf. *J. Pretsch.*

Sulejkin (Shoulejkin), V. V.: The development of sea waves from their initiation to the phase of maximum steepness. Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 472—475 (1958) [Russisch].

Peters, A. S. and J. J. Stoker: The motion of a ship, as a floating rigid body, in a seaway. Commun. pure appl. Math. 10, 399—490 (1937).

Um eine möglichst allgemeine lineare Theorie für die Schiffsbewegung auf See aufzustellen, muß die Wasserbewegung als kleine Schwingung, das Schiff selbst als dünne Scheibe und die Schiffsbewegung in Form kleiner Schwingungen relativ zur konstanten Fahrtgeschwindigkeit vorausgesetzt werden. Zusätzliche Annahmen über die Wechselwirkung zwischen Schiff und Wasser oder über eine Kopplung zwischen den verschiedenen Freiheitsgraden des Schiffes oder über die Oberflächenwellen werden nicht gemacht, aber die Gesetze der Hydrodynamik einer nichtturbulenten idealen Flüssigkeit zugrunde gelegt. Untersucht werden drei Schiffstypen: der von Michell [Philos. Mag., V. Ser. 45, 106—123 (1898)] angegebene Typ, der in bezug auf die vertikale Längsebene des Schiffes schlank ist, der Gleitboottyp, der in bezug auf die Horizontalebene in der Wasserlinie des Schiffsrumpfs dünn ist und der T-förmige Typ des Rumpfquerschnitts, der eine Kombination der ersten beiden Typen ist und bei Yachten und schnellen Schiffen angewendet wird. Das Geschwindigkeitspotential und die Größen, welche die Schiffsbewegung bestimmen, z. B. Rollen, Gieren, Stampfen, werden nach Potenzen des Schlankheitsparameters β entwickelt. Nach einer allgemeinen Formulierung der Probleme vom Standpunkt der exakten Hydrodynamik wird die linearisierte Theorie mit den Randbedingungen an der freien Oberfläche und am Schiffsrumpf, sodann für alle drei Typen das System der Bewegungsgleichungen hergeleitet. Für Bewegungen, die einfach harmonisch in der Zeit sind, werden die Randwertprobleme durch ein gekoppeltes System singulärer Integralgleichungen dargestellt, und schließlich werden Eindeutigkeitssätze für die Lösungen der Integralgleichungen im Anschluß an Finkelstein [Commun. pure appl. Math. 10 (1957), im Erscheinen] bewiesen, wobei die stärkeren Eigenschaften der Lösungen des dreidimensionalen Problems benötigt werden. Die häufig benutzten Greenschen Funktionen, ihre Integraldarstellungen und ihr Verhalten im Unendlichen werden im Anhang behandelt. Eine gekürzte Fassung der Arbeit findet sich in Kap. 9 des Buches von J. J. Stoker „Water waves“, siehe folgendes Referat. *J. Pretsch.*

Kidder, R. E.: Unsteady flow of gas through a semi-infinite porous medium. J. appl. Mech. 24, 329—332 (1957).

Die nichtstationäre, eindimensionale und isotherme Gasströmung durch ein poröses Medium wird in dimensionslosen Größen durch die Gleichung (a) $D_x(p D_x p) = D_t p$ (p = Druck, $D_x = \partial/\partial x$, $D_t = \partial/\partial t$) beschrieben. Anfangsbedingung: $p(x, 0) = 1$ für $0 < x < \infty$, Randbedingung: $p(0, t) = p_1 < 1$ für $0 \leq t < \infty$. (a) besitzt entsprechend der Wärmeleitungsgleichung Lösungen der Form $p(z)$ mit

$z = x/2 \sqrt{t}$. Mit $p^2 = 1 - \alpha \cdot w$, $0 < \alpha < 1$, folgt für w eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung, deren Lösung als Potenzreihe $w = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k w_k(z)$ angesetzt wird. Die Rechnung zeigt, daß das Verfahren gut konvergiert. Die nullte Näherung w_0 ergibt sich dabei, wie zu erwarten, aus (a) oder $D_x^2 p^2 = (1/p) D_x p^2$, indem man den Koeffizienten $1/p$ durch den konstanten Wert $1/p(x, 0) = 1$ ersetzt, wodurch wiederum die Wärmeleitungsgleichung entsteht [vgl. Green und Wilts, Proc. first US Nat. Congr. appl. Mech., Ann Arbor, Mich. 777—781 (1952)]. C. Heinz.

Escande, Léopold et Jacques Dat: Recherches sur les cheminées d'équilibre déversantes. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 989—991 (1957).

Recherches expérimentales et comparaison avec les résultats théoriques obtenus antérieurement [C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 338—341 (1952)]. Dan Gh. Ionescu.

Michel, Bernard: Sur la théorie non linéaire de la stabilité d'une installation hydro électrique munie d'une cheminée d'équilibre. C. r. Acad. Sci., Paris **244**, 40—43 (1957).

Sideriades, Lefteri: Retour sur le calcul des chambres d'équilibre. Validité des hypothèses émises. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 1884—1887 (1957).

En employant des méthodes topologiques, on montre que la condition de Thoma constitue une bonne approximation dans le cas de faibles pertes de charges. Dans les autres cas (usines de basse chute), on obtient une section critique toujours inférieure à celle donnée par la condition de Thoma. Dan Gh. Ionescu.

Sideriades, Lefteri: Stabilité de deux cheminées d'équilibre couplées sans pertes d'insertion. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 554—559 (1958).

En utilisant une méthode développée dans la Note rapportée ci-dessus et moyennant certaines hypothèses supplémentaires résultant du couplage, l'A. étudie le problème d'une usine fonctionnant avec deux installations hydrauliques distinctes en parallèle. Dan Gh. Ionescu.

Wärmelehre:

Brown, W. B.: The statistical thermodynamics of mixtures of Lennard-Jones molecules. I. Random mixtures. II. Deviations from random mixing. Philos. Trans. roy. Soc. London, Ser. A **250**, 175—246 (1957).

Verf. bringt die thermodynamischen Potentiale einer Mischung in Beziehung zu einer reinen Bezugssubstanz. Es wird vorausgesetzt, daß die Wechselwirkungsenergien zwischen den Molekülen kugelsymmetrisch sind und sich wie Lennard-Jones $m-n$ -Potentiale verhalten. Sehr wesentlich ist die Annahme einer regellosen Verteilung der verschiedenen Molekülsorten (random-mixing approximation). Bedeuteten x_α und x_β Molenbrüche, so wird mit den gemittelten potentiellen Energien $\langle u^{i\alpha} \rangle = \sum_x \sum_\beta x_\alpha x_\beta u_{\alpha\beta}(r_{i\alpha})$ gerechnet. Es gilt $\langle u(r) \rangle = f_x u_0(r/g_x)$. u_0 ist ein Bezugspotential, f_x und g_x sind Größen, welche von der Zusammensetzung der Mischung und den Kraftparametern abhängen. Wird eine modifizierte kanonische Verteilung mit der gemittelten potentiellen Gesamtenergie $\langle u \rangle = \sum_{i \in x} \langle u^{i\alpha} \rangle$ verwendet, so ergibt sich, indem das Gesetz der korrespondierenden Zustände berücksichtigt wird, folgender Zusammenhang $G(T, p, x) = f_x G_0(T/f_x, p \cdot h_x/f_x) - RT \ln h_x + RT \sum_\alpha x_\alpha \ln x_\alpha$. $G_0(T, p)$ ist das Gibbsche thermodynamische Potential der reinen Bezugssubstanz. Mit Hilfe dieser Gleichung diskutiert der Verf. Mischungseffekte, Phasengleichgewichte und kritische Phasen. In erster Näherung stimmt diese Theorie mit der Theorie der konformen Lösungen von Longuet-Higgins überein. Im zweiten Teil der Arbeit werden Korrelationseffekte untersucht. Die durchgeführten Betrachtungen zeigen, daß Effekte der Nahordnung nur dann stärker hervortreten, wenn die Moleküle sich in ihrer Größe sehr unterscheiden. G. Kelbg.

Kurth, Rudolf: Das Anfangswertproblem der statistischen Mechanik. *J. Math. Mech.* **7**, 29—41 (1958).

Wenn in einem Phasenraum die Bewegung durch die Gleichungen $\ddot{x}_i = f_i(x, t)$ ($i = 1, \dots, K$) bestimmt wird, genügt eine invariante t -abhängige Wahrscheinlichkeitsdichte $W(x, t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{i=1}^K \frac{\partial}{\partial x_i} (W f_i) = 0.$$

Für die von x_i ($i = 1, \dots, k$) abhängige marginale Wahrscheinlichkeitsdichte w gilt die Differentialgleichung

$$(*) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} (w F_i) = 0,$$

wobei $F_i(x_1, \dots, x_k, t)$ die bedingten Erwartungswerte der f_i sind. Damit geht in (*) die unbekannte Wahrscheinlichkeitsdichte noch selbst ein und zu einer w allein enthaltenden Funktionalgleichung kommt man wie bekannt nur durch zusätzliche Hypothesen, wie z. B. bei mechanischen Systemen mit Kräften, die nur von den Massenpunktpaaren abhängen, die klassische Annahme der Unabhängigkeit der Paardichte. Es werden das statistisch-mechanische Analogon der Eulerschen Gleichungen aufgestellt (vgl. W. Noll, dies. Zbl. **65**, 194) und die Lösung für endliches

Zeitintervall der Hauptgleichung $\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot X(w) = Y(w)$ durch die übliche

Iteration kurz skizziert.

D. Morgenstern.

Tolmačev (Tolmachev), V. V.: On obtaining time correlation functions for statistical systems with long-range interactions for periods up to the mean free time. *Soviet Phys., Doklady* **2**, 124—128 (1958), Übersetzung von *Doklady Akad. Nauk SSSR* **113**, 301—304 (1957).

The paper contains an attempt to solve approximately a chain of equations for symmetrical distribution functions which the author derived in a previous paper (this Zbl. **65**, 419). There is little discussion of the results obtained, and no comparison with experiment.

P. T. Landsberg.

Lebowitz, Joel L. and Harry L. Frisch: Model of nonequilibrium ensemble: Knudsen gas. *Phys. Review, II. Ser.* **107**, 917—923 (1957).

A system is considered which interacts with its surroundings by collisions. The surroundings consist of an infinite number of identical and independent components, each of which interacts with the system only once. The interaction occurs at the spatial boundaries of the system. The example of such a system which is studied is a rarefied gas, the collisions between whose molecules can be neglected, and which is confined to a container whose walls are kept at different temperatures. If this temperature difference ΔT be small, and for one-dimensional molecular motion, the heat flux is found to be proportional to ΔT , with a coefficient which agrees with kinetic theory considerations. But the argument is not confined to the calculation of this quantity, and sheds in any case new light on it.

P. T. Landsberg.

Sáenz, A. W.: Transport equation in quantum statistics for spinless molecules. *Phys. Review, II. Ser.* **106**, 1371—1372 (1957).

Berichtigung zu A. W. Sáenz (dies. Zbl. **77**, 402).

H. Kümmel.

Ekstein, H.: Ergodic theorem for interacting systems. *Phys. Review, II. Ser.* **107**, 333—336 (1957).

A system is considered to be in contact with a temperature bath which consists of $N - 1$ copies of itself, so that the total Hamiltonian of the bath (which includes the system) is

$$H = \sum_{i=1}^N K(p_i, q_i) + \lambda V(p_1, q_1, \dots, p_N, q_N).$$

An ergodic theorem relating time and ensemble averages is proved for a class of interaction functions V in the limit $N \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 0$.

P. T. Landsberg.

Bocchieri, P. and A. Loinger: Quantum recurrence theorem. Phys. Review, II. Ser. **107**, 337—338 (1957).

The following theorem is established: If ε be any positive number, and if $\psi(t)$ be the wavefunction of a system having discrete energy eigenvalues at a time t , then there exists a time T such that $|\psi(T) - \psi(t)|^2 < \varepsilon$. This is an analogue of Poincaré's recurrence theorem: Any phase space configuration of a system enclosed in a finite volume will be repeated to any required accuracy after a finite period of time. The proof depends on the fact that, according to the theory of almost periodic functions that for any set of numbers E_n (energy eigenvalues), there always exists a $\tau \equiv T - t$ such that

$$\sum_{n=0}^{N-1} [1 - \cos(E_n \tau)] < \varepsilon.$$

Now observe merely that, by simple expansion of $\psi(\varepsilon)$

$$|\psi(T) - \psi(t)|^2 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} r_n^2 (1 - \cos E_n \tau) < 2 \sum_{n=N}^{\infty} r_n^2 (1 - \cos E_n \tau) + \sum_{n=0}^{N-1} (1 - \cos E_n \tau).$$

The theorem follows by making a suitable choice of N .

P. T. Landsberg.

Oppenheim, Irwin and John Ross: Temperature dependence of distribution functions in quantum statistical mechanics. Phys. Review, II. Ser. **107**, 28—32 (1957).

Using the Bloch equation, the temperature dependence of the Wigner distribution function of a canonical ensemble is discussed by deriving an integro-differential equation. Two distinct series solutions are given.

P. T. Landsberg.

Péneloux, André: Remarques sur l'hypothèse fondamentale de la théorie des processus irréversibles de K. Popoff. C. r. Acad. Sci., Paris **244**, 2589—2591 (1957).

Kritik der Hypothese von Popoff (Popov), wonach die phänomenologischen Gleichungen der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse als erste Integrale von einfachen Gleichungen höherer Ordnung, die in Analogie zur Newtonschen Bewegungsgleichung gebildet sind, entstehen sollen. Dazu wird ein einfaches Beispiel, kleine Schwingungen eines Pendels, im Sinne der Popoffschen Theorie diskutiert. [Siehe dazu K. Popoff, dies. Zbl. **72**, 431, sowie Popov, Soviet Phys. JETP **1**, 336—353 (1955), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. **28**, 257—282 (1955).] *J. Meixner.*

Lebowitz, Joel L. and Peter G. Bergmann: Irreversible Gibbsian ensembles. Ann. of Phys. **1**, 1—23 (1957).

Die Verf. legen der — durchweg klassischen — Beschreibung irreversibler thermodynamischer Prozesse eine früher entwickelte Integro-Differentialgleichung (dies. Zbl. **65**, 196) zugrunde, welche die Wechselwirkung zwischen den äußeren Reservoiren und dem betrachteten System mit berücksichtigt. Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen wird gezeigt, daß für große Zeiten alle Lösungen der Integro-Differentialgleichung asymptotisch gleich werden. Falls das System sich mit einem einzigen Wärmebad in Kontakt befindet, soll sich im Laufe der Zeit eine kanonische Verteilung einstellen. Diese Forderung führt auf eine „Integralbedingung“ für den stochastischen Kern der Integro-Differentialgleichung, auf deren Grundlage — unter Berücksichtigung der Mikroreversibilität — die Onsager-Relationen für die Wärmeströme hergeleitet werden können. Die wesentlichen Resultate der Arbeit sind nicht auf den Fall reiner Temperaturbäder beschränkt, sondern gelten auch für allgemeinere Reservoire.

E. Schmutzer.

Mascarenhas, S.: Thermodynamical theory of thermal conduction of dielectrics under electric fields. Nuovo Cimento, X. Ser. **5**, 1118—1121 (1957).

Es wird versucht die anomale Wärmeleitung eines fluiden Dielektrikums im elektrischen Feld nach der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse durch den Kreuzeffekt zwischen thermischen und elektrischen Kräften zu deuten. Es gelingt dem Verf., aus den linearen phänomenologischen Gleichungen quadratische Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeitsänderung von der elektrischen Feldstärke vorherzusagen und dafür eine explizite Formel zu geben.

J. Meixner.

Tisza, Laszlo and Irwin Manning: Fluctuations and irreversible thermodynamics. Phys. Review, II. Ser. **105**, 1695—1705 (1957).

Der Zusammenhang zwischen der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse und der Theorie der zeitabhängigen Schwankungsfunktionen wird in konventioneller Weise durch eine Langevin-Gleichung dargestellt. Hier wird ein anderer Weg eingeschlagen, indem die statistische Verteilung der Bahnen, welche zwei oder mehrere gegebene Zustände verbinden, als durch die Onsager-Machlupsche Funktion bestimmt angesehen wird. Es ist dann möglich, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Bahnen explizit anzugeben und die Langevinsche Gleichung als Folgerung zu gewinnen. Die Schwankungen werden in der Zeit- und in der Spektraldarstellung berechnet. Gültigkeitsbereich und Grenzen der Theorie werden diskutiert. Zu erwähnen ist, daß alle Prozesse als Markoffisch in einer Variablen und alle Verteilungen als normal vorausgesetzt werden. Verallgemeinerungen werden angekündigt.

J. Meixner.

Wolf, E.: Intensity fluctuations in stationary optical fields. Philos. Mag., VIII. Ser. **2**, 351—354 (1957).

Man betrachte zwei Punkte (P_1 und P_2) in dem (stationären) Strahlungsfelde einer Lichtquelle. Die Atome der Strahlungsquelle emittieren zufälligerweise; infolgedessen hat man im Zeitpunkt t eine Schwankung der Strahlungsintensität $I_i(t)$ in P_i , welche derart aufgefaßt werden kann, daß in P_i eine zufällige Komponente $V_i(t)$ zu dem dortigen elektrischen Feldvektor hinzutritt ($i = 1, 2$; $I_i(t) = [V_i(t)]^2$). Die $V_i(t)$ ($i = 1, 2$) werden als stationäre stochastische Prozesse aufgefaßt. Auf Grund plausibler Überlegungen nimmt Verf. an, daß der Vektor ($V_1(t)$, $V_2(t + \tau)$) (wobei τ ein festgelegtes Zeitintervall bedeutet) normal verteilt ist. Wird die Schwankung von $I_i(t)$ als $I_i(t) - E I_i(t) = \Delta I_i(t)$ definiert, so hat man im erwähnten Falle $E[\Delta I_1(t) \Delta I_2(t + \tau)] = 2 \{E V_1(t) V_2(t + \tau)\}^2$; die rechte Seite sei kurz mit $2 [J_{12}(\tau)]^2$ bezeichnet. Dadurch werden die frühere Vermutung, daß $[J_{12}(\tau)]^2$ eine physikalische Bedeutung hat, sowie auch gewisse experimentelle Resultate von Hanbury Brown und Twiss [Nature **177**, 27 (1956)] theoretisch begründet.

P. Medgyessy.

Burgess, R. E.: Electrical conductivity and thermal fluctuations. Physica **23**, 705—706 (1957).

Kritische Bemerkungen zu statistischen Einzelheiten in der Arbeit von B. Meltzer (dies. Zbl. **77**, 405).

E. Breitenberger.

● **Richardson, E. G.:** Relaxation spectrometry. Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1957. VIII, 140 p. 20 guilders.

In der Hauptsache werden experimentelle Anordnungen zur Messung der elastischen und akustischen Relaxation und typische Ergebnisse in verschiedenen Frequenzbereichen besprochen. Mechanische und gelegentlich elektrische Modelle der Relaxation werden kurz diskutiert; die für die theoretische Deutung der Messung benötigten Formeln werden angegeben. Im vorletzten Kapitel wird auf die dielektrische Relaxation eingegangen und die Analogien zwischen ihr und der akustischen Relaxation werden ausführlich erörtert. Das abschließende Kapitel befaßt sich mit der eigentlichen Spektralanalyse, d. h. der Frage, wie man das Relaxationsspektrum berechnen kann, wenn die Absorption und Dispersion über einen gewissen Frequenzbereich bekannt sind; die wichtigsten Näherungsverfahren werden angegeben. Zahlreiche Literaturangaben ergänzen den Text.

J. Meixner.

Brown, R. Hanbury and R. Q. Twiss: Interferometry of the intensity fluctuations in light. I. Basic theory: the correlation between photons in coherent beams of radiation. Proc. roy. Soc. London, Ser. A **242**, 300—324 (1957).

In der Arbeit werden die in kohärenten Lichtstrahlen auftretenden Intensitätsschwankungen und die sich bei Beleuchtung einer Photokathode daraus ergebenden teilweise korrelierten örtlichen Schwankungen bei der Emission von Photoelektronen

theoretisch untersucht. Eine Korrelation zwischen Photonen, wie sie den genannten Intensitätsschwankungen im korpuskularen Bild entspricht, wurde zwar von anderen Autoren als Widerspruch zur Quantenmechanik verneint; eine Anwendung der Bose-Statistik auf das Lichtquantengas ergibt jedoch, daß es sich dabei um ein Analogon zum „bunching“ von Photonen handelt. Die Intensitätsschwankungen werden nach dem Wellenbild berechnet. Der Vorgang der Photoemission, insbesondere die aus den Intensitätsschwankungen sich ergebenden Schwankungen des Photostromes werden quantentheoretisch auf Grund der Wechselwirkung zwischen Materie und Strahlungsfeld behandelt. Eine eingehende theoretische Untersuchung einer aus zwei getrennt arbeitenden Multipliern bestehenden Versuchsanordnung, mit deren Hilfe der durch die Intensitätsschwankungen bedingte Effekt gemessen werden kann, schließt sich an. Wichtige Anwendung dieser Ergebnisse ist auf optischem Gebiet die Messung von Sterndurchmessern, im Radiofrequenzbereich die Interferometrie von Radioemissionsquellen; beides wurde bereits durchgeführt. *W. Strohmeier.*

Balazs, Nandor L.: Brownian motion of a mirror in superfluid helium. *Phys. Review*, II. Ser. **109**, 232—234 (1958).

This paper treats the Brownian motion of a mirror suspended in a phonon or photon gas. It is shown that the properties of the medium, such as the statistics and the temperature dependence of the excitation concentration, influence the mean square Fourier amplitudes of the motion of the mirror. *Zusammenfassg. des Autors.*

Camia, Frédéric: Courbes balistiques de la chaleur (et de la diffusion) dans une sphère creuse ou pleine et dans le cas d'un flux radial. *Équations fondamentales. C. r. Acad. Sci., Paris* **245**, 144—147 (1957).

La soluzione dell'equazione del calore per problemi unidimensionali con simmetria sferica viene espressa come serie di soluzioni elementari del tipo: $f_n(x) \exp(-\omega_n h t)$. Supposto il mezzo omogeneo e termicamente isotropo, inizialmente a temperatura nulla, si determinano gli autovalori ω_n per alcuni problemi ai limiti relativi alla sfera cava (temperatura nulla sulle superficie dello strato, una delle superficie isolata e l'altra a temperatura nulla, tutte e due le superficie isolate) e l'espressione della ricercata temperatura. Si dà infine una formula generale che racchiude in sé ben note espressioni della temperatura in problemi unidimensionali relativi alla sfera cava, alla sfera piena e al muro illimitato di spessore finito. *G. Sestini.*

Camia, Frédéric: Courbes balistiques de la chaleur (et de la diffusion) dans un cylindre de rayon fini et dans le cas d'un flux radial: équations fondamentales. *C. r. Acad. Sci., Paris* **245**, 2218—2221 (1957).

Analogamente a quanto aveva già fatto per il flusso lineare di calore (cfr. ref. precedente), l'A. dà una formula generale atta ad esprimere la soluzione di vari classici problemi non stazionari di flusso radiale di calore, in un mezzo omogeneo e termicamente isotropo occupante un cilindro rotondo indefinito o uno strato cilindrico, formato da due superficie cilindriche coassiali di rotazione. La formula è stabilita, come nel citato lavoro precedente, ricercando soluzioni espresse come serie di funzioni elementari del tipo: $f_n(r) \exp(-c_n^2 h t)$. *G. Sestini.*

Biot, M. A.: New methods in heat flow analysis with application to flight structures. *J. aeronaut. Sci.* **24**, 857—873 (1957).

Applicando, convenientemente adattati, alcuni suoi precedenti studi (cfr. questo Zbl. **57**, 191; **65**, 420) l'A. mostra l'equivalenza dell'equazione dell'equilibrio termico in un corpo isotropo, non necessariamente omogeneo, con un principio variazionale. Questa equivalenza permette all'A. una rapida impostazione di problemi di flusso termico in corpi anche anisotropi e il vantaggioso accostamento di problemi termici con altri relativi a diversi campi della fisica matematica (termoelasticità, fluidi viscosi compressibili). Introdotti una forza termica, un potenziale termico, una funzione di dissipazione e opportune coordinate generali, l'equazione del flusso termico viene scritta in forma lagrangiana, riconducendo così i problemi termici ai classici metodi della meccanica analitica. Il procedimento è applicato alla

risoluzione di alcuni assai generali problemi termici unidimensionali, anche non lineari, e allo studio del flusso di calore in una struttura alare supersonica.

G. Sestini.

Bory, Charles: L'individualisation de la matière dans les phénomènes de diffusion. *J. Phys. Radium* **18**, 228—231 (1957).

Roberts, P. H.: On the application of a statistical approximation to the theory of turbulent diffusion. *J. Math. Mech.* **6**, 781—799 (1957).

L'A. considère un fluide turbulent, homogène, isotrope, de vitesse u_i , dans lequel une grandeur χ diffuse suivant l'équation

$$\partial\chi/\partial\tau + \partial/\partial x_j (\chi u_j) = D_m \nabla^2 \chi,$$

où D_m est le coefficient de diffusion moléculaire. Il introduit les divers tenseurs de corrélation entre χ et les composantes de la vitesse en un ou plusieurs points, ainsi que leurs transformés de Fourier. Les plus importants sont $\bar{\chi}(x)$, $\bar{Y}_j(x, r) = \chi(x) u_j(x+r)$ et leurs transformés de Fourier $K(\xi)$, $Y_j(\xi, \kappa)$. Les équations de Navier-Stokes permettent d'écrire un système récurrent non fermé d'équations entre ces moments. On le ferme à l'aide d'une hypothèse souvent invoquée de quasi-normalité, qui introduit seulement les moments d'ordre 2 et 3 de la vitesse, que des théories analogues font connaître. Les hypothèses de symétrie ramènent enfin les tenseurs à des scalaires $K(\xi)$, $Y(\xi, \kappa, \theta)$. K s'exprime à l'aide de Y , et Y est solution d'une équation intégral-différentielle compliquée, du second ordre par rapport au temps. La structure de la diffusion de χ dépend ainsi des corrélations turbulentes, c'est à dire finalement, avec les hypothèses faites, du spectre de la turbulence. La discussion n'est amorcée que lorsque la viscosité, la diffusion moléculaire et les corrélations triples de vitesse sont négligeables. Lorsque, pour $t = 0$, $\chi(x) = A \delta(x)$, on trouve que, pour les petites valeurs de t , $\chi = \frac{A}{4\pi r^2} \delta(r - \bar{u}t)$. Pour des valeurs du temps suffisamment grandes, la solution χ satisfait approximativement à un „principe de Huyghens“. A l'aide de principes de similitude, il est enfin possible d'ébaucher une discussion sur la nature de la diffusion de χ en fonction du temps.

J. Bass.

Waerden, B. L. van der: Theorie der Trennschaukel. *Z. Naturforsch.* **12a**, 583—598 (1957).

Die Trennschaukel nach Clusius [K. Clusius und M. Huber, *Z. Naturforsch.* **10a**, 230—238 (1955)] ist ein Apparat zur Messung von Thermodiffusionskonstanten. Eine theoretische Behandlung muß drei systematischen Fehlern der Messung Rechnung tragen: a) bei endlicher Pumpzeit ist die Gleichheit der Konzentrationen an den Enden der Kapillaren noch nicht erreicht, b) bei langsamen Pumpen tritt Rückdiffusion in den Kapillaren ein, c) bei schnellem Pumpen stören die bewegten Gasmassen das Thermodiffusionsgleichgewicht. Zunächst wird das reine Transportproblem gelöst, um die Anreicherung des Gases bzw. seiner Komponenten in der mittleren Kapillare festzulegen. Hier genügt eine grobe Näherung. Wird die Diffusion mitberücksichtigt, so führt das Problem auf eine Integrodifferentialgleichung, die sowohl für die Rohre als auch für die Kapillaren gilt. Hieraus kann dann die Rückdiffusion in den Kapillaren bestimmt werden und es ergibt sich eine bemerkenswert einfache Formel für den Fehler, der entsteht, wenn man bei der Auswertung die Rückdiffusion nicht berücksichtigt (Kapillarvolumen \times Schaukelzeit = verschobenes Volumen \times Diffusionszeit). Die Anreicherung einer Komponente des Gases in den späteren Kapillaren wird dadurch verzögert, daß die Diffusion in den Rohren nicht unendlich schnell stattfindet. Dieser Umstand wird durch nachträgliche Multiplikation der Transportzeiten mit einem angegebenen Faktor ausgeglichen. Dieser Effekt kann häufig ganz beträchtlich werden. Die Störung c) macht sich erst in der Endphase des Prozesses bemerkbar. Um sie theoretisch zu erfassen, muß die Integrodifferentialgleichung innerhalb der einzelnen Rohre gelöst werden, was durch suk-

zessive Näherung geschieht. Der Konvergenzbeweis für das angegebene Verfahren ist leicht zu erbringen, praktisch genügt die zweite Näherung vollkommen. Es zeigt sich, daß durch die hier untersuchte Störung die gemessene Konzentrationsdifferenz um einen Faktor $1 + p$ vergrößert wird, wobei p bis 0,031 ansteigen kann. Dieser Umstand kann durch passende Wahl der Pumpfrequenz zu einer Beschleunigung der Anreicherung ausgenützt werden.

F. Selig.

Elektrodynamik. Optik :

● Bleaney, B. I. and B. Bleaney: *Electricity and magnetism*. Oxford: Clarendon Press: Oxford University Press 1957. XIV, 676 p. 63 s. net.

Die Verff. haben ihre umfangreiche Darstellung der Elektrodynamik als ein Lehrbuch gedacht, das sich etwa an Studenten in mittleren Semestern wendet. Sie folgen in der Behandlung der Maxwellschen Theorie dem bewährten Weg: Die ersten Kapitel sind der Elektrostatik gewidmet, dann werden der stationäre Strom, sein Magnetfeld und die Magnetostatik, schließlich das Induktionsgesetz, die Maxwellschen Gleichungen und elektromagnetische Wellen behandelt. Über den üblicherweise in Lehrbüchern der Elektrizitätslehre enthaltenen Stoff geht das vorliegende Buch weit hinaus. Von vornherein wird die atomistische Struktur der Materie berücksichtigt. Viele Kapitel sind den Anwendungen und moderneren Forschungsgebieten gewidmet: Filtertheorie, Wirkungsweise und Technik von Vakuumröhren insbesondere auch bei höchsten Frequenzen (Magnetron und Klystron), Theorie der Dielektrizitätskonstanten, Leitfähigkeitstheorie, Ferromagnetismus und Antiferromagnetismus, magnetische Resonanz usw. Es wird das Meter-Kilogramm-Sekunde-Coulomb Maßsystem verwendet; die Umrechnung in andere Maßsysteme findet sich auf den letzten Seiten. Ein Anhang führt in die Vektorrechnung und Vektoranalysis ein. Am Ende eines jeden Kapitels werden Übungsaufgaben gestellt, deren Lösungen beigelegt sind. Entsprechend der Absicht, das Buch elementar zu halten, gehen die Verff. auf die Relativitätstheorie nicht ein. Hervorzuheben sind Übersichtlichkeit und Prägnanz, mit denen der umfangreiche Stoff dargestellt ist.

G. Blankenfeld.

Hofmann, Hellmut: *Über die Deutung der Maxwellschen Gleichungen mit Hilfe elektrischer und magnetischer Mengen*. Acta phys. Austr. 11, 241—251 (1957).

Es ist bekannt, daß die Mittelwertbildung der Elektronentheorie auf die im Makrobereich gültigen Maxwellschen Gleichungen führt, so daß sich letztere im Sinne Lorentz' allein mit Hilfe elektrischer Ladungen deuten lassen. In diesem Falle besitzt die Größe \mathfrak{B} die Bedeutung der Feldstärke des magnetischen Feldes. Der Verf. setzt nun voraus, daß das magnetische Feld auch im Mikrobereich nicht quellenfrei sein soll, vielmehr „freie“ magnetische Ladungen existieren(?). Dann werden die elektrischen und magnetischen Mikrofelder auf symmetrische Weise miteinander verknüpft. Die elektrische, bzw. magnetische Ladungsdichte läßt sich aus der „wahren“ und aus der Polarisationsdichte zusammensetzen. Es wird dann bewiesen, daß sich die Maxwellschen Gleichungen durch Mittelwertbildung auch in diesem Falle ableiten lassen. doch in dieser Theorie ist aber die Größe \mathfrak{H} die Feldstärke des magnetischen Makrofeldes. — Es soll darauf hingewiesen werden, daß dem elektrischen bzw. magnetischen Polarisationsvektor im Mikrobereich keine unmittelbare Bedeutung zukommt, doch kann die Untersuchung des Verf. vom Standpunkt der Elektrotechnik aus einiges Interesse haben.

J. I. Horváth.

Aeschlimann, Florence et Jean-Louis Destouches: *L'électromagnétisme non linéaire et les photons en théorie fonctionnelle des corpusculs*. J. Phys. Radium 18, 632—637 (1957).

It is shown that from the non-linear theory of photons as formulated by the first author (Thèse Doctorat ès Sciences, Paris, 13 juin 1957) the electromagnetic non-linear theory of Born and Infeld can be deduced.

L. Infeld.

Bomze, Josef: Über die Möglichkeit der Existenz von konservativen elektrischen Ladungsbewegungen mit nicht-stationären Feldern im Rahmen der klassischen Elektrodynamik. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. II **165**, 313—325 (1957).

Der Verf. zeigt zunächst, daß ein durch retardierte Potentiale beschriebenes System bewegter elektrischer Ladungen stets Energie nach außen abstrahlt, ein durch avancierte Potentiale beschriebenes System stets Energie von außen aufnimmt. Erhebt man die Forderung, daß weder Strahlung emittiert noch absorbiert werden soll, so muß man — wie der Verf. weiter zeigt — notwendig das System unter gemeinsamer Verwendung von avancierten und retardierten Potentialen beschreiben.

G. Blankenfeld.

Nardini, Renato: Sulla velocità di gruppo nei mezzi elettricamente conduttori. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **12**, 523—525 (1957).

Auf Grund der bekannten Formel, die die Gruppengeschwindigkeit V_g eines elektromagnetischen Sinusfeldes als Funktion der Phasengeschwindigkeit V_f und der Kreisfrequenz liefert, beweist man, daß für ein leitendes, homogenes und isotropes Medium die Beschränkung $V_f \leq V_g < 2 V_f$ gilt. Hinweise auf den Fall, daß man die Leitfähigkeit als unendlich groß ansehen kann, und auf den Fall, daß die Kreisfrequenz nach Null strebt.

Zusammenfassg. des Autors.

Lichtenstein, Roland M.: Random interchange of circuits with applications to counting rate meters and function generators. J. appl. Phys. **28**, 984—989 (1957).

Verf. gibt ein Verfahren an zur Messung statistischer Größen mittels zweier gleicher Netzwerke, die, von statistisch auftretenden Impulsen gesteuert, wechselseitig von entgegengesetzt gerichteten Signalen durchlaufen werden. In der Theorie dieser Netzwerke kann dieses Umschalten unberücksichtigt bleiben, wenn man die komplexe Frequenz s ersetzt durch $s + 2r$, wobei r die mittlere Anzahl der Impulse pro Zeiteinheit bedeutet. Damit kann der statistische Mittelwert der Ausgangsgröße berechnet werden. Für die Reaktormesstechnik ergibt sich daraus die Möglichkeit, durch Wahl einfacher Netzwerke Anzeigergeräte mit nichtlinearen (z. B. logarithmischen) Skalen herzustellen. Weitere Anwendungsgebiete sind Funktionsgeneratoren für logarithmische und exponentielle Funktionen, wobei die Netzwerke lineare passive Elemente enthalten, wie z. B. Widerstände und Kondensatoren.

H. Schließmann.

Teissie-Solier, Max et Yves Sevely: Sur les équations et le diagramme théorique du moteur shunt à collecteur à alimentation rotorique. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 1525—1527 (1958).

Les A. A. proposent une nouvelle forme des équations du moteur Schrage faisant apparaître les inductances des fuites totales.

Zusammenfassg. der Autoren.

Cetlin (Tsetlin), M. L.: The use of matrices in analyzing and synthesizing pulse electronic and relay (non-primitive) circuits. Doklady Akad. Nauk SSSR **117**, 979—982 (1958) [Russisch].

Es werden Schaltungen aus Kontaktrelais oder Elektronenröhren mit einer beliebigen Anzahl von Eingängen und Ausgängen betrachtet. An jedem Eingang und Ausgang kann einer von zwei möglichen Zuständen (0 oder 1) bestehen. Zum Beispiel: Kontakt geöffnet oder geschlossen, Röhre erregt oder nicht. Eine Schaltung wird als primitiv bezeichnet, wenn die Zustände ihrer Ausgänge durch die Zustände der Eingänge vollständig bestimmt sind. Eine Schaltung wird nichtprimitiv genannt, wenn eine Rückkopplung zwischen einem Teil der Ausgänge und einer gleichen Anzahl von Eingängen besteht. Für diese Rückkopplungen werden konstante Verzögerungen gleich der Zeiteinheit vorausgesetzt. Die Eingangszustände zur Zeit $t + 1$ werden also durch die Ausgangszustände zur Zeit t mitbestimmt. Mit Hilfe des Logik-Kalküls werden Zustands- und Reaktionsmatrizen aufgestellt, durch welche die wechselnden Zustände der Schaltung im Verlauf der Zeit beschrieben werden. Als Analyse wird der Aufbau der Matrizen aus den Gleichungen bezeichnet.

welche den Zusammenhang zwischen den Zuständen angeben, als Synthese die Herleitung der Gleichungen aus gegebenen Matrizen. Analyse und Synthese werden am Beispiel einer Relaischaltung durchgeführt. *G. Günther.*

Cetlin (Tsetlin), M. L.: Composition and subdivision of non-primitive circuits. Doklady Akad. Nauk SSSR 118, 488—491 (1958) [Russisch].

Die Abhandlung schließt sich an obige an, in der der Verf. die Analyse und Synthese nichtprimitiver Schaltungen aus Kontaktrelais oder Elektronenröhren mittels Matrizen behandelt hat. Unter Verwendung der dort definierten Zustands- und Reaktionsmatrizen stellt er sich nun die Aufgabe, mehrere nichtprimitive Schaltungen zu einer einzigen zusammenzusetzen und umgekehrt eine solche Schaltung in eine Anzahl einfacherer zu zerlegen. Nach Aufstellung der allgemeinen Beziehungen wird als Anwendungsbeispiel eine Anzahl von einfachen Schaltungen mit je einem Eingang, einem Ausgang und einem Rückkopplungswege zu einer resultierenden Schaltung zusammengesetzt. *G. Günther.*

Chvojková, E.: Propagation of radio waves from cosmical sources. Nature 181, 105 (1958).

Ähnlich wie im optischen Falle, wo man bei der Positionsbestimmung eines Sternes die gekrümmte Bahn des Lichtes in der Atmosphäre berücksichtigen muß, ist bei der Positionsbestimmung einer kosmischen Radioquelle die Brechung der Radiowellen in der Ionosphäre zu berücksichtigen. Es wird gezeigt, daß dieser Einfluß auf eine Drehung des geradlinigen Teils des Strahls um den Krümmungsmittelpunkt der ionisierten Schicht hinauskommt. Der Drehwinkel ergibt sich als Funktion des Einfallswinkels, des Verhältnisses der Frequenz zur kritischen der Schicht und der Konzentration freier Elektronen, ist aber von deren Verteilung unabhängig. *G. Wallis.*

Hines, C. O. and P. A. Forsyth: The forward-scattering of radio waves from overdense meteor trails. Canadian J. Phys. 35, 1033—1041 (1957).

Die vereinfachte Berechnung der Vorwärts-Streuung an Meteorbahnen geht davon aus, daß eine effektive Reflexionsfläche eingeführt wird, die den Bereich umfaßt, in den schräg einfallende Strahlen nach der geometrischen Optik nicht eindringen. Er wird modellmäßig durch einen Metallzylinder ersetzt, die gestreute Intensität ohne Beugung, rein geometrisch-optisch bestimmt. Zur heuristischen Berücksichtigung des Einflusses der Polarisierung (α), den das Modell nicht beachtet, wird ein Faktor $\sin^2 \alpha$ in die Endformel eingefügt. *K. Rawer.*

Eckart, Gottfried: Sur la variation de la polarisation des ondes ultracourtes due à l'hétérogénéité de la troposphère. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 3044—3045 (1957).

Die Wellengleichungen im inhomogenen Medium können nach den drei Koordinaten separiert werden, wenn das den Gradienten der DK, ε , enthaltende Glied verschwindet. Das ist der Fall, wenn entweder $\varepsilon = \text{const}$ oder $\vec{E} \parallel \text{grad } \varepsilon$ (dann einfache Wellengleichung in \vec{H}) oder $\vec{E} \perp \text{grad } \varepsilon$ (dann einfache Wellengleichung in \vec{E}). Im allgemeinen Fall ist die Separierung aber nicht möglich. Für eine Störzone der DK wird eine Lösung durch sukzessive Approximation gesucht. Schon im ersten Schritt zeigt sich eine Polarisationsänderung. *K. Rawer.*

Wheelon, Albert D.: Relation of radio measurements to the spectrum of tropospheric dielectric fluctuations. J. appl. Phys. 28, 684—693 (1957).

Das Spektrum $S(k)$ einer Schwankungsverteilung der örtlichen DK, $\Delta\varepsilon$ wird durch zeitlich-räumliche Mitteilung über die Fourier-Transformierte der momentanen Schwankung $\Delta\varepsilon$ erhalten. Dann kann die räumliche Korrelationsfunktion von $\Delta\varepsilon$ als Fourier-Integral über die Wellenzahl, k , geschrieben werden. In diesem tritt das Spektrum $S(k)$ auf und eine Kernfunktion $H(kR)$, in der die gemittelten räumlichen Zusammenhänge enthalten sind. Wäre die Korrelationsfunktion der Schwankungen bekannt, so könnte das Spektrum berechnet werden. Umgekehrt wird

hier versucht, das Spektrum aus Beobachtungen abzuleiten. (Dabei wird Isotropie vorausgesetzt.) Grundsätzlich stößt man dabei auf Integralgleichungen, die teils exakt, teils näherungsweise gelöst werden. Als Beobachtungsgrößen werden folgende Schwankungen betrachtet (mit Berücksichtigung der integrierenden Wirkung der üblichen Spiegel-Antennen): Phase (räumlich und zeitlich), Einfallswinkel, Amplitude, Brechungsindex.

K. Rawer.

Wheeler, Albert D.: Spectrum of turbulent fluctuations produced by convective mixing of gradients. Phys. Review, II. Ser. 105, 1706—1710 (1957).

Das Spektrum $S(k)$ der Schwankungen der DK (vgl. vorstehendes Referat) wird berechnet für den Fall der Turbulenz in einer ionisierten Schicht mit starken Vertikalgradienten der Ionisation (Modell von Gallet). Von der momentanen Kontinuitätsgleichung der Elektronendichte N wird die stationäre Kontinuitätsgleichung abgezogen. N und die Konvektionsgeschwindigkeit V sind stochastische Funktionen, die durch das zugehörige (räumliche) Fourier-Integral ersetzt werden. So erhält man eine Integro-Differentialgleichung für η , die Fourier-Transformierte der Elektronendichte-Schwankung. Darin können die Rekombinations- gegen die Diffusions-Terme vernachlässigt werden. Wird nun auch noch der Integralausdruck gestrichen, der den Einfluß der turbulenten Mischung (ohne Gradienten-Einfluß) wiedergibt, so entsteht eine sofort lösbare lineare Differentialgleichung. Die Lösung wird über die stochastische Funktion V gemittelt, dabei Heisenbergs Energie-Spektrum eingeführt und so schließlich das mittlere räumliche Brechungsindex-Spektrum, $S(k)$, berechnet. Tatsächlich ist jedoch die Vernachlässigung der turbulenten Mischung nicht gerechtfertigt. Das ist eine erhebliche Abweichung von der Annahme „homogener Turbulenz“, weil turbulente Mischung Energie in jede Wellenzahl, k , einbringt und nicht nur in die kleinste, k_0 . Bei kleinen Wellenzahlen nahe k_0 wird (aus Dimensions-Betrachtungen) auf ein Spektrum nach k^{-3} geschlossen, dagegen bei großen, nahe der Viskositätsgrenze k_s (aus einer Iterations-Näherung) nach k^{-11} . Im Zwischengebiet werden eine Reihe von Vereinfachungen eingeführt, mit denen sich die Form

$$k^{-3} [1 + (k/k_s)^{4/3}]^{-2} \cdot [1 + (k/k_s)^4]^{-4/3}$$

ergibt. Im übrigen ist das Spektrum proportional dem Quadrat des Gradienten der Elektronendichte.

K. Rawer.

Denisov, N. G.: On a singularity of the field of an electromagnetic wave propagated in an inhomogeneous plasma. Soviet Phys., JETP 4, 544—553 (1957), Übersetzg. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 31, 609—619 (1956).

Bei schrägem Einfall gibt es in der von der Höhe z abhängigen Wellengleichung einer in der Einfallsebene polarisierten Welle eine Singularität in dem Niveau z_s , wo der Brechungsindex n verschwindet, also jenseits des Reflexions-Niveaus z_r (Försterlingsches Problem). Das Problem wird zunächst bei linearer DK $\varepsilon(z)$ mit endlicher Stoßzahl behandelt, wobei die Singularität neben die reelle z -Achse zu liegen kommt. Die Wellengleichung wird zweimal asymptotisch approximiert, einmal für das Gebiet $z > \text{Re}(z_r)$, einmal für $z < \text{Re}(z_s)$. Die Lösungen werden im Überlappungsgebiet aufeinander angepaßt, sie enthalten im wesentlichen Hankel-Funktionen. In der Nähe von $\text{Re}(z_s)$ gelingt eine Darstellung mit der Airy-Funktion. Große Feldstärkewerte E_z in diesem kritischen Gebiet gibt es nur bei sehr kleiner Stoßzahl. Der Maximalwert der Feldstärke E_z bei $\text{Re}(z_s)$ wird numerisch berechnet, er wird für die Daten der Ionosphäre nur bei nahezu senkrechtem Einfall ($2 \div 3^\circ$) bedeutend und wenn die Stoßzahl kleiner als 10^3 Hz ist. Physikalisch wird auch ohne Stöße die Singularität begrenzt bleiben, weil die einfallende Welle im Gebiet rascher Ortsvariation von n Plasmaschwingungen anregt und damit Energie verliert. Zur Berechnung wird die Inhomogenität in die Bewegungsgleichung des einzelnen Elektrons eingeführt (durch einen „Elektronendruck“-Term, der der Divergenz der Elektronendichte proportional ist). — Es ergibt sich damit eine Wellengleichung

vierter Ordnung, die für normale Inzidenz in 2 unabhängige Differential-Gleichungen zweiter Ordnung aufspaltet. Die zweite beschreibt Plasmawellen. Bei schrägem Einfall sind beide Gleichungen zweiter Ordnung gekoppelt. Ist die Kopplung nicht zu groß, so wirkt sie sich näherungsweise in der eigentlichen Ausbreitungsgleichung als Dämpfungsfaktor wie eine Stoßzahl aus. Numerisch für die Ionosphäre kann die Wirkung der Plasmawellen durch eine „effektive Stoßzahl“ von 10^2 bis 10^3 Hz beschrieben werden.

K. Rawer.

Budden, K. G. and P. C. Clemmow: Coupled forms of the differential equations governing radio propagation in the ionosphere. II. Proc. Cambridge philos. Soc. 53, 669—682 (1957).

In einer früheren Arbeit (Clemmow und Heading, dies. Zbl. 58, 219) wurden die vier Differentialgleichungen erster Ordnung für die Feldkomponenten durch eine lineare Transformation so weit als möglich entkoppelt. Die Transformationsmatrix R muß durch $R^{-1}TR$ die in den ursprünglichen Gleichungen stehende Matrix T in eine Diagonalmatrix überführen. Diese Bedingung bestimmt die Elemente von R und R^{-1} bis auf Zeilenfaktoren, die nun so gewählt werden, daß beide Matrizen soweit als möglich symmetrisch werden. Da T (mit der Dispersionsformel und den Ausbreitungsparametern) bekannt ist, kann R so bestimmt werden. Die verbleibende Kopplung ist dann durch $\Gamma = -R^{-1}R$ beschrieben, deren Elemente angegeben werden (Differentiation nach der Schichtungsordinate). Explizite Berechnung für drei spezielle Fälle: 1. vertikale Inzidenz; 2. vertikales Magnetfeld; 3. horizontales Magnetfeld in der Einfallsebene. Für 1. und 2. wird das Vierersystem erster Ordnung schließlich noch in ein Zweiersystem zweiter Ordnung umgeschrieben. Dabei ergeben sich bei 1. die Försterlingschen Gleichungen.

K. Rawer.

Gurevič (Gurevich), A. V.: On the effect of radio waves on the properties of plasma (ionosphere). Soviet Phys., JETP 3, 895—904 (1957), Übersetzung von Žurn. éksper. teor. Fiz. 30, 1112—1124 (1956).

Davydov hat (unter der Voraussetzung geringen Energieverlustes pro Stoß und kleiner Störung) die Boltzmann-Gleichung separiert nach f_0 , dem störungsfreien, isotropen Anteil und f_1 , dem gestörten Anteil. Sukzessive Approximation von f_{00} , f_{10} , f_{01} , f_{11} . Umbau der so erhaltenen Lösung auf elliptische Polarisierung. Berechnung der mittleren Elektronen-Energie sowie der Komponenten des dielektrischen und Leitfähigkeits-Tensors durch Integration über den Geschwindigkeitsraum. Wenn das Magnetfeld verschwindet, kann die Integration ausgeführt werden mittels Whittaker-Funktionen. Diese können mit Funktionen des parabolischen Zylinders approximiert werden, sofern die vom Feld den Elektronen übertragene Energie groß gegen die thermische Energie ist. Im umgekehrten Grenzfall kleinen Feldeinflusses werden verschiedene Näherungen erhalten, je nachdem ob die Pulsation groß oder klein gegen die Stoßzahl ist. Die integrierte Energie-Verteilungsfunktion wird für den ersten Grenzfall berechnet. Mit Magnetfeld werden die Berechnungen schwierig, Näherungen sind für spezielle Bedingungen möglich, insbesondere im longitudinalen und transversalen Fall. Diagramme für Elektronen-Energie, DK und Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der relativen Frequenz ω/ν_0 (ν_0 feldfreie Stoßzahl mit Neutralteilchen) zeigen Resonanzerscheinungen bei der Gyrofrequenz. Schließlich wird die (in die übliche Dispersionsformel näherungsweise einzusetzende) effektive Stoßzahl bestimmt, auch für kleines ω/ν_0 , getrennt für Stöße mit Neutralteilchen und mit Ionen. Beim Ionenstoß tritt eine große Zunahme der Brechungswirkung und Leitfähigkeit bei kleinen ω/ν_0 -Werten auf.

K. Rawer.

Poincelot, Paul: Influence des choes sur la réflexion ionosphérique. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 2031—2033 (1957).

Die schon von Gans eingeführte Lösung der Wellengleichung mit Hankelschen Funktionen im Falle linearer Variation der DK kann auch mit komplexer DK, also mit Absorption noch durchgeführt werden.

K. Rawer.

Poincelot, Paul: Sur la réflexion ionosphérique en présence de choes. C. r. Acad. Sci., Paris **244**, 2298—2299 (1957).

Der schon von Elias (1931) gelöste Fall der Ausbreitung bei exponentieller Höhenvariation der Dielektrizitätskonstanten wird mit Stoßdämpfung behandelt.

K. Rawer.

Longuet-Higgins, M. S.: A statistical distribution arising in the study of the ionosphere. Proc. Phys. Soc., Sect. B **70**, 559—565 (1957).

Das Problem von Briggs und Page (The Physics of the Ionosphere, London 1955, 119—122) läuft mathematisch darauf hinaus, für eine stationäre, aleatorische Funktion f die statistische Verteilung von $\eta = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \bigg/ \frac{\partial f^2}{\partial x^2}$ zu berechnen, jedoch unter der Nebenbedingung $\partial f / \partial x = 0$. Letztere wird dadurch berücksichtigt, daß bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichte um jede Nullstelle von $\partial f / \partial x$ ein Intervall proportional $\partial^2 f / \partial x^2$ berücksichtigt wird. Unter der Voraussetzung statistisch unabhängiger und normaler Verteilung der Ableitungen verschiedener Ordnung wird zunächst die Verteilung der Wertepaare $(\partial^2 f / \partial x^2, \partial^2 f / \partial x \partial y)$ berechnet. Daraus folgt die Verteilung von η , $p(\eta)$, durch Integration über alle Fälle, die jeweils dasselbe η geben. Allgemein wird $p(\eta) = \frac{1}{2} A^2 / [A^2 + (\eta - B)^2]^{3/2}$; speziell im isotropen Fall ist $A^2 = \frac{1}{3}$ und $B = 0$, während in dem von Briggs und Page behandelten Fall $A^2 = \frac{2}{3}$, $B = 0$ war.

K. Rawer.

Boudouris, G.: Une nouvelle solution du problème de propagation au-dessus d'une terre plane. Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. **5**, 71—91 (1957).

Im Meter- und Dekameter-Wellenbereich überwiegt der Realteil der komplexen Dielektrizitätskonstante ε'_r und gilt $|\varepsilon'_r| \gg 1$. Deshalb können Näherungsmethoden erfolgreich benutzt werden. In erster Näherung wird $1/\varepsilon'_r$ vernachlässigt. Setzt man die Welle im Luftraum lokal als eben an, so läuft die zugehörige Welle in der Erde $\exp(-i k_0 z \cdot \sqrt{\varepsilon'_r})$ senkrecht nach unten und ist gedämpft. In der zweiten Näherung werden Glieder mit $1/\varepsilon'_r$ beachtet; sukzessive Approximation der Lösungen ergibt nun: $\exp(-i k_0 z \sqrt{\varepsilon'_r + \cos^2 \psi})$, ψ Einfallswinkel im Luftraum gegen Horizontale. Diese Näherungen werden benutzt, um in den strengen Randbedingungen an der Erde den Gradienten der Vertikalfeldstärke einzuführen. Mit den so erhaltenen genäherten Randbedingungen wird eine Lösung der Wellengleichung des Hertzschen Vektors $\Pi_0 + \Pi_1$ (Π_0 Lösung im leeren Raum) gesucht. Das gelingt mit Hilfe der Hilfsfunktion $\mathfrak{P} = (\partial \Pi / \partial z) + (i k_0 / \sqrt{\varepsilon'_r}) \cdot \Pi$, die selbst der Wellengleichung genügt und bei der genäherten Bedingung auf der Erdoberfläche verschwindet. Deshalb kann \mathfrak{P} durch Spiegelung der Quelle gefunden werden, Π folgt dann durch Integration. Die Lösung für Π enthält die direkte Welle Π_0 , die reflektierte und einen dritten Term, der die Abweichung von der geometrischen Optik wiedergibt. Letzterer verschwindet für $\varepsilon'_r \rightarrow \infty$. Wird er mit dem zweiten kombiniert, so ist damit ein effektiver Reflexionskoeffizient definiert, der allerdings mit dem ebenen Wellen nicht ganz übereinstimmt. In zweiter Näherung wird so die Weyl-van der Polsche Formel erhalten. Die Feldberechnung aus dem Hertzschen Vektor wird bei Norton (1926) übernommen.

K. Rawer.

Wait, James R.: Induction by an oscillating magnetic dipole over a two layer ground. Appl. sci. Research, B **7**, 73—86 (1958).

Fortsetzung früherer Arbeiten des Verf. (vgl. dieses Zbl. **47**, 240; **50**, 419; **51**, 432).

Rösner, Ortwin: Die Ausbreitung elektromagnetischer $TE-(H)$ -Wellen, erzeugt durch eine horizontale, stromdurchflossene Leiterschleife, in dem Hohlraum zwischen zwei konzentrischen Kugeln. Z. angew. Phys. **9**, 448—453 (1957).

In Analogie zu W. O. Schumanns Arbeiten über die transversale H -Welle wird die transversale E -Welle im Hohlraum untersucht. Die Eigenschwingungen und deren

Dämpfung durch den Skin-Effekt werden berechnet, schließlich noch die Ausbreitung erzwungener Schwingungen im Hohlraum (unter Benutzung der Watsonschen Transformation). *K. Rawer.*

Gervasio, Vincenzo: Sul calcolo della capacità di una linea a striscie. *Atti Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., Ann. 245°, Rend. XI. Ser. 4, Nr. 1, 167—188 (1957).*

Das Problem, die elektrostatische Kapazität eines Systems von zwei streifenförmigen parallelen Leitern zu bestimmen, wird durch Heranziehung der Theorie der elliptischen Funktionen in einer zur numerischen Rechnung geeigneten Form behandelt. *G. Cimmino.*

Jones, D. S.: Approximate methods in high-frequency scattering. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A 239, 338—348 (1957).*

Der Streukoeffizient eines schwach gekrümmten zylindrischen Objektes wird überwiegend durch die Erregung auf dem Objekt in einer schmalen Umgebung der geometrischen Glanzstellen bestimmt. Eine Lösung der Wellengleichung, welche in diesem Gebiet mit der Primärwelle zusammen die Randbedingung erfüllt, läßt sich in erster Näherung sofort explizit angeben, in zweiter Näherung mittels der Fouriertransformation bestimmen. Die hieraus errechneten Korrekturen zu den geometrisch optischen Streukoeffizienten des schallharten und schallweichen Kreiszyinders stimmen mit den exakten Formeln von Rubinow und Wu in erster Näherung bis auf 7%, in der zweiten Näherung exakt überein. *Walter Franz.*

Jones, D. S.: High-frequency scattering of electromagnetic waves. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A 240, 206—213 (1957).*

Verf. hat kürzlich (siehe vorstehendes Referat) ein Verfahren angegeben, welches für einen beliebigen Zylinder, dessen Krümmungsradius groß gegen die Wellenlänge ist, die Korrektur des Streuquerschnitts proportional $(\text{Wellenlänge})^{2/3}$ zu berechnen gestattet. Unter der Annahme, daß die Schattengrenze eines beliebigen Körpers in dieser Näherung genau so streut wie der oskulierende Zylinder, wird nunmehr auch der Streuquerschnitt beliebiger schallharter, schallweicher oder ideal leitender Körper berechnet. Die Streuquerschnitte für die Kugeln stimmen genau mit den von Rubinow und Wu (dies. Zbl. 71, 216) angegebenen überein. Für einen beliebigen Rotationskörper, der längs seiner Achse bestrahlt wird, ergibt sich der Streuquerschnitt durch geringfügige Modifikation der Formel für die Kugel. Für den Streuquerschnitt des Sphäroids, welches senkrecht zur Rotationsachse bestrahlt wird, gibt Verf. Formeln (hypergeometrische Funktionen) und Tabellen. *Walter Franz.*

Toraldo di Francia, Giuliano: Sul momento di quantità di moto trasportato da un'onda elastica trasversale in un solido omogeneo isotropo. *Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 12, 183—186 (1957).*

Der Ausdruck für den Drehimpuls einer ebenen Transversalwelle in einem homogenen elastischen Medium wird hergeleitet. Es zeigt sich, daß, wie bei elektromagnetischen Wellen, der Drehimpuls höchstens gleich Energie/Kreisfrequenz sein kann. *Walter Franz.*

Toraldo di Francia, Giuliano: Momento di quantità di moto ceduto da un'onda elettromagnetica a un piccolo ellissoide, avente conduttività unidirezionale. *Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 11, 332—343 (1956).*

Eine elliptisch polarisierte Welle übt auf ein beugendes Objekt, welches nur in einer Richtung (und in dieser ideal) elektrisch leitend ist, ein mechanisches Drehmoment aus. Die Größe dieses Momentes wurde früher (dies. Zbl. 71, 215) für eine sehr kleine Kreisscheibe berechnet. In der vorliegenden Arbeit wird die Beugung am Ellipsoid behandelt. Das Objekt wird als klein gegen die Wellenlänge vorausgesetzt und sein Querschnitt für Drehmomentabsorption berechnet. Er steht mit dem Streuquerschnitt in einem einfachen Zusammenhang, welcher nur durch die geometrische Lage der Polarisationsellipse relativ zur Richtung der Leitfähigkeit gegeben

wird. Der Streuquerschnitt ist, wie stets bei kleinen Objekten, proportional zur vierten Potenz der Wellenzahl; von den Achsenverhältnissen des Ellipsoids hängt er mittels elliptischer Integrale ab.

Walter Franz.

Toraldo di Francia, G.: On a macroscopic measurement of the spin of electromagnetic radiation. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 6, 150—167 (1957).

Kürzlich (s. vorstehendes Referat) hat Verf. den Absorptionsquerschnitt einer sehr kleinen Kreisscheibe von gerichteter Leitfähigkeit für das Drehmoment einer elektromagnetischen Welle angegeben. Diese Rechnung wird in der vorliegenden Note verfeinert, indem mehrere Glieder der Entwicklung nach Potenzen des Scheibenradius berechnet werden. Die Diskussion der Ergebnisse zeigt, daß bei der Messung des Drehmoments einer zirkular polarisierten elektromagnetischen Welle mittels der gerichtet leitenden Kreisscheibe die Zirkularität der Welle sehr genau eingehalten werden muß, wenn nicht beträchtliche Abweichungen auftreten sollen. Der Streuquerschnitt ergibt sich merkwürdigerweise für den einseitig leitenden Schirm größer als für den allseitig leitenden.

Walter Franz.

Karp, S. N. and W. Elwyn Williams: Equivalence relations in diffraction theory. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 53, 683—690 (1957).

In Verallgemeinerung des Babinetschen Prinzips werden aus Symmetriebetrachtungen Beziehungen zwischen den Lösungen verschiedener Beugungsprobleme hergeleitet. Speziell wird die Beugung an einem Streifengitter, bei welchem die Streifenbreite gleich dem Zwischenraum ist, auf die Wellenausbreitung in einem Parallelplattenwellenleiter mit Blende zurückgeführt; weiterhin die Beugung an einer unendlichen Halbebene, welche durch einen ebenen Streifen zu einem T -Profil ergänzt wird, auf die Beugung auf der Halbebene und am Streifen.

Walter Franz.

Keller, Joseph B., Robert M. Lewis and Bernard D. Seckler: Diffraction by an aperture. II. *J. appl. Phys.* 28, 570—579 (1957).

Kürzlich wurde von J. B. Keller (dies. Zbl. 77, 412) eine neue Methode zur Behandlung der Beugung an einer Öffnung in einem dünnen Schirm angegeben. In der vorliegenden Arbeit wird diese Methode mit anderen bisher üblichen Methoden verglichen, nämlich mit der von Kirchhoff sowie von Bouwkamp und von Braunk. Dabei stellen die Verff. fest, daß mit Hilfe der einfachen Strahlenkonstruktion nach Keller, die gebeugte Strahlen und Beugungskoeffizienten verwendet, dasselbe Resultat erhalten wird wie bei der Lösung der bei üblichen Theorien auftretenden Doppelintegrale für den Fall kleiner Wellenlängen. Die Kirchhoffsche Theorie und ihre Modifikationen führen (außer für die Einfallrichtung) zu qualitativ korrekten, quantitativ jedoch inkorrekten Lösungen für das Beugungsfeld. Die Braunkesche Methode liefert, einschließlich der Beugungskoeffizienten, dasselbe Ergebnis wie die Strahlenmethode nach Keller.

G. Helms.

Hochstadt, Harry: Asymptotic formulas for diffraction by parabolic surfaces. *Commun. pure appl. Math.* 10, 311—329 (1957).

Aus den von H. Buchholz (Die konfluente hypergeometrische Funktion, dies. Zbl. 50, 74) angegebenen Formeln für die Greenschen Funktionen des Paraboloids und des Parabolzylinders werden asymptotische Formeln für die Beugung an diesen Flächen hergeleitet.

Walter Franz.

Phan, Van-Loc: Diffraction des ondes lumineuses par une fente indéfinie à bords parallèles et par un demi-plan. *C. r. Acad. Sci., Paris* 244, 1470—1473 (1957).

Die Formel von Rubinowicz für die von einem beugenden Rand ausgehende Beugungswelle (der Kirchhoffschen Theorie) wird auf den unendlich langen Spalt im schwarzen Schirm angewandt; läßt man den einen Spaltrand ins Unendliche rücken, ergibt sich die von Rubinowicz angegebene Formel für die Halbebene.

Walter Franz.

Williams, W. E.: A note on the diffraction of a dipole field by a half-plane. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 10, 210—213 (1957).

Das Problem der Beugung einer Dipolwelle an der ideal leitenden Halbebene wird in sehr kurzer und einfacher Weise gelöst. Zunächst wird aus den Lösungen des skalaren Halbebenenproblems ein magnetisches Feld gewonnen, welches einer Dipolwelle entspricht und die Randbedingungen erfüllt, aber nicht divergenzfrei und im übrigen in den Kanten endlich ist. Durch Hinzufügen von geeigneten Lösungen der homogenen Wellengleichung wird die Divergenzfreiheit hergestellt; dieser Zusatz liefert an den Kanten die richtige, mit der Kantenbedingung verträgliche, Singularität wie (Abstand)^{-1/2}.
Walter Franz.

Heins, Albert E. and Samuel Silver: Comments on the treatment of diffraction of plane waves: Addendum to „The edge conditions and field representation theorems in the theory of electromagnetic diffraction“. Proc. Cambridge philos. Soc. 54, 131—133 (1958).

Diskussion eines Einwandes von Bouwkamp gegen einen in einer Arbeit der Verf. (dies. Zbl. 64, 213) vorgenommenen Grenzübergang.
Walter Franz.

Goodbody, A. M.: The influence of condenser aperture on the resolution of a pair of parallel lines. Proc. Phys. Soc., Sect. B 70, 361—368 (1957).

Berechnung der Lichtverteilung im Bilde zweier als Objekt wirkender paralleler Linien (Spalte), die durch einen Kondensor beleuchtet werden, dessen numerische Apertur ein vorgegebenes Vielfaches (das σ -fache) von der des abbildenden Objektivs ist. Die sich ergebende Intensitätsverteilung im Bilde der beiden Spalte wird für verschiedene Werte von σ sowie in Abhängigkeit vom Abstand beider Spalte kurvenmäßig dargestellt. Das Auflösungsvermögen des abbildenden Systems wird durch $\xi = K\lambda/(N.A.)$ dargestellt, worin sich K in Abhängigkeit von σ aus einer vom Verf. gegebenen Kurve ablesen läßt. $N.A.$ ist die numerische Apertur des abbildenden Systems.
J. Picht.

Douglas, D. G.: On the use of the optical path concept in the study of spherical surfaces. Amer. J. Phys. 26, 14—16 (1958).

Es wird am Beispiel der sphärischen Aberration sowie des Astigmatismus einer brechenden, zwei Medien von verschiedenem Brechungsindex trennenden Kugelfläche gezeigt, daß es didaktisch nützlich ist, die elementaren optischen Abbildungsgesetze mit Benutzung des Fermatschen Prinzips vom kürzesten Lichtweg abzuleiten. Dabei wird auch auf den Begriff „Bild“ und seine Definition näher eingegangen.
J. Picht.

Noteboom, E.: Die optischen Verhältnisse beim Brillenglas, beim Haftglas und bei der Fernrohrbrille im paraxialen Raum. Jenaer Jahrbuch 1957, 15—26 (1958).

Die im Titel der Arbeit angegebenen optischen Augenhilfen werden als zweigliedrige optische Systeme aufgefaßt und Vergrößerung, erforderlicher Akkomodationsaufwand sowie Akkomodationserfolg — d. h.: erreichbare Objektnähe — bei Benutzung jener Sehhilfen formelmäßig und teilweise auch graphisch behandelt. (Etwas irreführend ist gelegentlich die gewählte Bezeichnungsweise oder Druckart. So ist z. B. eR ein Produkt aus e und R , während Re den Fernpunkt des Auges bezeichnet. Entsprechend ist Ak die Bezeichnung für: Akkomodation, nicht aber Produkt aus zwei Größen A und k .)
J. Picht.

Jänich, Ernst: Zur Theorie der Keildistanzmesser unter besonderer Berücksichtigung eines neuen Distanzmeßkeils des VEB Carl Zeiss Jena. Jenaer Jahrbuch 1956, 140—215 (1957) (Preis: geb. DM 20,—).

Eingehende theoretische Untersuchungen über den Keildistanzmesser, insbesondere über die bei seiner Benutzung erforderliche Reduktion der Ablesungen der Teilungen. Hierfür werden geeignete Reduktionsformeln entwickelt, wobei zwischen rechnerischer und parallaktischer Reduktion unterschieden wird. Es zeigt sich, daß bei den erforderlichen Reihenentwicklungen weder die zweiten Glieder selbst

noch der Unterschied der beiden Reduktionsarten vernachlässigt werden darf. Aus den umfangreichen und sehr eingehenden Untersuchungen ergeben sich gewisse Forderungen für die praktische Gestaltung der Index- und Teilungsmarken. *J. Picht.*

Riesenberg, H.: *Das Spiegelmikroskop und seine Anwendungen.* Jenaer Jahrbuch 1956, 30—78 (1957) (Preis: geb. DM 20,—).

Der Verf. stellt sich die Aufgabe, die Beantwortung der Frage zu erleichtern, welches Spiegelobjektiv für einen vorgegebenen Zweck geeignet ist und wie es in einem Spiegelmikroskop zu verwenden ist, um in der praktischen Benutzung möglichst optimale Resultate zu erhalten. Ferner werden die verschiedenen Anwendungen der Spiegelmikroskope näher betrachtet. Besonders betrachtet Verf. die Zweispiegelsysteme des Schwarzschildschen Typs, und zwar sowohl die konzentrischen als auch die nichtkonzentrischen sowie auch das katadioptrische Zweispiegelsystem. Näher wird — dem Thema der Arbeit entsprechend — auf die Benutzung von Spiegelobjektiven in Mikroskopen eingegangen. Die Wirkung der (ja hierbei unvermeidlichen) Zentralabschattung wird — formelmäßig und graphisch — für Abbildung von Selbst- und Nichtselbstleuchtern diskutiert. Auf die Anwendungen des Spiegelmikroskops im Ultraviolett sowie im Ultraroten wird kurz eingegangen. *J. Picht.*

Kadomtcev (Kadomtsev), B. B.: *The invariance principle for a homogeneous medium of arbitrary shape.* Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 831—834 (1957) [Russisch].

Ein homogenes Medium, in dem Streuung entweder von Licht oder von Neutronen stattfindet, sei von der konvexen Oberfläche S begrenzt. Durch eine differentielle Verschiebung dieses Mediums kann man ein Variationsproblem erhalten, dessen Lösung es gestattet, einen Satz von Gleichungen anzugeben, die keine inneren Punkte des von S eingeschlossenen Gebietes enthalten. Dies entspricht einem Invarianzprinzip in der Theorie der Streuung, wie es für den Halbraum von V. A. Abartsumian und für eine ebene Schicht von S. Chandrasekhar bereits formuliert wurde. *G. Wallis.*

Preisendorfer, R. W.: *A mathematical foundation for radiative transfer theory.* J. Math. Mech. 6, 685—730 (1957).

Die im Titel formulierte Aufgabe wird unter Verwendung der Mittel der Maßtheorie und der Funktionalanalysis in axiomatischer Weise durchgeführt. In dieser abstrakten Darstellung wird die Theorie völlig unabhängig davon, ob das Photon oder das Neutron Träger der Strahlungsenergie ist, deren Transport sich in einer Folge von Markoff-Prozessen vollzieht. Die spezifische Strahlungsintensität, welche der bekannten Integro-Differentialgleichung zu genügen hat, wird hier als in einem 5-dimensionalen Euklidischen Raum definiert aufgefaßt. Die maßtheoretische Behandlung führt auf eine Invariante längs der Ausbreitungslinie, die mit der fundamentalen Straubelschen Invariante eng zusammenhängt. *G. Wallis.*

Biberman, L. M. and B. A. Veklenko: *Application of the theory of random processes to radiation transfer phenomena.* Soviet Phys., JETP 4, 440—442 (1957), Übersetz. von Žurn. eksper. teor. Fiz. 31, 341—342 (1956).

Ausgehend von einer verallgemeinerten Markoff-Gleichung für die Übergangsfunktion $f_{v_1}^{v_2}(1; 2)$ wird die erste Integro-Differentialgleichung von Kolmogoroff-Feller aufgestellt. (Die Funktion selbst steht in enger Beziehung zu der von V. A. Ambartsumian und V. V. Sobolev benutzten.) Die Lösung des Problems führt zum Beweis bestimmter Symmetrieeigenschaften dieser Funktion, welche die Rolle einer Wahrscheinlichkeitsdichte spielt. Die Symmetrieeigenschaften sind äquivalent denen der Greenschen Funktion für die Strahlungstransport-Gleichung (s. nachfolgendes Referat). Sie werden als optisches Reziprozitätsprinzip formuliert. *G. Wallis.*

Kadomeev (Kadomtsev), B. B.: The invariance principle for a homogeneous medium of any geometric form. *Soviet Phys., Doklady* **2**, 71—75 (1957), Übersetzung von *Doklady Akad. Nauk SSSR* **112**, 831—834 (1957).

Kadomeev (Kadomtsev), B. B.: On the Green's function in the theory of radiant energy transfer. *Soviet Phys., Doklady* **2**, 139—142 (1958), Übersetzung von *Doklady Akad. Nauk SSSR* **113**, 541—543 (1957).

Es wird gezeigt, daß die Greensche Funktion der Strahlungs-Transportgleichung gewisse Symmetrieeigenschaften besitzt, die man als optisches Reziprozitätstheorem und als Theorem der optischen Umkehrbarkeit formulieren kann. Die Symmetrieeigenschaften der Greenschen Funktion sind äquivalent denen der Übergangsfunktion $f_{v_1}^{v_2}(1; 2)$ bei Biberman und Veklenko (s. vorstehend. Referat), wo die Symmetrieeigenschaften mit Hilfe der Theorie der Markoff-Ketten (1. Integro-Differentialgleichung von Kolmogoroff-Feller) nachgewiesen werden. *G. Wallis.*

Roussopoulos, Paul N.: Sur l'interaction entre un gaz moléculaire et le rayonnement. *C. r. Acad. Sci., Paris* **246**, 899—901 (1958).

Dixon, W. R.: Angular energy flux of secondary gamma-rays in matter: Small-angle scattering from a point isotropic source. *Canadian J. Phys.* **36**, 419—430 (1958).

The distribution in energy and angle of secondary gamma-rays in matter is studied, with particular reference to small angles and to energies near the incident energy. The "angular energy flux" arising from a point isotropic source in matter is calculated, using small-angle approximations, and compared with experimental data obtained for a Cs^{137} source in concrete.

Aus der Zusammenfassg. des Autors.

Stephen, M. J.: Double refraction phenomena in quantum field theory. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **54**, 81—88 (1958).

Einige Phänomene der Doppelbrechung — wie z. B. optische Aktivität, Faradaysche Drehung, Kerr-Effekt, usw. — werden als Streuungseffekte der Photonen aufgefaßt und mit der Methode der Quantentheorie der Wellenfelder behandelt. Es werden die Wirkungsquerschnitte der Streuung von Photonen an Atomen oder Molekülen abgeleitet und auf Grund dieser Resultate — mit Hilfe des sog. Stokeschen Operators — die bekannten Formeln der Quantentheorie, sowie der Erwartungswert des klassischen Stokesschen Parameters berechnet. Die vom Verf. vorgeschlagene Methode hat den Vorteil, daß solche phänomenologischen Größen, wie z. B. der Brechungsindex oder die Polarisierung des Mediums nicht benützt werden und dadurch wird die Aufmerksamkeit direkt auf die im Laufe der Experimente unmittelbar meßbaren Größen gerichtet, so daß diese Untersuchung des Verf. als sehr bemerkenswert bezeichnet werden kann.

J. I. Horváth.

Grümm, H. und H. Spurny: Beispiele streng berechenbarer Ionen- und Elektronenbahnen im ebenen elektrostatischen Feld. *Acta phys. Austr.* **11**, 11—22 (1957).

Verff. berechnen tatsächlich durchlaufene Bahnen für eine Reihe von ebenen elektrostatischen Feldern, die die Eigenschaft besitzen, daß sich für sie die Berechnungen streng durchführen lassen, und diskutieren die charakteristischen Eigenschaften jener Bahnen. Im einzelnen werden folgende Felder betrachtet: 1. $2 \text{ em} \cdot \varphi(x) = a + bx$; 2. $2 \text{ em} \cdot \varphi(x, y) = a^2(x^2 - y^2) + b$; 3. $2 \text{ em} \cdot \varphi(x, y) = \Phi(x) - \frac{1}{2} \Phi'' \cdot y^2$; 4. $2 \text{ em} \cdot \varphi(u, v) = a(u^2 - v^2) + b + (cu + vd)/(u^2 + v^2)$ mit $u = \sqrt{r + x}$ bzw. $v = \sqrt{r - x}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, so daß hier u und v Koordinaten des parabolischen Zylinders sind.

J. Picht.

Durandau, Pierre, Charles Fert et Paul Tardieu: Les lentilles électroniques magnétiques dissymétriques. *C. r. Acad. Sci., Paris* **246**, 79—81 (1958).

Brennweiten, Brennpunktslagen und Farbabweichungen ungesättigter unsymmetrischer Magnetlinsen werden als Funktion der beiden Parameter $(D_1 + D_2)/2S$ und D_1/D_2 (D_1, D_2 Durchmesser der Polschuhbohrungen, S Polschuhabstand) dargestellt.

W. Glaser.

König, L. A. und H. Hintenberger: Über die Abbildungsfehler von beliebig begrenzten homogenen magnetischen Sektorenfeldern. *Z. Naturforsch.* 12a, 377—384 (1957).

Einleitend werden die formelmäßigen Ergebnisse einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 71, 417) beider Verff. mitgeteilt, die sich auf die Strahlablenkung in einem Sektorfeld mit gerader Polschuhbegrenzung bezieht. Die Verff. teilen mit, daß die angegebenen, von drei Winkelvariablen $\varphi, \varepsilon', \varepsilon''$ abhängigen 18 Hilfsgrößen $\mu^* \dots$ und $\nu^* \dots$ von ihnen für $30^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ in Intervallen von 10° und für ε' und ε'' von -40° bis $+40^\circ$ in Intervallen von 10° berechnet wurden und die Ergebnisse für Interessenten in Tabellenform zur Verfügung stehen. In vorliegender Arbeit verallgemeinern die Verff. ihre früheren Untersuchungen auf den Fall gekrümmter Feldbegrenzung des Ablenkfeldes und Berücksichtigung einer Objektausdehnung. Der von ihnen erhaltene Ausdruck für die Strahlabweichung wird von den Verff. eingehend diskutiert und seine einzelnen Teilmglieder den verschiedenen möglichen Abbildungsfehlern zugeordnet. Es werden Möglichkeiten zur Korrektur der Bildfehler und andere spezielle Fragen diskutiert.

J. Picht.

Boerboom, A. J. H.: Theory of the aberrations in the focusing properties of a magnetic field with one plane of symmetry. *Appl. sci. Research*, B 7, 52—62 (1958).

Liegt die Hauptbahn eines Bündels geladener Teilchen in der Symmetrieebene eines magnetischen Feldes, so lassen sich über die Abhängigkeit des Durchstoßpunktes einer Teilchenbahn durch eine zur Bahn senkrechte Registrierebene von Durchstoßpunkt und Richtung der Bahn beim Passieren einer ebenfalls zur Bahn senkrechten Ausgangsebene allein aus einer Symmetriebetrachtung einige Aussagen gewinnen: Die Abbildung einer Linie in der Ausgangsebene auf eine Linie in der Registrierebene ist möglich. Die Zahlen (nach Ansicht des Referenten nur obere Schranken für die Zahlen) der voneinander unabhängigen geometrischen Aberrationen 2. Ordnung (10) und chromatischen Aberrationen (5) folgen aus derselben Symmetriebetrachtung. Der Einfluß der verschiedenen Aberrationen auf die Intensitätsverteilung in den Spektrallinien bei Verwendung als Massenspektrometer wird berechnet.

F. Lenz.

Henry, Irvin G.: Radiation effects on free oscillations in synchrotrons. *Phys. Review*, II. Ser. 106, 1057—1061 (1957).

Die Rückwirkung der elektromagnetischen Ausstrahlung eines bewegten Elektrons in einem Magnetfeld bei hoher Energie auf seine Bahn in einem Synchrotron wird untersucht. Mit der Annahme einer über die Bahn verteilten Energiezufuhr, die die Energieverluste der Strahlung so kompensiert, daß im Mittel die Sollbahn des Teilchens erhalten bleibt, gelangt der Verf. mittels einer klassischen Rechnung zu einer Dämpfung der Betatronschwingung in vertikaler und horizontaler Richtung für das schwachfokussierende Synchrotron. Durch Einsetzen der für die starke Fokussierung üblichen großen Feldgradienten $n = (\varrho/B) \cdot \partial B / \partial r$ (ϱ = Krümmungsradius des Sollkreises) in die Ergebnisse, ergibt sich wegen eines Faktors $n/1$ n im Exponenten eine Entdämpfung in horizontaler Richtung für diese Maschinen ohne Berücksichtigung der speziellen Struktur. Im zweiten Abschnitt wird die Aufblähung des Strahles, die durch Berücksichtigung der statistisch erfolgenden Quanteneffekte verursacht wird, mit Hilfe eines inhomogenen Gliedes in Form einer δ -Funktion, die ein sprungweises Schwanken der Sollbahn um den Nullwert bedeutet, berechnet. Der Berechnung der mittleren Energieschwankungen wird das Schwingersche Strahlungsspektrum zugrunde gelegt.

C. Passow.

Courant, E. D. and H. S. Snyder: Theory of the alternating-gradient synchrotron. *Ann. of Phys.* 3, 1—48 (1958).

In der Arbeit wird die lineare Theorie des von den Verff. 1952 vorgeschlagenen Synchrotrons mit alternierenden Feldgradienten zusammenfassend dargestellt. Die Betatronschwingungen der Teilchen um die vorgesehene Sollbahn in einer derartigen

Maschine ergeben sich als Lösungen einer Hillschen Differentialgleichung, da der stückweise konstante Feldgradient entlang der Bahn zwischen großen positiven und negativen Werten periodisch schwankt. Das Verhalten der Lösungen einer Hillschen Differentialgleichung wird eingehend studiert. Ihre Darstellung erfolgt als Produkt einer Amplituden- und Phasenfunktion; diese errechnen sich aus Matrizen, die aus den beiden Lösungen und ihren Ableitungen in den Stücken mit den jeweils konstanten Feldgradienten aufgebaut werden. Die Maschinenparameter müssen so gewählt werden, daß sich stabile Lösungen ergeben. Weiter wird der Einfluß von Feld- und Impulsfehlern die als Inhomogenitäten in die Gleichungen eingehen sowie Fehler im Feldgradienten, die eine Störung in der Periodizität bedeuten, untersucht. Während die einen eine Verschiebung der Sollbahn ergeben, wird durch die anderen der Bereich für stabile Lösungen eingeschränkt. Des weiteren wird die Änderung der Stabilitätsverhältnisse durch Berücksichtigung der Kopplungsglieder zwischen der vertikalen und der horizontalen Richtung untersucht. Die durch die starke Fokussierung bedingte geringe Abweichung der Bahn eines Teilchens mit einem Energiefehler kann eine Instabilität der Phasenschwingungen bei bestimmten Maschinen beim Erreichen der sogenannten Übergangsenergie mit sich bringen. Die Ankopplung der Teilchen vor und nach Durchschreiten dieser Energie an die Sollphase der Hochfrequenzspannung sowie das Verhalten während des Durchlaufens dieser Energie werden am Schluß behandelt.

C. Passow.

Coleman, Paul D.: Theory of the rebatron — a relativistic electron bunching accelerator for use in megavolt electronics. J. appl. Phys. 28, 927—935 (1957).

Um das Wellengebiet zwischen 0,1 mm (obere Grenze der Infrarot-Technik) und 3 mm (untere Grenze der Mikrowellentechnik) zu erschließen, soll der Oberwellengehalt periodischer auf Megavolt beschleunigter Elektronenbunche ausgenutzt werden. Der Oberwellengehalt wird um so größer sein, je schärfer die Elektronen in Phase und Impuls gebündelt sind, d. h. je mehr die Verteilungsfunktion der Elektronen als Funktion der Phase bzw. der Geschwindigkeit sich einer Diracschen Deltafunktion nähert. Diese Annäherung kann durch die geschickte Wahl der Betriebsparameter eines Beschleunigersystems im Gefolge eines Prebunchingsystems erreicht werden. Das Beschleunigungssystem bestehe aus einem in der TM_{010} (E_{910})-Mode betriebenen Cavity im S-Band-Bereich (3×10^9 Hz), in das die Elektronen mit einer gewissen Phasen- und Geschwindigkeitsverteilung eintreten. Diese Verteilung wird durch das Prebunchingsystem, bestehend aus einem Modulationscavity mit nachfolgendem Driftraum, so beeinflußt, daß die Austritts-Phase und -Geschwindigkeit aus dem Beschleunigungscavity in einem gewissen Bereich (ca. zwei Radian) unabhängig von der Eintrittsphase in das Modulationscavity wird. Der größere Wert ist vernünftigerweise auf die Austrittsphase zu legen. Eine mathematische Beschreibung der Strahlanpassung wird gegeben und durch Diagramme anschaulich gemacht, doch sind für eine endgültige Berechnung umfangreichere numerische Auswertungen notwendig. Ein großer Oberwellengehalt bis zur tausendsten Oberwelle kann erwartet werden, falls sich die Toleranzen, besonders die für die Phasendifferenz der beiden Cavities, einhalten lassen und die Raumladung so klein bleibt, daß sie unberücksichtigt bleiben darf.

W. Hardt.

Sokolov, A. A. and Ju. M. (Ju. M.) Loskutov: Polarization of Cerenkov radiation. Soviet Phys., JETP 5, 523—525 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 32, 630—632 (1957).

Unter Verwendung der von Sokolov und Ternov (dies. Zbl. 77, 414) entwickelten Methode wird die Polarisierung der Cerenkov-Strahlung für ein spinloses Teilchen und ein Teilchen mit dem Spin $\frac{1}{2}$ berechnet. Während die Strahlung des spinlosen Teilchens im ganzen Frequenzbereich stark polarisiert ist, führt die Existenz eines von Null verschiedenen Spins zu einer zusätzlichen unpolarisierten Strahlung.

In der Nähe der Seriegrenze, wo der polarisierte Anteil verschwindet, überwiegt der „Spinanteil“ der Strahlung.

G. Wallis.

Caprioli, Luigi: *Sull'ampiezza del segnale di un oscillatore a triodo debolmente non-lineare.* Ann. Univ. Ferrara, n. Ser. 5, 69—78 (1957) [Franzö. Zusammenfassg.].

On demontre que les procédés adoptés par les techniciens pour la calculation de l'amplitude du signal généré par un oscillateur non-linéaire à lampe triode, conduisent aux mêmes résultats que donnent, dans la première approximation, et dans l'hypothèse de faible non linéarité, les méthodes de la Mécanique non-linéaire. On étudie, ensuite, un cas particulier de quelque intérêt pratique.

Franzö. Zusammenfassg.

Zumino, Bruno: *Some questions in relativistic hydromagnetics.* Phys. Review, II. Ser. 108, 1116—1121 (1957).

Es werden die Gleichungen angegeben, die die Bewegung einer idealen relativistischen Flüssigkeit, die mit einem elektrischen Strom verbunden ist, bei Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes bestimmen. Mit Hilfe der Integralform dieser Gleichungen werden dann — entsprechend der Behandlung der hydrodynamischen Stoßwellen bei Taub (dies. Zbl. 35, 121) — die Sprungbedingungen für die hydromagnetischen Stoßwellen gewonnen. Ferner leitet der Verf. aus diesen Sprungbedingungen für den Fall schwacher Stoßwellen (d. h. in linearisierter Näherung) die Sprünge der verschiedenen physikalischen Größen und die Geschwindigkeit der hydromagnetischen Stoßwellen her. Diese Geschwindigkeit ist immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, wenn die Schallgeschwindigkeit bei Abwesenheit des elektromagnetischen Feldes kleiner als c ist.

H. Treder.

Parker, E. N.: *Newtonian development of the dynamical properties of ionized gases of low density.* Phys. Review, II. Ser. 107, 924—933 (1957).

Die Gleichungen der Magneto-Hydrodynamik werden aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen der einzelnen Partikel abgeleitet. Es ergibt sich kein Widerspruch zu den bisherigen, mehr makroskopischen Ableitungen von Schlüter, Cowling und Spitzer. In Sonderfällen (wie z. B. starke Anisotropie) ergeben sich zusätzliche Terme.

S. v. Hoerner.

Pai, Shih-I.: *Energy equation of magneto-gas dynamics.* Phys. Review, II. Ser. 105, 1424—1426 (1957).

Der Energiesatz für eine zähe, wärmeleitende und elektrisch leitende Flüssigkeit wird ohne die sonst üblichen Approximationen und Vernachlässigungen abgeleitet. Einige Approximationen werden nachträglich diskutiert. — Für die Wechselwirkung der Gasdynamik mit elektromagnetischen Feldern werden alle 8 Grundgleichungen angegeben.

S. v. Hoerner.

Westfold, K. C.: *Magnetohydrodynamic shock waves in the solar corona, with applications to bursts of radio-frequency radiation.* Philos. Mag., VIII. Ser. 2, 1287—1302 (1957).

Um eine Zuordnung zwischen dem dynamischen Verhalten von Typ II- und Typ III-Bursts und den Geschwindigkeiten von Teilchenströmen oder Stoßwellen in der Korona zu finden, werden die magnetohydrodynamischen Gleichungen für die in der Korona vorliegenden Verhältnisse gelöst, und zwar zunächst für den stationären Fall, sodann für die Ausbreitung einer kleinen Störung. Dabei ergibt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Stoßfront als Funktion des Magnetfeldes, der Teilchengeschwindigkeit und der Plasmadaten. Die Formeln werden numerisch ausgewertet und die Ergebnisse mit denen der Messungen verglichen. Es zeigt sich, daß man für Stoßfrontgeschwindigkeiten zwischen $3 \cdot 10^4$ und $2 \cdot 10^5$ km/sec Magnetfelder zwischen 150 und 1000 Gauß benötigt. Für Teilchenströme von etwa 1000 km/sec Geschwindigkeit ergeben sich für den Druckquotienten Werte in der Größenordnung von 80, für den Temperaturquotienten in der Größenordnung von 20. Für Geschwindigkeiten von nur 330 km/sec werden diese Quotienten dagegen eine Größenordnung kleiner.

G. Wallis.

Lal, Pyare and P. L. Bhatnagar: Shock relations in a Fermi-Dirac gas. *Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A* **23**, 9—15 (1957).

Die Sprungbedingungen, analog denen von Rankine-Hugoniot, werden aufgestellt und die Sprungstärke der verschiedenen Größen wird berechnet. Die Grenzfälle der schwachen und der starken Entartung lassen sich analytisch lösen, der Bereich mittlerer Entartung wird numerisch behandelt. — Beim Durchlauf durch die Stoßfront nimmt der Entartungsgrad ab.

S. v. Hoerner.

Chandrasekhar, S.: The partition of energy in hydromagnetic turbulence. *Ann. of Phys.* **2**, 615—626 (1957).

The author discusses the partition of energy between the velocity and the magnetic fields. He proceeds from the assumption that a relation of the form (*) $8\pi^{-1}\langle H^2 \rangle = k \frac{1}{2} \rho \langle u^2 \rangle$, probably exists, where ρ denotes the density, $\langle u^2 \rangle$ and $\langle H^2 \rangle$ are the mean square velocity and magnetic intensity, respectively, and k is a numerical factor and a universal constant of the order of unity. It is pointed out that in writing a relation such as (*), an universal theory of hydromagnetic turbulence must be restricted to the so-called inertial sub-range, i. e., to the range of eddy sizes which are small compared to the largest energy containing eddies but still large enough for the nonlinear exchange of energy between them to be a dominant factor. On a particular theory of stationary, homogeneous and isotropic turbulence, it is shown that in this inertial sub-range the spectra of the kinetic and magnetic energies are both Kolmogorovian: $F(k) = C_1 k^{-5/3}$, and $G(k) = C_2 k^{-5/3}$, where k denotes the wave number and C_1, C_2 are the amplitudes. The theory leads to a determinate value for the ratio of the amplitudes of the two spectra: $C_2/C_1 = 1,6265$, i. e., the energy on the magnetic field is 1,6265 times the energy in the velocity field.

Dan Gh. Ionescu.

Sawhney, M. P.: The effect of a core on the equilibrium configuration of magnetic gravitating sphere. *Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A* **22**, 377—397 (1957).

Es werden die Gleichgewichtsformen einer in ihrem eigenen Schwerfeld rotierenden Flüssigkeitsmasse untersucht, die einen zentralen, dichten Kern besitzt. Unter Berücksichtigung verschiedener Annahmen über Form und Stärke der in- und außerhalb gelegenen Magnetfelder ergeben sich abgeflachte oder längliche Rotationsellipsoide.

S. v. Hoerner.

Abbi, S. S. and R. Chandra: On the equilibrium of a small conducting liquid drop in a uniform external electric field. *Proc. nat. Inst. Sci. India, Part A* **22**, 363—368 (1957).

Die Deformation eines elektrisch leitenden Tropfens einer inkompressiblen Flüssigkeit durch den Einfluß eines äußeren elektrischen Feldes wird berechnet. Auf zwei verschiedene Weisen wird übereinstimmend die resultierende Elliptizität angegeben.

S. v. Hoerner.

Stewartson, Keith: Toroidal oscillations of a spherical mass of viscous conducting fluid in a uniform magnetic field. *Z. angew. Math. Phys.* **8**, 290—297 (1957).

In einer früheren Arbeit von Plumptre und Ferraro ergab sich ein kontinuierliches Spektrum von toroidalen Eigenschwingungen einer flüssigen Kugel unendlicher Leitfähigkeit in einem homogenen Magnetfeld. — Bei Berücksichtigung endlicher Leitfähigkeit ergibt sich jedoch ein diskretes Spektrum, das auch beim Übergang zu unendlicher Leitfähigkeit diskret bleibt, wobei sich die Schwingung auf die Symmetrieachse konzentriert, und die ganze übrige Kugel in Ruhe bleibt.

S. v. Hoerner.

Jensen, Eberhart: Radial pulsations of a cylindrical magnetic tube of force in temperature equilibrium with a plasma. *Astrophys. Norvegica* **5**, 289—297 (1957).

Es werden die radialen Eigenschwingungen eines homogenen magnetischen Zylinders untersucht, der sich im Temperaturgleichgewicht mit seiner feldfreien Umgebung befindet. Für den allgemeinen Fall $[H(r)]$ innerhalb des Zylinders] ergab

sich eine Gleichung, deren Eigenwerte für die Schwingungsperiode jedoch nur für den Fall $H = \text{const}$ gelöst werden konnten. — Eine Anwendung auf Sonnenflecken ergab Perioden von etwa 25 Minuten.

S. v. Hoerner.

Wiener, Norbert and Aurel Wintner: Random time. *Nature* **181**, 561—562 (1958).

Als Ziel der Mitteilung wird die „harmonische Analyse des einfachsten (und in einem gewissen mathematischen Sinne eindeutig definierten) Modells für die statistischen Fluktuationen der „Zeit“ selbst“ angegeben. Die Analyse wird mit Hilfe einer Autokorrelationsfunktion und unter Verwendung der Voraussetzung über die Gleichheit von Zeit- und Scharmittel durchgeführt.

G. Wallis.

Relativitätstheorie:

Dicke, R. H.: Gravitation without a principle of equivalence. Reviews modern Phys. **29**, 363—376 (1957).

Möller, C.: On the possibility of terrestrial tests of the general theory of relativity. *Nuovo Cimento, Suppl.*, X. Ser. **6**, 381—398 (1957).

Es werden zwei Möglichkeiten erörtert, um die allgemeine Relativitätstheorie durch Versuche auf der Erde nachzuprüfen: Der Einfluß von Gravitationsfeldern 1. auf den Gang atomarer Uhren, 2. auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Strahlung. Als Uhr könnte z. B. ein sog. Maser verwendet werden, bei dem die Zeiteinheit durch die Schwingungen eines in einen Hohlraum geleiteten Strahls angeregter NH_3 -Moleküle definiert wird. Verf. zeigt, daß die Theorie des absoluten Äthers zu einer täglichen Änderung der relativen Ganggeschwindigkeiten von zwei Masern mit entgegengesetzten Richtungen des Molekularstrahls führt, während nach der allgemeinen Relativitätstheorie dieser Effekt ausbleiben sollte. Weiterhin werden die Änderung der Frequenz des Masers mit der Energie der Moleküle und die relative Differenz der Ganggeschwindigkeiten zweier Maser an verschiedenen Stellen im Gravitationsfeld der Erde berechnet. Beide Effekte liegen an der Grenze der derzeitigen Meßgenauigkeit ($\approx 10^{-12}$). Mit Hilfe künstlicher Satelliten kann der zweite Effekt aber 10^3 -fach verstärkt und damit gut meßbar gemacht werden. Als günstigste Versuche vom zweiten Typ werden solche diskutiert, bei denen zwei Signale, vom gleichen Punkt ausgehend, eine geschlossene Bahn in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen. Die von der allgemeinen Relativitätstheorie vorausgesagte Zeitdifferenz in der Ankunft der beiden Signale erweist sich aber als zu klein, um mit praktisch realisierbaren Versuchsanordnungen bei der zur Zeit möglichen Genauigkeit gemessen werden zu können.

D. Geißler.

Das, Anadijiban: The artificial satellite and the relativistic red shift. *Progress theor. Phys.* **18**, 554—555 (1957).

Es werden die bereits an anderer Stelle von Winterberg, Ginsburg und Singer veröffentlichten Formeln für die Zeitdilatation künstlicher Satelliten nach der allgemeinen Relativitätstheorie abgeleitet. Im Gegensatz zu diesen Arbeiten wird das Thirring'sche Linienelement der rotierenden Erde an Stelle des Schwarzschild'schen Linienelements zugrunde gelegt. Es zeigt sich, daß der größte Einfluß der Erdrotation auf die Zeitdilatation durch denselben Ausdruck wiedergegeben wird, wie er sich bereits aus dem Schwarzschild'schen Linienelement ergibt. Darüber hinaus treten mit dem Thirring'schen Linienelement Zusatzglieder auf, die aber vernachlässigbar klein sind und sich außerhalb der Nachweisbarkeit befinden.

F. Winterberg.

Fock, V.: Three lectures on relativity theory. Reviews modern Phys. **29**, 325—333 (1957).

I. On Homogeneity, Covariance and Relativity (S. 325—327). Kritische Betrachtungen über Homogenität der Raum-Zeit-Welt, Kovarianz der Gleichungen und die Verwendung des Begriffs „Relativität“. Weiter wird gezeigt, wie es in der

allgemeinen Relativitätstheorie Koordinatensysteme gibt, ausgezeichnet durch die Bedingung $\partial g^{\mu\nu}/\partial x^\nu = 0$, die für ein isoliertes System von Massen ähnliche Eigenschaften wie Galileische Koordinaten in der speziellen Relativitätstheorie haben. — II. Some Approximate Solutions of Einstein's Equations (Motion of Rotating Bodies of Finite Size) (S. 327—330). Verf. skizziert seine Methode zur Herleitung der Bewegungsgleichungen für das astronomische Problem in der allgemeinen Relativitätstheorie und berechnet alle Komponenten $g^{\mu\nu}$ des metrischen Tensors in 2. Näherung für Gebiete mit $L \ll R \ll \lambda$, wo L die Ausdehnung der Körper, R den Abstand von und zwischen ihnen und λ die Wellenlänge der ausgesendeten Gravitationsstrahlung größenordnungsmäßig charakterisiert. — III. On Gravitational Waves from a System of Moving Bodies (S. 330—333). Verf. zeigt, daß es Lösungen der Gravitationsfeldgleichungen gibt, die Kugelwellen entsprechen, welche von einem System bewegter Körper emittiert werden (astronomisches Problem, Vortrag II), und berechnet die Werte von $g^{\mu\nu}$ in der Wellenzone ($R \sim \lambda$) sowie die in der Zeiteinheit ausgestrahlte Energie.

D. Geißler.

Infeld, Leopold: Equations of motion in general relativity theory and the action principle. Reviews modern Phys. 29, 398—411 (1957).

Verf. stellt die Bewegungsgleichungen für das astronomische Problem auf, wobei der Energie-Impuls-Tensor der Materie mit Hilfe modifizierter δ -Funktionen und ohne Druckterm dargestellt wird, und zeigt, daß die Bewegungsgleichungen unter gewissen (nicht immer erfüllten) Voraussetzungen für die $g_{\mu\nu}$ in der üblichen Weise aus einer Lagrange-Funktion herleitbar sind. Die Bewegungsgleichungen und die Lagrange-Funktion werden mit Hilfe des Approximationsverfahrens für schwaches Gravitationsfeld bis zur 2. Näherung explizit dargestellt. Verf. verallgemeinert dann die Theorie formal bis zu beliebigen Näherungen und erörtert den Einfluß der Koordinatenbedingung.

D. Geißler.

Ikeda, Mineo: On Einstein's relativistic theory of the non-symmetric field. Progress theor. Phys. 18, 154—162 (1957).

In Einstein's theory a „transposition invariance“ is postulated. This means that the equations for the non-symmetric field should remain valid under the simultaneous changes $g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\nu\mu}$ and $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \rightarrow \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$. However the author introduces field quantities with a transformation character different from that in Einstein's theory. Thus the transposition invariance becomes a consequence of the theory; yet his field equations coincide formally with those of Einstein and Strauss. *L. Infeld.*

Rosen, Nathan and Hadassah Shamir: Gravitational field of an axially symmetric system in first approximation. Reviews modern Phys. 29, 429—431 (1957).

Verff. lösen die in Kugelkoordinaten geschriebenen Einsteinschen Gleichungen für ein axialsymmetrisches Gravitationsfeld in linearer Näherung, wobei sie sich auf den Fall von Quadrupolstrahlung mit harmonischer Zeitabhängigkeit beschränken. Der dabei zunächst unbestimmt bleibende Proportionalitätsfaktor wird dann mit der Stärke der Quelle in Zusammenhang gebracht, die durch zwei sinusförmig auf der z -Achse schwingende Massenpunkte idealisiert wird. Der für die gesamte pro Zeiteinheit emittierte Energie berechnete Wert stimmt mit dem anderer Autoren überein.

D. Geißler.

Weber, Joseph and John A. Wheeler: Reality of the cylindrical gravitational waves of Einstein and Rosen. Reviews modern Phys. 29, 509—515 (1957).

Verff. finden unter Verwendung der Metrik von Einstein und Rosen wellenpaketartige Lösungen der Gravitationsfeldgleichungen, zeigen das Verschwinden der Energiedichte des Gravitationsfeldes und diskutieren die Möglichkeit, durch Benutzung von toroidförmigen statt zylindrischen Wellen eine Gesamtenergie (Gravitation + Materie) zu definieren. Weiter wird der Riemannsche Krümmungstensor berechnet und die Reaktion eines Probeteilchens beim Passieren zylindrischer Gravitationswellen behandelt.

D. Geißler.

Lichnerowicz, André: Sur les ondes et radiations gravitationnelles. C. r. Acad. Sci., Paris **246**, 893—896 (1958).

In der fünfdimensionalen unitären Feldtheorie sind die Sprünge der ersten Ableitungen der elektromagnetischen Feldstärke äquivalent den Sprüngen eines Teils des fünfdimensionalen Krümmungstensors. Die Eigenschaften dieser Sprünge und somit die physikalischen Eigenschaften der ihnen entsprechenden Stoßwellen ergeben sich durch Sprungbildung aus der verallgemeinerten Einsteinschen Feldgleichung $\overset{5}{R}_{\mu\nu} = 0$, aus der insbesondere folgt, daß (wie in der allgemeinen Relativitätstheorie) nicht-forttransformierbare Sprünge nur an Nullflächen möglich sind. Werden geladene Partikel von elektromagnetischen Stoßwellen überstrichen, so ergibt sich eine Ablenkung ihrer Trajektorien entsprechend der von Pirani (dies. Zbl. **77**, 419) aufgezeigten Ablenkung nach Überstreichen durch eine Stoßwelle des Gravitationsfeldes.

H. Treder.

●**Hlavatý, Václav:** Geometry of Einstein's unified field theory. Groningen: P. Noordhoff Ltd. 1957. XXXII, 341 p.

Das Buch ist eine umfassende Darstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie mit nichtsymmetrischem $g_{\mu\nu}$. Dabei ist das Hauptgewicht auf die durch die zahlreichen eigenen Arbeiten des Verf. wesentlich geförderte Entwicklung der Geometrie des dieser Theorie zugrunde liegenden Raumes gelegt. Das 1. Kapitel enthält die Untersuchungen der algebraischen Eigenschaften des Fundamentaltensors $g_{\mu\nu}$, wobei die vom Verf. in seinen früheren Arbeiten erkannte Notwendigkeit der Unterscheidung von drei Klassen der $g_{\mu\nu}$ eine wesentliche Rolle spielt. Im 2. und 3. Kapitel wird die durch die Einsteinsche Gleichung $g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} - g_{\mu\alpha} \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha} = 0$ definierte nichtsymmetrische Affinität $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ allgemein untersucht. Die Auflösung dieser Gleichung nach dem $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, die zunächst von M. A. Tonnelat gegeben wurde, ist hier in durchsichtiger Weise durchgeführt. Im 4. Kapitel werden die Eigenschaften des Krümmungstensors des dieser Theorie zugrunde liegenden Raumes zunächst allgemein und dann in Verbindung mit den Einsteinschen Feldgleichungen untersucht. Im 5. Kapitel befaßt sich der Verf. mit der Frage nach der physikalischen Interpretation der Feldgleichungen und der darin eingehenden Feldgrößen. Er schließt sich der in den letzten Jahren von Einstein bevorzugten Interpretation an, d. h. er faßt $g_{\mu\nu}$ als das Gravitationspotential und $g_{\mu\nu}$ als den zur elektromagnetischen Feldstärke dualen Tensor auf. Danach wird mit Hilfe der Feldgleichung $R_{\mu\nu} = 0$ eine Diskussion des Bewegungsproblems unternommen. Das Ergebnis dieser Untersuchung veranlaßt den Verf., eine bestimmte (aber für den Physiker nicht besonders überzeugende) Modifizierung der Einsteinschen Feldgleichung $R_{[\mu\nu,\lambda]} = 0$ vorzuschlagen. Das abschließende 6. Kapitel besteht aus drei Anhängen. Besonders wichtig ist der zweite Anhang, in dem die Spinoralgebra und Analysis für den 4-dimensionalen Raum mit dem nichtsymmetrischen $g_{\mu\nu}$ entwickelt wird. Ergänzt wird das Buch durch eine umfangreiche Bibliographie.

A. Papapetrou.

Mavrides, Stamatia: Identités de Bianchi et identités de conservation en théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger. C. r. Acad. Sci., Paris **244**, 2482—2484 (1957).

Auf Grund der verallgemeinerten Bianchischen Identitäten läßt sich beweisen, daß die Erhaltungsgesetze der allgemeinen Relativitätstheorie im Falle der Einstein-Schrödingerschen affinen Feldtheorie in der Form $[(g^{+\nu} R_{\nu\rho} + g^{+\nu} R_{\rho\nu}) -$

$\delta_0^{\alpha\beta} g^{+\nu} R_{\alpha\beta}]_{;\mu} = 0$ geschrieben werden können.

J. I. Horváth.

Kichenassamy, S.: Sur un cas particulier de la solution de $g_{\mu\nu;\rho} = 0$. C. r. Acad. Sci., Paris **244**, 2007—2009 (1957).

Es wird die Lösung der Gleichung $g_{\mu\nu;\rho} = 0$ der Einstein-Schrödingerschen

einheitlichen Feldtheorie mit Hilfe der Tonnelatschen Methode (M.-A. Tonnelat, dies. Zbl. 43, 209; 66, 220) in den Fällen $\varphi = 0$ und $\varphi_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu} = 0$ gelöst. [S. auch Kichenassamy, dies. Zbl. 77, 421; V. Hlavaty, dies. Zbl. 50, 218; 66, 219, deren Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit berücksichtigt und ergänzt werden.]

J. I. Horváth.

Pachner, Jaroslav: Über die Kompatibilität der Feldgleichungen, Erhaltungssätze und Bewegungsgleichungen in der unitären Feldtheorie. Ann. der Physik, VI. F. 20, 368—380 (1957).

Brahmachary, R. L.: A class of exact solutions of the combined gravitational and electromagnetic field equations of general relativity. Nuovo Cimento, X. Ser. 6, 1502—1506 (1957).

Verf. findet eine statische kugelsymmetrische Lösung der allgemein-relativistischen Feldgleichungen (mit „kosmologischem Term“), die einer speziellen kugelsymmetrischen Materieverteilung mit einem geladenen Teilchen im Mittelpunkt entspricht. Das Regularitätsbereich dieser Lösung ist eine Kugelschale von endlicher Breite, so daß ein Zwischenraum zwischen der zentralen elektrischen Ladung und der sie umgebenden Materie vorhanden sein muß.

H. Treder.

Eisenhart, Luther P.: A unified theory of general relativity of gravitation and electromagnetism. IV. Proc. nat. Acad. Sci. USA 43, 333—336 (1957).

Der Verf. begründet die Resultate seiner früheren Arbeit [ibid. 42, 878—881 (1956)] auf einem anderen Weg.

J. I. Horváth.

Lameau, Jean: Solution à symétrie sphérique des équations de la relativité générale, en choisissant, comme tenseur d'impulsion-énergie, le tenseur de la théorie électromagnétique de Born-Infeld. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 2200—2210 (1957).

The gravitational field of a singularity with spherical symmetry in the Born-Infeld theory is calculated.

L. Infeld.

Abrol, Mohan Lal: Nature of „ p “ in Bonnor's unified theory. Nuovo Cimento, X. Ser. 6, 230—234 (1957).

Auf Grund sehr interessanter und tiefligender Argumente weist der Verf. darauf hin, daß die willkürliche Konstante p der Bonnorschen einheitlichen affinen Feldtheorie (dies. Zbl. 56, 440) eine reelle Größe ist.

J. I. Horváth.

Hämeen-Anttila, K. A.: Eine Theorie der Gravitation und des Elektromagnetismus. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 20, Nr. 4, 49 S. (1957).

Die einheitliche Beschreibung der Gravitation und des Elektromagnetismus wird durch das Neubeleben einiger prerelativistischen Theorien im Gegensatz zu den allgemein akzeptierten Ideen der einheitlichen Feldtheorien untersucht. Im Falle der statischen Felder wird der Absolutwert der Kraft, die zwei Partikeln mit dem elektrischen Ladungen e , bzw. e' und mit den Massen m bzw. m' aufeinander ausüben, in der Form $(*) f = (-e e' + m m')/r^2$ aufgenommen, wo r den Abstand zwischen den Partikeln bedeutet. Es wird darauf hingewiesen, daß die Größe $M = \{i e, m\}$ in einem abstrakten zweidimensionalen pseudo-euklidischen Raum wie ein Vektor eingeführt werden kann, wodurch sich die Wechselwirkungskraft $(*)$ zwischen den Partikeln in der Form: $f = M M'/r^2$ darstellen läßt. Diese Voraussetzung verbindet die Masse und die elektrische Ladung auf eine solche Weise miteinander, daß beide Begriffe ihren absoluten Sinn verlieren und die Masse und die Ladung eines Körpers sich nur relativ in bezug auf einen anderen Körper messen lassen. Diese Auffassung führt zu einer Verbindung der Trägheit mit der relativ definierten Masse und Ladung und es werden einige Resultate der Relativitätstheorie abgeleitet. — Es soll aber darauf hingewiesen werden, daß ein solcher Ansatz, wie $(*)$, für die Wechselwirkungskraft vom physikalischen Standpunkte aus als sehr fraglich bezeichnet werden kann. Es läßt sich nämlich einsehen, daß kein Dimensionssystem existiert, in welchem Ladung und Masse gleiche Dimensionen besitzen, so daß sie sich als die Komponenten

eines (sogar abstrakten) Vektors nicht unmittelbar vereinigen lassen. Weiterhin soll berücksichtigt werden, daß die Stärke der elektrischen und Gravitationswirkung das Verhältnis $1:10^{-32}$ hat, was bedeutet, daß die Berücksichtigung des Gravitationsfeldes in der vorgeschlagenen Theorie des Verf. vernachlässigt werden kann. Es soll aber darauf aufmerksam gemacht werden, daß die formalen Resultate der vorgeschlagenen Theorie und die Einführung des Vektors M , der sich vielleicht auch physikalisch richtig interpretieren läßt, als bemerkenswert bezeichnet werden können.

J. I. Horváth.

Power, Edwin A. and John A. Wheeler: Thermal geons. Reviews modern Phys. 29, 480—495 (1957).

Weiterführung einer früheren Arbeit (J. A. Wheeler, dies. Zbl. 64, 224). Hier werden Konzentrationen elektromagnetischer Energie, zusammengehalten durch das von ihnen erzeugte Gravitationsfeld, mit folgenden speziellen Eigenschaften untersucht: 1. Das Gravitationsfeld ist kugelsymmetrisch und statisch. 2. Der Energie-transport durch Eigenschwingungen des elektromagnetischen Feldes ins Unendliche ist vernachlässigbar klein. 3. Die Energien der gebundenen Eigenschwingungen gehorchen einer Bose-Verteilung. Alle Eigenschaften eines thermischen Geons sind dann durch einen einzigen Parameter (Temperatur) charakterisiert. Verff. bestimmen die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen im kugelsymmetrischen Gravitationsfeld in WKB-Näherung und erhalten daraus den Energie-Impuls-Tensor, der in die Gravitationsfeldgleichungen eingeht. Diese werden unter Berücksichtigung der Randbedingungen (Werte der $g_{\mu\nu}$ außerhalb der aktiven Zone) numerisch gelöst.

D. Geißler.

Regge, T.: Gravitational fields and quantum mechanics. Nuovo Cimento, X. Ser. 7, 215—221 (1958).

In Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Wheeler (dies. Zbl. 78, 192) zeigt der Verf. an Hand von Gedankenexperimenten in der Art derjenigen von Bohr und Rosenfeld, daß wegen der Nichtlinearität der Einsteinschen Gravitationsgleichungen die Quantelung des Gravitationsfeldes zu einer kleinsten Länge von der Größenordnung 10^{-33} cm führt. Für kleinere Dimensionen sind die quantenphysikalischen Schwankungen der Feldgrößen größer als diese selbst, so daß dann die Feldgrößen nicht mehr sinnvoll definierbar sind.

H. Treder.

Brill, Dieter R. and John A. Wheeler: Interaction of neutrinos and gravitational fields. Reviews modern Phys. 29, 465—479 (1957).

Szekeres, G.: Spinor geometry and general field theory. J. Math. Mech. 6, 471—517 (1957).

Der Verf. legt seiner Feldtheorie eine Geometrie zugrunde, in der die Übertragungen von Spinoren die fundamentalen Größen sind. Diese Spinorübertragungen werden für einen fünfdimensionalen Raum eingeführt, in dem die vierdimensionale Raum-Zeit-Welt eingebettet ist. Die zusätzliche 5. Koordinate soll eine projektive Koordinate sein. Der Raum muß in der x^5 -Richtung also homogen sein und in dieser Richtung eine isotrope Riemannsche Krümmung besitzen. Das fünfdimensionale Koordinatensystem wird so gewählt, daß die projektive Koordinate orthogonal zur Raum-Zeit-Welt ist. — Es wird dann Kovarianz der Feldgleichungen gegenüber Phasentransformationen der Spinoren, gegenüber allgemeinen vierdimensionalen Koordinatentransformationen und außerdem noch gegen Verschiebungen der Raum-Zeit-Welt längs der x^5 -Achse gefordert. Die grundlegende Operation ist dann die fünfdimensionale Kongruenzverschiebung eines Spinors, in die ein fünfdimensionaler Vektor A_a und die gewöhnlichen Verschiebungskoeffizienten $S_{ab\mu} = -S_{ba\mu}$ ($a, b = 1, 2, 3, 4, 5$; $\mu = 1, 2, 3, 4$) eingehen. Letztere bestimmen auch die Verschiebung der Vektoren. Mit Hilfe der $S_{ab\mu}$ läßt sich ein Krümmungs- und hieraus ein verallgemeinerter Einstein-Ricci-Tensor definieren und durch $A_{a,b} - A_{b,a}$ ein schiefssymmetrischer Tensor zweiter Stufe, der Phasenkrümmungstensor. Schließlich

bilden noch die zweiten Ableitungen des die Verschiebung längs der x^5 -Achse charakterisierenden Skalars A einen symmetrischen Tensor D_{ab} . — Mit Hilfe des aus dem Projektionsoperator hergeleiteten fünfdimensionalen metrischen Tensors g_{ab} , des Einstein- und des Phasenkrümmungstensors, sowie von D_{ab} wird dann auf Grund heuristischer Argumente eine fünfdimensionale skalare Dichte konstruiert, deren raumzeitliche Projektion die Lagrange-Dichte der Feldtheorie ist. Zu dieser Dichte tritt noch additiv die Lagrange-Dichte eines spinoriellen Materiefeldes, das die Spinorgeometrie anzeigt. Für das Spinorfeld ergeben sich dann Feldgleichungen, die als verallgemeinerte Diracsche Wellengleichungen anzusehen sind. Außer dem Spinorfeld enthält die Feldtheorie 26 unabhängige tensorielle Feldvariablen, welche rein geometrischer Natur sind und insgesamt 26 Feldgleichungen gehorchen. Diese Variablen sind die 10 Komponenten $g_{\mu\nu}$ des vierdimensionalen metrischen Tensors und ein kompletter Satz von vierdimensionalen vollständig-schiefsymmetrischen Tensoren nullter bis vierter Stufe. Die $g_{\mu\nu}$ werden als Gravitationspotentiale angesehen. Für sie gelten Gleichungen vom Typ der Einsteinschen Gravitationsgleichungen mit Materietensor. Der vierdimensionale Vektor A_μ wird auf Grund der Form der Spinor-Wellengleichungen als elektromagnetisches Potential interpretiert. Es treten dann Gleichungen 4. Ordnung für A_μ an Stelle der ersten Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen und bereits im Vakuum sind Feldstärke und Induktionstensor wesentlich verschieden. Schließlich wird der Skalar A entsprechend einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 66, 219) als universelle Welt-Zeit interpretiert und der Pseudoskalar $A_{\mu\nu\lambda\tau}$ als mesonenartiges Feld angesehen. 9 Feldvariablen bleiben ohne physikalische Interpretation. — Der Verf. gibt eine Lösung seines Gleichungssystems, die als kosmologisches Modell gedeutet werden kann.

H. Treder.

Ascoli, Giulio: Transformation of „Spin direction“ by ordinary Lorentz transformation. Z. Phys. 150, 407—408 (1958).

Gürsey, Feza: On some conformal invariant world-lines. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 21, 129—143 (1957).

The paper begins with a discussion of the Frenet formulae from the point of view of the special theory of relativity [Eisenhart, Trans. Amer. math. Soc. 26, 205—220 (1924)], the three radii of curvature ρ, σ, τ being introduced in the usual manner. Let U denote the velocity of a particle. Following E. L. Hill (this Zbl. 33, 40) the author introduces the so-called Abraham 4-vector: $\Gamma = \ddot{U} - \rho^{-2} U$, the dots indicating differentiation with respect to the proper-time. This vector is of importance since uniformly accelerated motion of a particle is characterised by $\Gamma = 0$ (Hill, loc. cit., p. 146). A second vector, called Haantjes vector by the author, is defined: $\mathcal{E} = \ddot{K} - (U, \ddot{K}) U$ where $K = \Gamma |\Gamma|^{-1}$. These vectors are expressed in terms of their projections into the principal normals of the world-line of the particle. The motion along world-lines as characterised by the conditions $\Gamma = 0$, $\mathcal{E} = 0$ (separately) is studied in detail. The conformal curvatures h_1, h_2 (Haantjes, this Zbl. 25, 365) are expressed in terms of ρ, σ, τ , and the properties of those world-lines for which $h_1 = 0$, $h_2 = 0$ are investigated. — These results are applied to the classical theory of the radiating electron, whose motion in the absence of an external field may be described by the equation (*) $r_0 \Gamma = \dot{U}$, $r_0 = 2 e^2 / 3 m c^2$ being the classical radius of the electron (Dirac, this Zbl. 23, 427). It is noted that (*) is not conformally invariant, and thus a suitable generalisation is sought by postulating that to the right-hand side of (*) a vector in the direction of the binormal should be added. It is indicated that the conformally invariant equations $h_1 = h_2 = 0$ are capable of describing the motion of the radiating electron if it is assumed that r_0 is time-dependent and that the momentum 4-vector is not parallel to U . This latter condition is interpreted as a spin phenomenon. (Rev. remark: This suggests some link with the work of others concerning the theory of electron spin; see for instance H. Hönl, this Zbl. 47, 213.)

H. Rund.

Gerstenkorn, Horst: Veränderungen des Erde-Mond-Systems durch Gezeitenreibung in der Vergangenheit bei zeitabhängiger Gravitationskonstante. *Z. Astrophys.* **42**, 134—155 (1957).

Frühere Untersuchungen des Verf. zu dem gleichen Thema werden durch die Annahme erweitert, daß die Gravitationskonstante umgekehrt proportional zum Weltalter sei. Es ergibt sich, daß die früher unter der Annahme einer zeitlich konstanten Gravitationskonstante erhaltenen Resultate qualitativ richtig bleiben, aber die Zeitskala erheblich kürzer wird.

F. Schmeidler.

Quantentheorie:

Salecker, H. and E. P. Wigner: Quantum limitations of the measurement of space-time distances. *Phys. Review*, II. Ser. **109**, 571—577 (1958).

This article deals with the limitations which the quantized nature of microscopic systems imposes on the possibility of measuring distances between space-time events.

Aus der Zusammenfassg. der Autoren.

Ludwig, Günther: Zum Ergodensatz und zum Begriff der makroskopischen Observablen. I. *Z. Phys.* **150**, 346—374 (1958).

The quantum mechanical ergodic theorem has been discussed in the past by reference to what is essentially an ensemble of observers. However, in the last year or two the view has gained ground that this approach, initiated by J. von Neumann, is unsatisfactory. The present paper is an attempt to approach the theorem in a different way, by asking: given a system and appropriate Hamiltonian, what must an observer seek to measure in order to verify the ergodic theorem and observe macroscopic properties? Is it probably too early to pass an opinion on this very reasonable attempt, since certain questions (e. g. some arising from degeneracy) are explicitly left open in this paper.

P. T. Landsberg.

Zinnes, I. I.: Hidden variables in quantum mechanics. *Amer. J. Phys.* **26**, 1—4 (1958).

Bekanntlich hat J. v. Neumann den Satz bewiesen, daß die quantenmechanische Zustandsfunktion ψ den Zustand eines Systems so vollständig wie möglich beschreibt, und daß jeder Versuch einer detaillierteren Beschreibung durch Einführung von zusätzlichen Variablen (verborgenen Parametern) den experimentell nachprüfbaren Aussagen der Quantentheorie widersprechen muß. (J. v. Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, S. 170—171, dies. Zbl. **5**, 91). Dieser Satz wird vom Verf. in anschaulicher Weise nochmals hergeleitet. Der Verf. weist dann weiter darauf hin, daß v. Neumanns Theorem nur für den Fall gültig ist, daß die verborgenen Parameter zusätzlich zu den gegenwärtig in der Quantentheorie benutzten Observablen eingeführt werden und er betont, daß v. Neumanns Theorem durchaus die Möglichkeit offenlasse, für quantenmechanische Systeme eine von der heutigen Beschreibung abweichende „Mikrobeschreibung“ zu finden, die klassisch vollständig ist und in welcher die heute gebräuchlichen Observablen als statistische Parameter auftreten.

G. Blankenfeld.

● **Körner, S.** (edited by): **Observation and interpretation.** A symposium of philosophers and physicists. Proceedings of the 9th Symposium of the Colston Research Society held in the University of Bristol April 1st—April 4th, 1957. (Colston Papers. Vol. 9.) London: Butterworths Scientific Publications 1957. XIV, 218 p. 40 s.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt (s. folgende Referate).

Braithwaite, R. B.: On unknown probabilities. *Observation and Interpretation* 3—11 (1957).

Einleitend werden die wichtigsten Interpretationen des Begriffes der Wahrscheinlichkeit (W) kurz diskutiert: 1. die empiristische (W = relative Häufigkeit), 2. die axiomatische (W = Grundbegriff), 3. die rationalistische (W = logische Re-

lation), 4. die subjektivistische (W = Maß des Vertrauens). Der Hauptteil des Vortrages enthält eine kritische Auseinandersetzung mit der subjektivistischen Theorie von de Finetti an Hand eines Vergleichs der Situationen „unsymmetrischer Würfel“ und „farbige Kugeln in einer Urne“. Der Verf. ist Anhänger einer frequentistischen Wahrscheinlichkeitslehre. *G. Süßmann.*

Ayer, A. J.: The conception of probability as a logical relation. Observation and Interpretation 12—17 (1957). **Discussion.** Ibid. 18—30 (1957).

Der Verf. kritisiert die Deutung der Wahrscheinlichkeit als einer logischen Relation zwischen einer Aussage und der sie stützenden Information. Das Hauptargument ist, daß so nicht erklärt werden kann, warum man möglichst viel Information sammeln soll, da ja nach dieser Auffassung auch die logischen Relationen zwischen der Aussage und ärmeren Informationen zu wahren Wahrscheinlichkeitsaussagen führen. Die Diskussion ergab, daß die Kritik von Ayer auch auf die frequentistische Deutung der Wahrscheinlichkeit übertragen werden kann.

G. Süßmann.

Popper, K. R.: The propensity interpretation of the calculus of probability, and the quantum theory. Observation and Interpretation 65—70 (1957).

Der Verf. deutet die Wahrscheinlichkeit als „Propensität“ (oder „Neigung“), d. h. als eine objektive, physikalisch reale Eigenschaft einer experimentellen Anordnung, ontologisch nicht unähnlich etwa dem elektromagnetischen Feld. Gemessen zwar wird die Wahrscheinlichkeit oder Propensität, wenn auch nur näherungsweise, durch relative Häufigkeiten in einer Versuchsreihe; ihrem logischen Charakter nach bezieht sie sich aber nicht auf die Reihe, sondern auf das einzelne Ereignis, wobei natürlich auch eine ganze Versuchsreihe als ein Ereignis aufgefaßt werden kann (wenn nämlich über die relative Häufigkeit eine Wahrscheinlichkeitsaussage gemacht wird).

G. Süßmann.

Vigier, J.-P.: The concept of probability in the frame of the probabilistic and the causal interpretation of quantum mechanics. Observation and Interpretation 71—77 (1957). **Discussion.** Ibid. 78—89 (1957).

Das von de Broglie, Bohm und dem Verf. entwickelte deterministische Modell der Quantenmechanik wird geschildert. Danach können die statistischen Gesetze durch Mittelung über (heute noch) verborgene dynamische Parameter gewonnen werden. Diskussion: D. Bohm und J.-P. Vigier verteidigen ihre gut dialektisch-materialistische Auffassung, nach der es unter der klassischen und der darunter liegenden quantenmechanischen noch unendlich viele andere, immer feinere Schichten gibt, was eine interessante Synthese ergibt (in der beide, die These des Determinismus und die Antithese der Statistik, dialektisch aufgehoben sind). Daß eine solche unendliche Natur restlos erkennbar sein soll, ist allerdings schwer zu glauben. Ein weiterer Einwand besagt, daß die dynamischen Gesetze zur Ableitung der thermodynamischen nicht ausreichen (wie deren Irreversibilität lehrt), sondern daß man zur Mittelung so etwas wie „thermodynamische Prinzipie“ über die Verteilung der Anfangszustände benötigt.

G. Süßmann.

Bohm, D.: A proposed explanation of quantum theory in terms of hidden variables at a sub-quantum-mechanical level. Observation and Interpretation 33—40 (1957).

Rosenfeld, L.: Misunderstandings about the foundations of quantum theory. Ibid. 41—45 (1957).

Discussion. Ibid. 46—61 (1957).

Diese Diskussion über die richtige Deutung der Quantenmechanik ist insofern bemerkenswert, als die Gegner beide Anhänger des dialektischen Materialismus sind. L. Rosenfeld war langjähriger Schüler und Mitarbeiter von N. Bohr und ist wohl sein authentischster Interpret. D. Bohm erläutert seine deterministische Deutung des quantenmechanischen Formalismus. Auffallend ist nach Meinung des Ref. die

Nähe Bohrs und Rosenfelds zur Kantischen Erkenntnistheorie: Das Ding (z. B. das Elektron) existiert sehr wohl an sich, ist aber nur als Erscheinung (als Teilchen oder als Welle) erkennbar (= experimentell beobachtbar); die Lehre von Raum und Zeit sowie die Kausalität (= klassische Physik) sind a priori (werden in der Quantenmechanik vorausgesetzt); die Vernunft wird auf die Aufgabe beschränkt, das Erfahrungsmaterial zu ordnen und den Menschen zu den praktischen Zielen hin anzuleiten.

G. Süßmann.

Bopp, F.: The principles of the statistical equations of motion in quantum theory. Observation and Interpretation 189—196 (1957). Discussion. Ibid. 204—206 (1957).

Der Verf. berichtet über seine Deutung der Quantenmechanik als einer neuartigen statistischen Mechanik von Teilchen, die verborgene Bahnen im Phasenraum beschreiben. Heisenbergs Einwand, hier seien im Gegensatz zur Kopenhagener Deutung Ort und Impuls nicht in gleicher Weise behandelt, wird der rein formale Charakter der Symmetrie der kanonischen Gleichungen der klassischen Mechanik als Gegenbeispiel entgegengehalten.

G. Süßmann.

Feyerabend, P. K.: On the quantum-theory of measurement. Observation and Interpretation 121—130 (1957).

Süßmann, G.: An analysis measurement. Ibid. 131—136 (1957). Discussion. Ibid. 137—147 (1957).

Verhandelt wird die Frage, ob sich die bei einer Quantenmessung auftretende zeitliche Unstetigkeit in der ψ -Funktion durch Einführung des Begriffs eines makroskopischen, der klassischen Physik genügenden Meßapparates vermeiden läßt. Nach Meinung des Ref. steht solch ein Begriff im Widerspruch zu den Gesetzen der Quantenmechanik; daß sich die Unstetigkeit in $\psi(t)$ nicht vermeiden läßt, ist eine Folge des statistischen, informationstheoretischen Charakters dieser Größe. Die Realität des (von ψ wesentlich verschiedenen, verborgen bleibenden) Objektes wird damit nicht bezweifelt.

G. Süßmann.

Groenewold, H. J.: Objective and subjective aspects of statistics in quantum description. Observation and Interpretation 197—203 (1957).

Der Verf. referiert eine sehr sorgfältige quantenmechanische Analyse des Meßvorgangs, vor allem unter dem Gesichtspunkt von Reversibilität und Irreversibilität. Der quantenmechanische Formalismus wird mit den Begriffen der Informationstheorie gedeutet, und die im Titel angeschnittene Frage wird bewußt ausgeklammert.

G. Süßmann.

Fierz, M.: Does a physical theory comprehend 'anobjective, real, single process'? Observation and Interpretation 93—96 (1957).

Körner, S.: On philosophical arguments in physics. Ibid. 97—101 (1957).

Polanyi, M.: Beauty, elegance, and reality in science. Ibid. 102—106 (1957). Discussion. Ibid. 107 (1957).

Die Referate enthalten interessante Bemerkungen zu verschiedenen erkenntnistheoretischen Prinzipien, vor allem für die Deutung der Quantenmechanik.

G. Süßmann.

Kneale, W. C.: What can we see? Observation and Interpretation 151—159 (1957).

Gallic, W. B.: The limits of prediction. Ibid. 160—164 (1957).

Ryle, G.: Predicting and inferring. Ibid. 165—170 (1957).

Discussion. Ibid. 171—186 (1957).

Darwin, Sir Charles: Observation and interpretation. Observation and interpretation 209—218 (1957).

Petiau, Gérard: Sur les fonctions d'ondes associées au mouvement des corpuscules en mécanique ondulatoire. C. r. Acad. Sci., Paris 245, 293—296 (1957).

Les fonctions d'ondes guidées générales sont obtenues à partir d'une solution de l'équation d'ondes combinaison de solutions régulières et singulières représentant la structure du

corpuscule dans un repère propre et en utilisant les transformations laissant l'équation d'ondes invariante au cours du temps. Zusammenfass. des Autors.

Sen Gupta, S. and H. Mukhopadhyay: Problem of perturbed boundary condition in quantum mechanics. Proc. phys. Soc. **71**, 173—176 (1958).

Voraussetzung der Betrachtungen ist, daß die durch einen analytischen Ausdruck gegebene Oberfläche als kleine Störung einer Kugelfläche darstellbar ist. Diese Deformation der Kugel wird in ein neues Koordinatensystem gesteckt, in dem die Schrödinger-Gleichung geschrieben wird. Dabei spaltet der Laplace-Operator in den üblichen und einen von der Deformation abhängigen Anteil auf. Letzter wird als Störpotential des (als bekannt angenommenen) kugelsymmetrischen Falles aufgefaßt. Störungsrechnung führt im Fall eines in ein starres Ellipsoid eingeschlossenen Teilchens zu dem aus der Bohrschen Arbeit (dies. Zbl. **47**, 229) bekannten Ergebnis. (Ähnliche Betrachtungen findet man bei Moszkowski, dies. Zbl. **66**, 232).

W. Klose.

Levinger, J. S., N. Austern and P. Morrison: The dipole sum rule with an approximate Hamiltonian. Nuclear Phys. **3**, 456—464 (1957).

Es ist bekannt, daß sich das klassische Verfahren zur Behandlung der Dipolwechselwirkung von zusammengesetzten elektrischen Ladungs- und Stromsystemen mit dem elektromagnetischen Feld eben dann verwenden läßt, wenn auch sog. Austauschkräfte und andere nicht-klassische dynamische Effekte berücksichtigt werden sollen. Es wird bei der Berechnung der Dipolwechselwirkung vorausgesetzt, daß sich einerseits der Dipolmomentoperator des Systems in der Form $D = \sum e_i r_i$ additiv annehmen läßt, andererseits die Wechselwirkung mit Hilfe des Hamiltonschen Operators, sowie der Eigenfunktionen des Systems im Grundzustand berechnet werden kann. Die exakten Eigenfunktionen sind jedoch meistens unbekannt, deswegen lassen sich zwei Approximationsmethoden verwenden: i) es wird die Berechnung mit Hilfe der besten Eigenfunktion — welche sich auf Grund des sog. unabhängigen Teilchenmodells angeben lassen — und mit Hilfe des exakten Hamiltonschen Operators durchgeführt; ii) man benützt dieselben Eigenfunktionen, aber in dem Hamiltonschen Operator wird das exakte Potential durch das äquivalente durchschnittliche Potential des Einkörperproblems ersetzt. Im ersten Falle bleiben einige dynamische Korrelationen unberücksichtigt, in dem anderen treten manche physikalisch nicht genug begründeten Korrekturen auf. Um die beiden Methoden zu vergleichen, werden die Rechnungen im Falle eines vereinfachten kernphysikalischen Modells durchgeführt.

J. I. Horváth.

Park, David: Diffusion par deux potentiels. C. r. Acad. Sci., Paris **245**, 291—293 (1957).

Die Lösungen der Schrödingerschen Gleichung $i \hbar \partial_t \psi = (H_0 + V) \psi$ mit $V = V_1 + V_2$ lassen sich in der Form $\psi^{(\pm)} = \varphi + \chi^{(\pm)}$ schreiben, wo φ eine ebene Welle und $\chi^{(\pm)} = G^{(\pm)} V \psi^{(\pm)}$ mit $G^{(\pm)} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \{E - H_0 \pm i \gamma\}^{-1}$ bedeuten. Ist ψ_1 eine exakte Lösung der Schrödingerschen Gleichung mit $V = V_1$, dann läßt sich beweisen, daß $\psi^{(+)} = (1 + t_2 + t_1 t_2 + t_2 t_1 t_2 + \dots) \psi_1^{(+)}$ ist, wo t_i den Operator $(1 - G^{(+)} V_i)^{-1} G^{(+)} V_i$ ($i = 1, 2$) bezeichnet. Diese letztere Lösung ist mit der Feynmanschen äquivalent. Mit Hilfe der hier angegebenen Methode läßt sich auch die Bruecknersche Lösung des Diffusionsproblems über zwei feste Zentren (dies. Zbl. **50**, 229) einfach ableiten.

J. I. Horváth.

Karplus, Robert and Kenneth M. Watson: Structure of a many-particle quantum-mechanical medium. Phys. Review, II. Ser. **107**, 1205—1218 (1957).

Die Wellenfunktion eines quantenmechanischen Systems mehrerer Teilchen läßt sich bekanntlich nach den Reaktionsmatrizen t_{ik} je zweier Teilchen i und k entwickeln. Die hierbei auftretenden Produkte solcher t_{ik} lassen sich zu „linked cluster“-Termen ordnen, deren jede die gesamte Wechselwirkung einer gewissen Anzahl der

Teilchen beschreibt. Dies wird auf die Berechnung der Erwartungswerte von Operatoren angewandt. Näherungsmethoden mit Anwendungsbeispielen werden diskutiert.

H. Kümmel.

Abe, Ryuzo: Many-body pseudopotential for hard-sphere interaction. Progress theor. Phys. 19, 1—16 (1958).

Die nur bis zur Ordnung a^2 entwickelte Pseudopotentialmethode zur Behandlung der Wechselwirkungen harter Kugeln (Huang und Yang, dies. Zbl. 77, 209) wird bis zur a^4 -Näherung durchgeführt. Damit sind dann auch tertiäre Stöße erfaßt und man kann die Theorie für Systeme größerer Dichte benutzen. Die Grundzustandsenergie ergibt sich divergenzfrei. Vergleich des Energiespektrums mit dem von Helium II zeigt, daß die Pseudopotentialmethode nur den Phononenast liefert. Die kurzwelligen Anregungen entsprechenden Rotonen im Helium könnten vielleicht nach einer Modifikation der Methode ebenfalls beschrieben werden. Verf. weist hierzu auf eine geplante Arbeit hin.

W. Klose.

Sklianski (Sklianski), A. L.: Sur les trajectoires singulières du problème général des trois corps avec le choc binaire. Ukrain. mat. Žurn. 9, 163—175, französ. Zusammenfassg. 175 (1957) [Russisch].

In seiner Monographie „Singuläre Bahnen eines Systems von freien materiellen Punkten“ (Akad. d. Wiss. USSR, 1951) untersucht U. D. Sokolow die ebenen und räumlichen Bahnen bei paarweisen und allgemeinen Stößen von drei Körpern unter Zusammenwirken von Kräften, die proportional irgendeiner analytischen Funktion $f(r)$ sind, wobei $\lim_{r \rightarrow 0} r^{k+1} f(r) = -2k < 0$ ist ($0 \neq k =$ reelle Zahl). — Verf.

untersucht dasselbe Problem, falls die Anziehungskraft $m_i m_j f(r_{ij})$ so beschaffen ist, daß $f(r) = dF(r)/dr$ eine analytische Funktion für alle reellen und positiven Werte von r ist, so daß im Falle $n = -k$ gilt: $\lim_{r \rightarrow 0} r^{-2n+1} f(r) = 1 \neq 0$. Es wird

das Verhalten aller befragten Funktionen in einer Umgebung des Momentes der „choc binaire“ behandelt und gezeigt, daß r so in diesem Intervall wächst, daß es konstant wird. Es wird ebenso gezeigt, daß alle Komponenten des Radiusvektors des Bewegungspunktes endlichen Grenzen zustreben, wenn $t \rightarrow t_1$. Nach einer Transformation des Differentialgleichungssystems zeigt Verf. die Existenz von Bahnen bei „choc binaire“ in den Fällen

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{dr}{dt} = r_1 < 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{dr}{dt} = r_1 = 0.$$

B. Dolaptschiew.

Trainor, L. E. H.: The formation of antisymmetric wave functions. Canadian J. Phys. 35, 555—561 (1957).

Der Verf. hatte in einer früheren Arbeit (L. E. H. Trainor, dies. Zbl. 47, 229) eine Methode angegeben, antisymmetrische Wellenfunktionen zu konstruieren. Diese Methode verbindet die Vorteile des Slaterischen Verfahrens mit denen des gruppentheoretischen Verfahrens (z. B. in B. L. v. d. Waerden, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, dies. Zbl. 4, 89; S. 119). Er beweist nun, daß der von ihm angegebene Ausdruck mit den auf üblichem Wege gewonnenen Resultaten übereinstimmt und illustriert sein Verfahren an einem Beispiel. G. Blankenfeld.

Zajcev (Zaitsev), G. A.: On the fundamental relativistically invariant equation for a spin $\frac{1}{2}$ particle. Soviet Phys., Doklady 2, 199—201 (1958), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 113, 1248—1250 (1957).

The author formulates a relativistic equation for spin $\frac{1}{2}$ but for a magnetic moment $\mu_0 = \frac{1}{2} (e \hbar / m_0 c) (1 + \delta)$, where $\delta \neq 0$. This is done by finding a relativistic equation of the second order from which only for the case $\delta = 0$ the usual Dirac equations of the first order can be deduced.

L. Infeld.

Novožilov (Novozhilov) Ju. V. (Ju. V.): The variational principle and the virial theorem for the continuous Dirac spectrum. Soviet Phys., JETP 4, 928—930 (1957), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 31, 1084—1086 (1956).

Das Variationsprinzip für alle Streuamplituden wird auf den Fall der Diracgleichung verallgemeinert. Das Varialththeorem für das kontinuierliche Diracspektrum wird abgeleitet. *K. Baumann.*

Saxon, David S.: Formulation of high-energy potential scattering problems. Phys. Review, II. Ser. 107, 871—876 (1957).

Es wird eine Methode zur Behandlung der hochenergetischen Potentialstreuung angegeben, welche als Ausgangspunkt (Nullte Ordnung) die WKB-Näherung wählt. Die Korrekturterme, die dabei auftreten, enthalten das Verhältnis der Änderung der örtlichen Wellenzahl und der Krümmung der klassischen Bahn. Im Gegensatz zum WKB-Verfahren, welches nur asymptotisch gültig ist, bleibt die vorliegende Formulierung exakt, ist aber nicht immer praktisch verwendbar. Das Verfahren wird an Hand der eindimensionalen Streuung demonstriert und die Berechnung der Phasenverschiebungen für ein zentrales Potential durchgeführt. Ferner wird gezeigt, daß sich diese Vorschrift auf die bekannte Bornsche Näherung reduziert, wenn die Gültigkeitsbedingungen dieser Näherung erfüllt sind. Die vorgeschlagene Methode enthält daher das WKB-Verfahren und die Bornsche Näherung als einfache Grenzfälle. *P. Urban.*

Park, D.: An improved Born approximation. Proc. phys. Soc., Sect. A 70, 905—907 (1957).

Der Verf. zeigt einen Weg zur Modifikation der Bornschen Näherung, so daß sie unitär wird, und beleuchtet diesen an Hand eines instruktiven Beispiels. Das Ergebnis ist eine verbesserte Genauigkeit für einen gewissen Winkelbereich der Phasenverschiebung. *P. Urban.*

Bates, D. R.: Slow collisions between heavy particles. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 243, 15—23 (1957).

Die beste Näherungsmethode zur Behandlung langsamer Stöße zwischen schweren Partikeln ist die Näherung des gestörten stationären Zustandes (Mott und Massey 1949). Der Verf. diskutiert die Vernachlässigung gewisser Kopplungsterme bei diesem Verfahren und zeigt, daß ihre Einbeziehung einer Annäherung des Verfahrens an die Bornsche Näherung entspricht. Zur Diskussion werden einige Prozesse durchgerechnet. *P. Urban.*

Kanki, T.: Theory of scattering in the quantized field and Low-Chew-Wick's formalism. Nuovo Cimento, X. Ser. 6, 628—641 (1957).

Verf. leitet den Low-Chew-Wick-Formalismus aus der Lippmann-Schwingerschen Streugleichung, mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Wickschen Satzes über den Zusammenhang zwischen Operatorprodukten und ihrer normalen Form, ab. Dabei wird eine Vorschrift für die Abspaltung der „physikalischen einlaufenden Zustände“ angegeben. *M. E. Mayer.*

Lenard, Andrew: Spin reversal in scattering processes. Phys. Review, II. Ser. 107, 1712—1713 (1957).

Aus der Invarianz gegenüber Raumzeit Spiegelung und der Unitarität der *S*-Matrix folgt eine Relation zwischen *S*-Matrixelementen. *K. Baumann.*

Medvedev, B. M.: On the construction of the scattering matrix. II. The theory with non-local interaction. Soviet Phys., JETP 5, 48—57 (1957), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 32, 87—98 (1957).

[Teil I s. Soviet Phys., JETP 4, 671—680 (1957), Übersetz. von Žurn. éksp. teor. Fiz. 31, 971—802 (1956).] — Es wird bewiesen, daß die Konstruktion der *S*-Matrix im Falle eines Systems mit beliebiger Lagrangefunktion mit Hilfe der vom Verf. für die nicht-lokale Theorie verallgemeinerten Bogoljubovschen Methode (dies. Zbl. 44, 234; 49, 275) auch vom physikalischen Standpunkte aus konsequenter-

weise durchgeführt werden kann. Die bekannten Schwierigkeiten, welche mit der Unitarität der S -Matrix zusammenhängen, werden auf Grund der Heisenbergdarstellung vermieden und die Bedingung der Kausalität wird durch eine sog. „Fastkausalitätsbedingung“ (condition of almost-causality) ersetzt. Es wird des weiteren darauf hingewiesen, daß das Verfahren auch physikalisch akzeptiert werden kann und sich der Formfaktor der nicht-lokalen Theorie zur Charakterisierung der inneren Struktur Elementarteilchen benützen läßt. Da die innere Struktur der Elementarteilchen unbekannt ist, kann die Berechtigung der Voraussetzung eines „bekannten“ Formfaktors auf den ersten Blick bezweifelt werden, doch es läßt sich zeigen, daß man von dieser Einwendung absehen kann, da die abgeleiteten Resultate nicht wesentlich von der inneren Struktur der Elementarteilchen abhängen.

J. I. Horváth.

Naito, Kunio: On the theory of the unstable particle in Lee's model. Progress theor. Phys. 18, 200—208 (1957).

Der Fall eines instabilen V -Teilchens im Lee-Modell ist schon von mehreren Verff. behandelt worden. [V. Glaser und G. Källén, Nuclear Phys. 2, 706—722 (1956); H. Araki, Y. Munakata, M. Kawaguchi und T. Gotô, dies. Zbl. 77, 432; T. Okabayashi und S. Sato, Progress theor. Phys. 17, 30—42 (1957)]. Die vorliegende Arbeit enthält eine neue Untersuchung dieses Problems, wobei besonders die Eigenschaften der S -Matrix untersucht werden. Speziell zeigen die Verff., daß die Matrixelemente der Form $\langle V | S | N, \theta \rangle$ verschwinden, wenn das V -Teilchen instabil ist. Dies wird physikalisch so interpretiert, daß ein kurzlebiges Teilchen während des unendlichen Zeitintervalls, das für die Definition der S -Matrix notwendig ist, sicher zerfällt. Weitere Untersuchungen dieses Problems werden versprochen.

G. Källén.

Hall, D. and A. S. Wightman: A theorem on invariant analytic functions with applications to relativistic quantum field theory. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. 31, Nr. 5, 41 p. (1957).

Das folgende Theorem wird bewiesen: Eine Funktion von n Vierervektoren, die invariant ist unter der eigentlichen homogenen Lorentzgruppe und ferner analytisch ist, wenn die Imaginärteile sämtlicher Vierervektoren innerhalb des oberen Lichtkegels liegen, ist invariant auch unter der komplexen eigentlichen homogenen Lorentzgruppe und eine analytische Funktion der Skalarprodukte der n Vierervektoren. Dies Theorem wird auf den Vakuumerwartungswert eines Produkts von $n + 1$ Feldoperatoren angewandt, welcher eine Funktion in den n Koordinatendifferenzvektoren mit den angegebenen Eigenschaften ist. Es folgt die wichtige Aussage, daß diese Funktion bereits durch ihre Werte bei nur raumartigen (reellen) Koordinatendifferenzen eindeutig bestimmt ist, bei $n \leq 3$ sogar durch ihre Werte bei gleichen Zeiten allein. Dies erlaubt, ein Theorem von R. Haag (dies. Zbl. 67, 211) über die Inäquivalenz der Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen durch dynamisch verschiedene Theorien zu verallgemeinern. — Die wichtigen Ergebnisse dieser sehr klar und übersichtlich geschriebenen Arbeit haben den strengen Beweis des TCP-Theorems durch R. Jost ermöglicht und liegen weiteren neueren Arbeiten zugrunde.

K. Symanzik.

Thirring, Walter E.: A soluble relativistic field theory. Ann. of Phys. 3, 91—112 (1958).

In der vorliegenden Arbeit wird ein Modell eines Spinorfeldes, das mit sich selbst in Wechselwirkung steht, diskutiert. Das Modell ist zweidimensional, d. h. es enthält nur eine räumliche und eine zeitliche Dimension. Der Verf. zeigt, daß ein solches Modell tatsächlich explizit gelöst werden kann. Insbesondere werden alle physikalischen Streuzustände der Theorie explizit mit Hilfe der Zustände der nackten Teilchen ausgedrückt. Das Ergebnis wird dann für ein Studium der Renormierungsfragen benützt, sowie für die Berechnung gewisser Matrixelemente des renormierten Feldes

zwischen den physikalischen Zuständen. Da das Modell zweidimensional ist, divergieren die Summen über „virtuelle Zwischenzustände“ in diesen Rechnungen nicht so stark wie bei Theorien in einer vierdimensionalen Welt. Im Modell gibt es also nicht so viele unendliche Größen wie in den gewöhnlichen Theorien, und man hat hier eigentlich nur eine nicht triviale Renormierung. Dies ist eine Renormierung des Feldoperators für das Spinorfeld. Weiter zeigt der Verf., daß die von ihm berechneten Matrixelemente des Feldoperators in einer konvergenten Potenzreihe der Kopplungskonstante entwickelt werden können. Man hört oft die Vermutung, daß die gewöhnlichen Voraussetzungen einer quantisierten Feldtheorie, d. h. im wesentlichen die Postulate der Lorentzinvarianz, der Vertauschbarkeit der Feldoperatoren für raumartige Abstände und der Unitarität der S -Matrix in sich widerspruchsvoll wären. Auch wenn es in dieser ersten Arbeit nicht vollständig gezeigt worden ist, daß alle Eigenschaften des Modells in Ordnung sind, so scheint es doch dem Ref., daß das vom Verf. vorgeschlagene Modell u. a. dazu benützt werden könnte, zu zeigen, daß diese Vermutung wenigstens in einer zweidimensionalen Welt nicht richtig ist.

G. Källén.

Salam, Abdus: On the inter-relation of scalar and pseudoscalar theories. Nuclear Phys. 4, 687—689 (1957).

In this note a general method for transcribing results for charged scalar meson theory into those for pseudoscalar theory is described. Aus der Einleitung.

Pugh, Robert E.: Furry's theorem for very strong interactions. Phys. Review, II. Ser. 109, 989—990 (1958).

An analogon to Furry's theorem is proved for Gell-Mann's "globally symmetric" model of very strong interactions. It is shown that the contribution corresponding to a diagram with an odd number of external pion lines and any number of external photon lines vanishes.

Zusammenfassg. des Autors.

Petiau, Gérard: Sur les fonctions d'ondes d'un type nouveau, solutions d'équations non linéaires généralisant des ondes de la mécanique ondulatoire. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 1890—1893 (1957).

Der Verf. weist darauf hin, daß sich die nicht-linearen Wellengleichungen, wie $\square \psi + \mu_0^2 (1 + k^2) \psi - 2 k^2 \mu_0^2 \psi^3 = 0$, $\square \psi + \mu_0^2 (1 - 2 k^2) \psi + 2 k^2 \mu_0^2 \psi^3 = 0$ und $\square \psi - \mu_0^2 (2 - k^2) \psi + 2 \mu_0^2 \psi^3 = 0$ durch die Jacobischen elliptischen Funktionen $\varphi_s = \text{sn} \{(1/\hbar') [wt - (\vec{p} \cdot \vec{x})], k\}$, $\varphi_c = \text{cd} \{(1/\hbar') [wt - (\vec{p} \cdot \vec{x})], k\}$, bzw. $\varphi_s = k' \text{sd} \{(1/\hbar') [wt - (\vec{p} \cdot \vec{x})], k\}$, $\varphi_c = \text{cn} \{(1/\hbar') [wt - (\vec{p} \cdot \vec{x})], k\}$, bzw. $\varphi_{\text{dn}} = \text{dn} \{(1/\hbar') [wt - (\vec{p} \cdot \vec{x})], k\}$, $\varphi_{\text{nd}} = \text{nd} \{(1/\hbar') [wt - (\vec{p} \cdot \vec{x})], k\}$ erfüllen lassen [wo $k' = 1 - k^2$, $\hbar' = h/(4K)$ bedeuten und durch $4K(k)$ die reelle Periode der Jacobischen Funktionen bezeichnet wird]. Diese Lösungen haben ähnliche Eigenschaften wie die Ebene-Wellen-Lösung der linearen Wellengleichung und es wird untersucht, in welchen Umständen sie als periodische Lösungen eine physikalische Bedeutung besitzen.

J. J. Horváth.

● **Fok, V. A.:** Arbeiten zur Quantentheorie des Feldes. [Raboty po kvantovoj teorii polja.] Leningrad: Verlag der Leningrader Universität 1957. 160 S. R. 11,40 [Russisch].

Folgende Arbeiten werden in russischer Übersetzung in einem Band zusammengefaßt: **V. Fock**, Verallgemeinerung und Lösung der Diracschen statistischen Gleichung Z. Phys. 49, 339—357 (1928); **V. Fock**, Konfigurationsraum und zweite Quantelung, dies. Zbl. 4, 280; **V. Fock** und **B. Podolsky**, Zur Diracschen Quantenelektrodynamik, dies. Zbl. 5, 184; **V. Fock** und **B. Podolsky**, On the quantization of electromagnetic waves and the interaction of charges in Dirac's theory, dies. Zbl. 5, 184; **P. A. M. Dirac**, **V. A. Fock** and **B. Podolsky**, On quantum electrodynamics, dies. Zbl. 6, 237; **V. A. Fock**, Zur Theorie der Positronen. [Original russisch], dies. Zbl. 8, 327; **V. Fock**, Zur Quantenelektrodynamik, dies. Zbl. 11, 138; **V. A. Fock**, Methode der Funktionale in der Quantenelektrodynamik. Leningradsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski Nr. 17 (1937) [Original russisch], **V. A. Fock**, Die Eigenzeit in der klassischen und der Quantenmechanik. [Original russisch], dies. Zbl. 18, 183.

● **Sokolow, A.:** Quantenelektrodynamik. In deutscher Sprache herausgegeben von **Wolfram Urich**. Berlin: Akademie-Verlag 1957. X, 324 S. DM 29,—.

Das Buch ist eine Übersetzung des schon 1951 erschienen russischen Originals. Der Verf. hat versucht, durch Literaturhinweise und Einfügung weiterer Abschnitte (z. B. über das Positroniumatom) der neueren Entwicklung Rechnung zu tragen. Daß dies nicht ganz gelungen ist, kann ihm kaum zum Vorwurf gemacht werden, zumal das Buch schon in der Originalfassung nur elementare leicht verständliche Methoden benutzt und sich nicht bemüht, elegant zu wirken. Das muß man beachten, wenn man es mit so ausgezeichneten Büchern wie dem von Bethe und Schweber sowie dem von Jauch und Rohrlich vergleicht. So werden z. B. die schwierigeren mathematischen Fragen nach der Existenz der S -Matrix nicht behandelt. Dafür wird den Anwendungen ein verhältnismäßig breiter Raum gegeben und es werden Dinge behandelt, die man sonst nicht in einem derartigen Buch erwartet (z. B. die Theorie der Kaskadenschauer). Der Referent vermißt eine Darstellung der kovarianten Renormierung von Masse und Ladung. Wenn auch in diesem Problem noch lange nicht das letzte Wort gesprochen sein dürfte, so ist es doch wenigstens ein konsequentes Rezept, das physikalische Prozesse höherer Ordnung beschreibt. Die Darstellung folgt im wesentlichen dem pädagogisch (doch nicht sachlich) gerechtfertigten üblichen Weg: Zuerst eine Einführung in die Theorie der freien Felder (Maxwell-Feld und Dirac-Feld) mit der Quantisierungsvorschrift; schließlich die Hinzunahme der Wechselwirkung zwischen den Feldern sowie ungewöhnlich zahlreiche Anwendungen. Leider fehlt ein Sachverzeichnis, ein Umstand, der darauf hinweist, daß es sich um ein Lehrbuch handelt. So ist es für den Fachmann weniger lehrreich als für den Studenten höherer Semester. Diesem aber kann man das Werk empfehlen.

H. Kümmel.

Gorkov, L. P.: Two limiting momenta in scalar electrodynamics. Soviet Phys., JETP 5, 167—169 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 32, 359—362 (1957).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (L. P. Gořkov, I. M. Chalatnikov, dies. Zbl. 67, 448) wird das asymptotische Verhalten der Greenschen Funktionen in der skalaren Elektrodynamik mit Hilfe der Methode der zwei Grenzpulse (A. A. Abrikosov, I. M. Chalatnikov, dies. Zbl. 65, 221), untersucht. Dabei gelangt der Verf. unter Voraussetzung der asymptotischen Konvergenz einer Reihe zum Pomerančuk-schen Schluß, daß für eine Punktwechselwirkung die Ladung verschwindet.

M. E. Mayer.

Tevikjan (Tevikian), R. V.: Solution of the Schwinger-equation in the Bloch-Nordsieck model. Soviet Phys., JETP 3, 967—969 (1957), Übersetz. vom Žurn. éksper. teor. Fiz. 30, 949—951 (1956).

Es wird die Streuung eines Elektrons an einem äußeren elektromagnetischen Felde auf Grund der Methode von Bloch-Nordsieck behandelt. Abschließend wird der Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Elektrons angegeben, wobei n Photonen eines gegebenen Energieintervalles abgestreut werden. *P. Urban.*

Ter-Martirosjan (Ter-Martirosian), K. A.: Charge renormalization for an arbitrary, not necessarily small value of e_0 . Soviet Phys., JETP 4, 443—444 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 31, 157—159 (1956).

Es wird darauf hingewiesen, daß die Taylorsche Voraussetzungen, nach welcher die von ihm eingeführte Renormalisationsfunktion $x\Phi(x)$ [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 234, 296—300 (1956)] für $x=0$ kontinuierlich bleibt und $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = x$ ist, nicht erhalten werden können, vielmehr $x\Phi(x)$ für $x=0$ eine wesentliche Singularität (größenordnungsmäßig wie $\exp\{1/x\}$) besitzt. Weiterhin läßt sich — im Falle eines Problems, welches einfacher von als das Taylor untersuchte ist und exakt durchgerechnet werden kann — beweisen, daß die Renormalisationsladung (e_c) für $L \rightarrow \infty$ die Gleichung $e_c^2 \approx 3\pi/L \rightarrow 0$ erfüllt, wo $L = \ln(\Lambda^2/m^2)$ (Λ ist der Abschneidungsimpuls der Photonen) bedeutet. *J. I. Horváth.*

Ginzburg, V. L. and V. M. Fajn (Fain): On quantum effects occurring on interaction of electrons with high frequency fields in resonant cavities. Soviet Phys., JETP 5, 123—125 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 32, 162—164 (1957).

Es wird folgendes Problem erörtert: Ein nichtrelativistisches Elektron tritt zur Zeit $t = 0$ mit gegebener kinetischer Energie in einen Hohlraum ein und verläßt ihn zu einem späteren Zeitpunkt mit einer gewissen kinetischen Energie. Untersucht werden die bei diesem Problem auftretenden quantenmechanischen Effekte, wobei im Hohlraum ein hochfrequentes elektromagnetisches Feld angenommen wird. Dabei wird auf eine Reihe früherer Arbeiten eingegangen und auf fehlerhafte Ableitungen hingewiesen. Es wird gezeigt, daß das Problem durch die Quantenfluktuationen der Strahlung bestimmt ist und die Dispersion der Elektronengeschwindigkeit und andere wichtige Daten berechnet. *P. Urban.*

Durand III, Loyal: Vacuum polarization effects in proton-proton scattering. Phys. Review, II. Ser. 108, 1597—1610 (1957).

The problem of vacuum polarization scattering of protons by protons is treated to first order in the vacuum polarization interaction. The phase shifts caused by the interaction are calculated, and the corresponding addition to the p - p scattering matrix is constructed. The phase shifts are calculated using Coulomb wave functions as the unperturbed wave functions. The corresponding addition to the p - p scattering matrix is then constructed, including exactly the Coulomb phase shift factors $\exp[2i(\sigma_L - \sigma_0)]$ appearing in the series representation of the scattering amplitudes. Other electromagnetic and relativistic modifications of the Coulomb scattering amplitudes are also examined in the limit of low energies. Numerical results are given for the vacuum polarization contributions to the p - p scattering cross section over the energy range 1.4—4.2 Mev. It is found that vacuum polarization scattering may easily be confused with nuclear P -wave scattering. *Zusammenfassg. des Autors.*

Page, Lorne A.: Polarization effects in the two-quantum annihilation of positrons. Phys. Review, II. Ser. 106, 394—398 (1957).

Berechnung der Wirkungsquerschnitte für polarisierte Elektronen und Lichtquanten. *K. Baumann.*

Claesson, Arne: Cross sections for bremsstrahlung and pair creation involving polarized electrons and photons. Ark. Fys. 12, 569—589 (1957).

Zunächst werden die allgemeinen Ausdrücke der differentiellen Wirkungsquerschnitte für Bremsstrahlung und Paarerzeugung bei verschiedenen Polarisationszuständen der beteiligten Elektronen und Photonen angegeben. Mit Hilfe der elektronischen Rechenmaschine SMIL in Lund werden dann für die Elektronenenergien $E = 1, 2, 4$ und $10 m_e$, Photonenenergien $\omega = 0,5 E$ und $0,9 E$ und verschiedene Winkel die Wirkungsquerschnitte für die Bremsstrahlung berechnet. Bei der Paarerzeugung werden die Wirkungsquerschnitte berechnet für die Fälle $\omega - 2m = 2, 3, 5$ und $10 m_e$, $E' = m + 0,5(\omega - 2m)$ und $m + 0,9(\omega - 2m)$ sowie verschiedene Winkel. *G. Wallis.*

Kurşunoğlu, Behram: Proton Bremsstrahlung. Phys. Review, II. Ser. 105, 1846—1853 (1957).

Die Bremsstrahlung eines Protons bei der Streuung an einem energieabhängigen komplexen Potentialtopf wird in erster Näherung in der Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld berechnet. *K. Baumann.*

Orlov, Ju. V. (Ju. V.): Internal bremsstrahlung in electric monopole $0^+ \rightarrow 0^+$ nuclear transitions. Soviet Phys., JETP 4, 944—945 (1957), Übersetz. von Žurn. éksper. teor. Fiz. 31, 1103—1105 (1956).

Sokolov, A. and B. Kerimov: On the scattering of particles by a force centre according to the radiation damping theory. Nuovo Cimento, X. Ser. 5, 921—939 (1957).

Im Anschluß und als Zusammenfassung früherer Arbeiten (vgl. auch dies. Zbl. 72, 219) behandeln die Verff. verschiedene Fälle von Streuung von Teilchen an gegebenen Potentialen (Deltafunktion, Yukawa, und Potentialschwelle) mit Hilfe der Dämpfungstheorie, und vergleichen die Resultate mit den entsprechenden Resultaten anderer Berechnungsmethoden. *M. E. Mayer.*

Drachman, Richard J.: Meson pair theory in intermediate coupling. *Phys. Review*, II. Ser. **109**, 996—998 (1958).

Wentzel's scalar meson pair theory has been treated in the intermediate coupling approximation, for two different forms of the cutoff function, and for various values of the coupling constant. The agreement of the approximate values of the self-energy with the exact ones is excellent.

Zusammenfassg. des Autors.

Brodskij (Brodskii), A.: Towards a general theory of meson scattering. *Soviet Phys., Doklady* **1**, 701—704 (1957), Übersetzung von *Doklady Akad. Nauk SSSR* **111**, 787—790 (1956).

Verf. gibt ohne Beweis Integraldarstellungen von Streumatrixelementen an, welche Spezialfälle früher von Y. Nambu [*Phys. Review*, II. Ser. **100**, 394—411 (1955)] angegebener Darstellungen sind. — Neuere Ergebnisse über die analytischen Eigenschaften der Streuamplitude als Funktion der Impulsübertragung von H. Lehmann (erscheint in *Phys. Rev.*) zeigen, daß diese Formeln höchstens unter weiterer Spezialisierung richtig sein können. Andere Fälle solcher Formeln umschließen zumindest nicht die betreffenden störungstheoretischen Ausdrücke. *K. Symanzik.*

Edwards, S. F. and P. T. Matthews: Relativistic theory of meson nucleon scattering. *Philos. Mag.*, VIII. Ser. **2**, 467—472 (1957).

Diese Arbeit stellt eine relativistische Verallgemeinerung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **77**, 428) dar, in der „Effective-Range“-Formeln aus der pseudoskalaren Mesonentheorie abgeleitet werden. Dabei wird die Theorie vor dem Grenzübergang zu kleinen Energien renormiert, so daß nur noch die Kopplungskonstante als Parameter übrigbleibt. Die 33-Phasen stimmen gut mit den Experimentaldaten überein und die 11- und 13-Phasen sind qualitativ richtig. Auch die *s*-Phasen sind von der richtigen Größenordnung und weisen eine gewisse Isotopenspinabhängigkeit auf. Dabei wird eine neue Gleichung für die Streuamplitude abgeleitet, die in die nicht-relativistische Theorie übergeht.

M. E. Mayer.

Cutkosky, R. E.: Radiative meson-nucleon scattering. *Phys. Review*, II. Ser. **109**, 209—217 (1958).

Die Näherung eines unendlich schweren Nukleons wird auf das Problem der Bremsstrahlung bei der Pion-Nukleonstreuung angewendet. Dabei wird der Chewsche Ansatz insofern verallgemeinert, als die Wechselwirkungsenergie zwar nur vom *P*-Wellenanteil der Mesonfeldvariablen abhängen soll, jedoch nicht notwendig linear. Dies führt auf einen Zusatzterm in der Lowschen Integralgleichung. Für das Bremsstrahlungsmatrixelement gelingt die Herleitung einer linearen Integralgleichung.

K. Baumann.

Houriet, A.: Méthode des champs adhérents. *Nuclear Phys.* **4**, 408—426 (1957).

The author takes as his starting point the fact that the system of coupled field equations (for the case of PS-PS coupling) is non-linear, and tries to find approximate solutions, which far from the nucleon „core“ go over into the usual plane-wave solutions. In the approximation of a nucleon at rest the corresponding „adhering fields“ are calculated by means of a method similar to the strong-coupling approximation. Among the results are: the existence of isobaric states, form factors and core effects. It is difficult to understand how far these results depend upon the introduced approximations.

M. E. Mayer.

Mittelstaedt, P.: Zur Streuung von K^- -Mesonen an komplexen Kernen. *Nuclear Phys.* **6**, 50—54 (1958).

The investigations of the K^- -meson-nucleus scattering by means of the optical model have shown that the imaginary part of the optical potential is very large while the real part almost vanishes. Here it is shown that the vanishing of the real part of the optical potential results from the strong absorption of K^- -mesons in the K^- -nucleon scattering process.

Engl. Zusammenfassg. des Autors.

Feldman, Gordon and P. T. Matthews: Hyperon production in nucleon-nucleon collisions. *Phys. Review*, II. Ser. **109**, 546—550 (1958).

Amai, Saburo, Hiroshi Fukuda, Chikashi Iso and Masatomo Sato: **Hydrodynamical treatment of multiple meson production in high energy nucleon-nucleus collisions.** Progress theor. Phys. **17**, 241—287 (1957).

Die von Landau und Mitarbeitern [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. fiz. **17**, 51—64 (1953)] verbesserte Fermische Theorie der Vielfacherzeugung von Mesonen beim Nukleonenstoß wird auf den Stoß von Nukleonen mit Kernen angewendet, da experimentell diese Situation i. a. vorliegt. Es wird darauf hingewiesen, daß die Abhängigkeit der Multiplizität von der Kernmassenzahl kein empfindliches Mittel ist, um zwischen dem ursprünglichen Fermischen Ansatz und der hydrodynamischen Berücksichtigung der Meson-Meson-Wechselwirkungen durch Landau zu unterscheiden. Daher werden „dynamische“ Eigenschaften der Sekundärteilchen berechnet: Winkelverteilung, Energiespektrum, transversale Impulse. Zum Vergleich mit dem Experiment liegt noch nicht genügend Erfahrungsmaterial vor. *H. Rollnik.*

Marschall, H. und Th. Schmidt: **Potentialkurven und Energieniveaus der μ -Mesonenmoleküle ($p p \mu$, $(dp) \mu$, $(dd) \mu$.** Z. Phys. **150**, 293—298 (1958).

Es wird gezeigt, daß die Born-Oppenheimer-Näherung bei den μ -Mesonenmolekülen infolge der großen μ -Mesonenmasse zu erheblichen Fehlern führen kann. Anschließend wird ein Verfahren vorgeschlagen, das die näherungsweise Berechnung von Potentialkurven und Energieniveaus gestattet. Die Ergebnisse der Rechnung werden für die $(p p) \mu$ - und $(dd) \mu$ -Moleküle mitgeteilt.

Zusammenfassg. des Verfassers.

Ferretti, B.: **On the conservation of lepton number.** Nuovo Cimento, X. Ser. **6**, 999—1000 (1957).

Die Betrachtungen von Pauli (dies. Zbl. **77**, 431) über die Unabhängigkeit des Satzes über die Erhaltung der Leptonenzahl von den anderen Invarianzeigenschaften der Theorie der schwachen Wechselwirkungen werden auf Wechselwirkungen mit μ -Mesonen ausgedehnt. Vgl. auch die spätere, ausführlichere Arbeit von Gatto und Lüders, Nuovo Cimento, X. Ser. **7**, 806—820 (1957). *M. E. Mayer.*

Kernphysik:

Newton, Roger G. and Thomas Fulton: **Phenomenological neutron-proton potentials.** Phys. Review, II. Ser. **107**, 1103—1111 (1957).

Es werden aus dem Neutron-Proton-Triplett-Zustand Zentral-, Tensor- und Spinbahnkopplungspotentiale berechnet. Sie gestatten eine explizite Lösung der Schrödingergleichung und geben die niederenergetischen Daten, wie effektive Reichweite, Streulänge, Deuteron-Bindungsenergie, Quadrupole-Moment und D -Zustands-Beimischung, richtig wieder. Es werden außerdem sowohl die Deuteron-Wellenfunktion als auch die Streu-Wellenfunktionen, die aus diesen Potentialen sich ergeben, berechnet. Das Potential und die Wellenfunktion, die den Singulettzustand richtig wiedergeben, werden ebenfalls erhalten.

F. Winterberg.

Kanellopoulos, T. V. and G. E. Brown: **Polarization experiments in proton-proton scattering.** Proc. phys. Soc., Sect. A **70**, 690—702 (1957).

Die Verff. untersuchen verschiedene Polarisationsexperimente bei Streuung von Protonen an Protonen hinsichtlich ihrer theoretischen Voraussagen. Dabei bedienen sie sich der statistischen Matrix für Spin-1/2-Partikel und einer Darstellung der Streumatrix im Spinraum. Hauptzweck der Arbeit ist eine vollständige Zusammenstellung von Formeln über alle in Zukunft möglichen Experimente zu geben. In einer späteren Arbeit sollen dann detailliertere Experimente behandelt werden.

P. Urban.

Brown, G. E. and T. V. Kanellopoulos: **Analysis in coincidence in proton-proton scattering.** Proc. Phys. Soc., Sect. A **70**, 703—707 (1957).

Die Verff. diskutieren Experimente, welche Koinzidenzen enthalten. Speziell wird der Fall genauer behandelt, bei welchem der einfallende Strahl unpolarisiert ist. Ferner wird auch der Fall des einfallenden polarisierten Strahles kurz erörtert und die Möglichkeiten bei Verwendung eines Magnetfeldes kurz skizziert. *P. Urban.*

Rassey, A. J.: Nucleonic binding states in nonspherical nuclei: Asymptotic representation. Phys. Review, II. Ser. **109**, 949—957 (1958).

An alternative description is given for Nilsson's analysis of nucleonic motion in a strongly deformed nuclear field. The aim is to obtain the single-particle states for the region of strong deformation in terms of a representation which is especially suited for that region in contrast to the spherical representation used by Nilsson. The eigenvectors of a 3-dimensional anisotropic harmonic oscillator (H.O.) are used as a basic set to calculate the singleparticle wave functions and energy eigenvalues. Two immediate advantages of this basic set are: first, the matrix elements between single-particle states are expressible in terms of the rather simple analytic expressions obtained for these matrix elements in the H.O. representation and second, the expansion of the particle wave functions generally is rather pure, so that in many instances the leading term in the expansion is sufficient for calculations. Thus, good approximate calculations are easily obtainable. New approximate transition selection rules are given for allowed and first-forbidden β decay. For allowed transitions the relative speed varies approximately as $10^{| \Delta N_z |}$. For first forbidden transitions, relative speeds are tabulated as functions of ΔN_r . The latter transitions are generally cut down by a factor $(10^{-5} - 10^{-3})$ for $| \Delta N_r | \geq 2$.

Aus der Zusammenfassg. des Autors.

Tauber, G. E. and Ta-You Wu: Self-consistent treatment of the independent-particle central-field nuclear model. Phys. Review, II. Ser. **105**, 1772—1783 (1957).

In der vorliegenden Arbeit werden ausgehend von einem Potentialansatz $V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ zwischen den Nukleonen und der Einteilchenmodell-Zentralfeld-Näherung die Wellenfunktionen einiger Kerne mit dem Hartree-Fock-Verfahren berechnet. Der Potentialansatz wird an die Sättigungsbedingung und Eigenschaften des Zweikörper-Nukleon-Problems möglichst gut angepaßt. Numerische Rechnungen werden für die Kerne O^{15} , O^{16} und O^{17} durchgeführt. Als unbestimmter Parameter, der mit den Experimenten verglichen werden soll, wird die Potentialtiefe V_0 des Zweikörperpotentials genommen. Es zeigt sich, daß für alle gerechneten Beispiele etwa dasselbe V_0 die experimentellen Werte deckt.

F. Winterberg.

Moshinsky, Marcos: Velocity-dependent forces and nuclear structure. I. Central forces. Phys. Review, II. Ser. **106**, 117—123 (1957).

Brueckner und Mitarbeiter haben kürzlich gezeigt (dies. Zbl. **64**, 226), daß die Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen praktisch unabhängig davon ist, ob die Nukleonen frei sind oder sich in einem Kern befinden. Wenn man nun mit störungstheoretischen Methoden die Energieniveaus eines Kerns ausrechnet, so überlagern sich die Einflüsse der einzelnen Kraftterme additiv, es müßte daher möglich sein, den Einfluß der geschwindigkeitsabhängigen Kräfte von dem anderer Kraftterme zu trennen. Verf. entwirft daher in der vorliegenden Arbeit eine Methode, aus der Schalentheorie der Atomkerne Auskunft über den einfachsten Typ einer zentralen geschwindigkeitsabhängigen Kraft zu bekommen. Für 2- und 3-Teilchensysteme lassen sich so aus der Termordnung und dem Termdrehimpuls Schlüsse über Stärke und Reichweite des geschwindigkeitsabhängigen Zusatzterms ziehen.

F. Cap.

Griffin, James J. and John A. Wheeler: Collective motions in nuclei by the method of generator coordinates. Phys. Review, II. Ser. **108**, 311—327 (1957).

Es wird eine Methode entwickelt, um aus dem Vielkörperproblem der Nukleonen im Atomkern näherungsweise Gleichungen für die kollektive Bewegung im Sinne des Modells von A. Bohr und Mottelson zu gewinnen. Das Ausgangssystem besteht aus A Nukleonen in paarweiser Wechselwirkung. Das quantenmechanische Eigenwertproblem wird auf das Variationsproblem zurückgeführt, die Gesamtenergie minimal zu machen. Das Variationsproblem wird näherungsweise durch eine Versuchsfunktion

$$\Psi(x) = \int \varphi(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha$$

gelöst. x ist die Gesamtheit der Nukleonenkoordinaten, α ein Satz von Parametern, die den Freiheitsgraden der kollektiven Oberflächenbewegung entsprechen sollen. φ soll dabei Lösung der Schrödingergleichung der wechselwirkungsfrei gedachten

Nukleonen in einem fiktiven Potential sein, dessen Gestalt durch α (generator coordinates) beschrieben werde. Der Ansatz verzichtet auf Erfassung von Korrelationen zwischen den Nukleonen. Das Variationsprinzip führt auf eine Integralgleichung für $f(\alpha)$, deren Kern im Prinzip durch φ festgelegt ist. Hier werden für den Kern direkt zwei einfache Ansätze diskutiert. Der erste ist quadratisch und ergibt eine lösbare Integralgleichung. Im zweiten wird der Kern als δ -artige singuläre Funktion angesetzt, so daß die Integralgleichung auf eine Differentialgleichung für $f(\alpha)$ reduziert wird, die als Schrödingergleichung der Kollektivbewegung gedeutet wird. In einer unmittelbar anschließenden Arbeit von James J. Griffin [Phys. Review, II. Ser. 108, 328—335 (1957)] wird diese Methode verwendet, um die Dilatations- und Quadrupolschwingungen sowie die Rotationen des Kernes O^{16} zu berechnen. Hierbei wurde der Kern der Integralgleichung für $f(\alpha)$ aus den φ berechnet, die zu Oszillatorpotentialen gehören.

F. Schlögl.

Lüders, Gerhart: Zu den Rotationszuständen der Atomkerne. II: Auswirkung der K-Beimischung. Z. Naturforsch. 12a, 353—362 (1957).

Im ersten Teil der Arbeit (s. dies. Zbl. 72, 453) wurde bereits gezeigt, daß die Drehimpulskomponente K in Richtung der Figurenachse eines deformierten Atomkerns keineswegs immer eine Bewegungskonstante ist, was bisher in den Arbeiten über das Bohr-Mottelsonsche Tröpfchenmodell angenommen wurde. Im vorliegenden zweiten Teil wird dieser Gedanke weitergeführt und untersucht, in welcher Weise sich Beimischungen von Zuständen mit verschiedenen K -Werten auf die Kerneigenschaften auswirken. Es zeigt sich, daß innerhalb einer Rotationsbande die elektromagnetischen Übergangswahrscheinlichkeiten (M 1 und E 2) praktisch unabhängig von K -Beimischungen sind, dagegen beeinflussen diese die Kernmomente und die Wahrscheinlichkeiten für Übergänge zwischen Niveaus verschiedener Banden.

K. Wildermuth.

Primas, H.: Ein Kernresonanzspektrograph mit hoher Auflösung. I: Theorie der Liniendeformationen in der hochauflösenden Kernresonanzspektroskopie. Helvet. phys. Acta 30, 297—314 (1957).

Die Arbeit behandelt hauptsächlich solche Deformationen der in der Kernresonanzspektroskopie erhaltenen Kernresonanzsignale, welche durch stochastisch räumlich inhomogene bzw. zeitlich stochastisch schwankende Magnetfelder hervorgerufen sind. Im ersten Teil der Arbeit wird die Linienform eines Signals 1. für ein axialsymmetrisches Feld 2. Ordnung, 2. für ein lineares Magnetfeld, 3. für ein räumlich stochastisches Magnetfeld und 4. für dasselbe, aber bei rotierender Probe bestimmt, wobei in den letzten zwei Fällen angenommen wird, daß die Unebenheiten der Polschuhe einen zweidimensionalen Gaußschen stochastischen Prozeß darstellen. Der zweite Teil beschäftigt sich mit denjenigen Deformationen der Linienform eines Signals, zu welchen ein zeitlich stochastisch variables Magnetfeld Anlaß gibt. (Durch solche Schwankungen wird das Auflösungsvermögen des Spektrographen stark beeinflußt.) Auch hier wird angenommen, daß die Magnetfeldschwankung durch einen Gaußschen Prozeß darstellbar ist. Nach der Einführung eines passend gewählten Merkmals für die „Güte eines Kernresonanzsignals“ untersucht Verf., in welcher Art dieses Merkmal durch Apparatenkonstanten bzw. das Powerspektrum der Magnetfeldschwankungen beeinflußt wird; daraus werden praktische Hinweise dafür, wie man eine bestimmte Auflösung erreichen kann, erhalten. Die Behandlung der Probleme stützt sich wesentlich auf eine Arbeit von F. Bloch [Phys. Review 70, 460 (1946)], sowie auch auf einzelne z. Z. noch unpublizierte Resultate des Verf.

P. Medgyessy.

Brown, G. E. and C. T. de Dominicis: Elastic scattering of low energy nucleons by complex nuclei. Proc. phys. Soc., Sect. A 70, 668—680 (1957).

In der vorliegenden Arbeit wird die elastische Streuung von niederenergetischen Nukleonen an komplexen Kernen im Rahmen der Kerndispersionstheorie behandelt.

Auf Grund eines Vorschlages von Peierls verwenden die Verff. ein Bild, in welchem die Niveaus des Compoundkernes als Funktion der Energie Einpartikelstruktur besitzen. Zweck der vorliegenden Arbeit ist, auf Grund dieser Annahme ein tieferes Verständnis des optischen Potentialmodelles zu erlangen. Der imaginäre Anteil dieses Potentials steht natürlich mit der Absorption in Beziehung. *P. Urban.*

Brown, G. E. and C. T. de Dominicis: Direct interaction and nuclear dispersion theory. Proc. phys. Soc., Sect. A **70**, 686—689 (1957).

Die Verff. behandeln in dieser Arbeit das Problem der inelastischen Streuung von Nukleonen auf Grund der Kerndispersionstheorie von Kapur und Peierls. Dabei wird der Fall besonders diskutiert, in welchem der Restkern wenig angeregt ist, und gezeigt, daß die Beiträge der entfernteren Kernniveaus explizit summiert werden können. Der gefundene Ausdruck ist ganz ähnlich jenem, der meist bei direkter Wechselwirkung Verwendung findet, um den differentiellen Wirkungsquerschnitt zu ermitteln. Die Beiträge von den näheren Compoundkernniveaus können nicht explizit aufsummiert werden und die Phasenbeziehungen außer acht gelassen werden. *P. Urban.*

Butler, S. T.: Direct nuclear reactions. Phys. Review, II. Ser. **106**, 272—286 (1957).

Mit Hinblick auf den Deuteron „stripping process“ (über den Verf. ein Buch veröffentlicht hat) beschäftigt sich Verf. mit dem Problem, ob Kernreaktionen, die zu einem tief liegenden Term des Endkerns führen, „direkt“, d. h. ohne Bildung eines Zwischenkerns, verlaufen. Für die Klasse solcher direkter Reaktionen werden nun differentielle Wirkungsquerschnitte berechnet, wobei es gelingt, mit Hilfe der vom Deuteron stripping-Prozeß bekannten Näherungen geschlossene Ausdrücke zu erzielen. Es zeigt sich, daß die Winkelverteilungen vom Spin und der Parität der beteiligten Partner abhängen, und daß auch ganz allgemein aus diesen Rechnungen Schlüsse über die Kernstruktur gezogen werden können. *F. Cap.*

Weidenmüller, Hans-Arwed: Nukleonenpolarisation bei Strippingreaktionen. Z. Phys. **150**, 389—406 (1958).

Ausgehend von dem üblichen Matricelement für Strippingreaktionen werden der Einfluß der Tensorkraft des Deuteronen und der Abweichung von reiner $j-j$ -Kopplung für das eingefangene Nukleon auf die Polarisation der freigesetzten Nukleonen untersucht. Die Polarisation ist durch die Phasen der elastischen Streuung von Deuteron und freigesetztem Nukleon am Target- bzw. Endkern bestimmt. Der Einfluß dieser Streuphasen auf die Polarisation wird numerisch untersucht.

Aus der Zusammenfassg. des Autors.

Lapidus, L. I.: Time reversal and polarization phenomena in $N + N \rightleftharpoons d + \pi$ reactions. Nuclear Phys. **4**, 145—156 (1957).

Die Reaktionen (a) $N + N \rightarrow D + \pi$ und (b) $D + \pi \rightarrow N + N$ werden betrachtet. Aus der Invarianz gegen Zeitumkehr folgt bekanntlich die Gleichheit der Wirkungsquerschnitte für a und b bei Mittelung über alle Spins. (Detailed balance) Die Zeitumkehr-Invarianz erlaubt jedoch weitere Schlüsse über Polarisations-Phänomene bei den beiden Reaktionen. Z. B. ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Mesonen-Erzeugung durch polarisierte Nukleonen nach a verknüpft mit der Polarisation der in b entstehenden Nukleonen. Verf. gibt ferner allgemeine Ausdrücke für S-Matrix-Element usf. für die beiden Reaktionen mit s-, p-, und d-Wellen-Mesonen sowie $J \leq 2$, die bei Analysen experimenteller Daten nützlich sein könnten. *G. Grawert.*

Capps, R. H.: Photon scattering from protons and deuterons. Phys. Review, II. Ser. **106**, 1031—1042 (1957).

Der Verf. untersucht die Streuung von Photonen der Energie 100 bis 200 MeV an Protonen und Deuteronen, wobei er ein Modell zugrunde legt, das nur elektrische und magnetische Dipole enthält. Dabei werden zwei Dispersionsrelationen verwendet und die Verhältnisse bei der Photon-Pion-Erzeugung an Nukleonen als richtungs-

gebend zugrunde gelegt. Der Verf. macht mehrere Näherungen bei der Diskussion der Photon-Deuteron-Streuung und schätzt die Genauigkeit derselben auch ab. Im Falle dieses Modelles ist der Photon-Proton-Wirkungsquerschnitt und die Summe aus elastischen und inelastischen Photon-Deuteron-Wirkungsquerschnitten am größten für nach rückwärts gerichtete Streuwinkel. Zum Abschluß werden noch mehrere Arten von Photon-Deuteron-Streuexperimenten kurz diskutiert. *P. Urban.*

Akiba, Tomoya and Iwao Sato: The dispersion relations for the scattering of photons from proton. *Progress theor. Phys.* 19, 93—111 (1958).

Gottfried, Kurt: On the determination of the nuclear pair correlation function from the high energy photo-effect. *Nuclear Phys.* 5, 557—587 (1957).

In accordance with Lvinger's predictions, the absorption of a high energy photon frequently results in the simultaneous ejection of a neutron and proton. The present paper provides a theoretical analysis of this direct reaction which starts from first principles and is based on the following assumptions: (i) the impulse and closure approximations are valid, (ii) the photo-nuclear interaction is a sum of two-nucleon operators, and (iii) the pair correlation function is given by $\varrho_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) |g(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)|^2$ where ϱ_s is the shell model correlation function and $g(x)$ contains those correlations directly due to nuclear forces. The cross section is then shown to be proportional to the probability for finding two nucleons with a certain total momentum in a relative S-state, the contributions from P-states being demonstrably small. Zusammenfassg. des Autors.

Urin, M. G. and V. N. Mochov (Mokhov): Polarization of relativistic protons in coulomb scattering. *Soviet Phys., JETP* 4, 738—740 (1957), Übersetz. von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* 31, 842—844 (1956).

Die Verf. berechnen die Polarisierung von relativistischen Protonen im Falle der Coulombstreuung unter Verwendung einer Störungstheorie. Dabei schließen sich die Verf. an eine frühere Arbeit von L. L. Foldy (dies. Zbl. 48, 443) an, in welcher die Wechselwirkung zwischen dem Teilchen mit Spin 1/2 und dem elektromagnetischen Feld besonders einfach dargestellt wird. Das Ergebnis kann auch als eine Korrektur der Polarisierung bei Kernstreuung verwendet werden. *P. Urban.*

Hofstadter, Robert: Nuclear and nucleon scattering of high-energy electrons. *Ann. Review. Nuclear Sci.* 7, 231—316 (1957).

Streuung von hochenergetischen Elektronen (einige Hundert MeV) an Kernen und Nukleonen ist eines der erfolgreichsten Mittel, sich Aufschluß über die Struktur dieser Gebilde zu verschaffen. Zuerst wird die Bornsche Näherung an spinlosen Teilchen demonstriert; hierauf wird die Rechnung auf Elektronen mit Spin ausgedehnt und elastische Streuung besonders berücksichtigt. Hierbei tritt schon der Formfaktor der Ladungsverteilung des Streuers auf. Die magnetische Streuung eines punktförmigen und hierauf eines endlichen Nukleons wird berechnet. Formfaktoren für Ladung und normales sowie für anomales magnetisches Moment gehen in die Rechnung ein. Hierauf wird die Elektronenstreuung an Deuteronen besprochen. Streuung erfolgt am Schwere-Partikel-Modell durch Ladung, Quadrupol- und magnetisches Moment des Deuterons. Hierauf wird auf endliche Deuteronbestandteile erweitert, was natürliche andere Formfaktoren zur Folge hat. Es folgt unelastische Streuung (Elektrodesintegration) des Deuterons. Dies kann für bekannten Proton-Wirkungsquerschnitt benützt werden, den Formfaktor des Neutrons zu studieren. Nach kurzer Erwähnung des α -Teilchens werden Kerne der 1 *p*-Schale besprochen. Das Schalenmodell mit unendlichem harmonischen Potentialtopf gibt die Ladungsverteilung gut wieder. Die Unzulänglichkeiten der Bornschen Näherung werden durch die exakte Phasenunterschiedmethode vermieden, was für mehrere schwerere Kerne veranschaulicht wird. Verschiedene Modellverteilungen werden verglichen. Das Fermi-Modell wird Ladungsdichtevergleichen benachbarter Kerne zugrunde gelegt. Kerne höherer Ladung haben kleinere zentrale Durchschnittsladungsdichte. Die Hautdicke kann für alle Kerne als konstant angenommen werden. Der Größenparameter r_0 schwankt zwischen 1.18 und 1.40×10^{-13} cm. *O. Hittmair.*

Berichtigungen zu Bd. 77.

Suliński, A.: Some characterisation of the Brown-McCoy radical. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **5**, 357—359 (1957); dies. Zbl. **77**, 39.

In Zeile 15 v. u. des Referats lies
 $„0 \rightarrow M \rightarrow R \rightarrow S \Rightarrow 0“$ statt $„0 \rightarrow M \rightarrow S \rightarrow 0“$.

Murase, Itiro: Semimagic squares and non-semisimple algebras. Amer. math. Monthly **64**, 168—173 (1957); dies. Zbl. **77**, 42.

Nachträglich bemerkte Ref., daß bereits R. Kochendörffer (dies. Zbl. **31**, 200), angeregt durch eine von M. Eichler gestellte Aufgabe [J-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **52**, 47, Aufg. 317 (1942)], die Struktur der Algebra aller zeilen-semimagischen Quadrate, die gleichzeitig spalten-semimagisch sind, studiert hat.

H.-J. Hoehnke.

Dixmier, M. J.: Homologie des anneaux de Lie. Ann. sci. Écol. norm. sup., III. Sér. **74**, 23—83 (1957); dies. Zbl. **77**, 43.

In der Überschrift des Referats lies „Dixmier, J.“ statt „Dixmier, M. J.“

Chak, A. M.: On an analogous Fourier series and its conjugate series. Math. Student **24**, 193—202 (1957); dies. Zbl. **77**, 71.

In der vorletzten Zeile des Referats lies „theorems“ statt „theorem“.

Ehrenpreis, Leon: Sheaves and differential equations. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 1131—1138 (1957); dies. Zbl. **77**, 92—93.

Auf S. 93, in Zeile 10 v. o. lies „function f “ statt „function“.

Roumieu, Charles: Sur le problème aux valeurs initiales pour une équation de convolution homogène à une variable. C. r. Acad. Sci., Paris **244**, 430—432 (1957); dies. Zbl. **77**, 106.

In der letzten Zeile des Referats lies $„] - l, + \infty[“$ statt $„] - b, + \infty[“$.

Wilder, R. L.: Some consequences of a method of proof of J. H. C. Whitehead. Michigan math. J. **4**, 27—31 (1957); dies. Zbl. **77**, 164.

In Zeile 4 v. o. des Referats lies „Lemma 2“ statt „Lemma 5“.

● **Kretzer, Kurt** (Herausgeber): Handbuch für Hochfrequenz- und Elektro-Techniker. Bd. IV. Berlin-Borsigwalde: Verlag für Radio-Foto-Kinotechnik 1957. 750 S. DM 15.—; dies. Zbl. **77**, 204.

Im Titel des Referats lies in der letzten Zeile „826 S., 769 Abb. Ganzln. DM 17,50.“ statt „750 S. DM 15.—.“

Trefall, H.: On the positive temperature effect in the cosmic radiation and the Π - μ decay. Physica **23**, 65—72 (1957); dies. Zbl. **77**, 230.

Im Titel der Arbeit lies „ π - μ decay“ statt „ Π - μ decay“.

Bratož, Savo: Le calcul non empirique des constantes de force et des dérivés du moment dipolaire. C. r. Acad. Sci., Paris **244**, 2050—2053 (1957); dies. Zbl. **77**, 233.

Das erste Wort des Referats soll „Two“ statt „The“ lauten.

Fan, Ky and Gordon Pall: Imbedding conditions for Hermitian and normal matrices. Canadian J. Math. **9**, 298—340 (1957); dies. Zbl. **77**, 245.

In Zeile 2 v. o. und in Zeile 2 v. u. des Referats lies „Unitärtransformierten“ statt „Unitärtransformation“.

Carlitz, L.: Some theorems on polynomials. Ark. Mat. **3**, 351—353 (1957); dies. Zbl. **77**, 261.

In Zeile 3 v. o. des Referats lies „discriminant“ statt „discriminate“.

Falgas, Maurice: Sur les domaines étoilés vérifiant certaines propriétés liées à la propriété de convexité. C. r. Acad. Sci., Paris **244**, 2275—2278 (1957); dies. Zbl. **77**, 286—287.

Auf S. 287, in der letzten Zeile des Referats lies „of finite order“ statt „of order“.

Gussi, G., V. Poenaru and K. Fojaš (Foiash): A direct method in the Cauchy problem for a quasi-linear hyperbolic equation involving two independent variables. Doklady Akad. Nauk SSSR 112, 381—382 (1957) [Russisch]; dies. Zbl. 77, 298.

Die Originalschreibweise für den Namen des dritten Verfassers der Arbeit ist C. Foiaş.

Lasota, A.: Sur une généralisation d'un problème de Z. Szmydt concernant l'équation $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III 5, 15—18, russ. Zusammenfassg. III (1957); dies. Zbl. 77, 298.

In Zeile 5 v. o. des Referats lies „ $u_y = h(y, u, u_x)$ “ statt „ $u_x = h(y, u, u_x)$ “.

Tomita, Minoru: Compositions of linear topological spaces. Math. J. Okayama Univ. 6, 191—208 (1957); dies. Zbl. 77, 308—309.

Auf S. 308, in Zeile 5 v. o. des Referats lies „ $|x_i| \geq |y_i|$ “ statt „ $|x_1| \geq |y_1|$ “.

Lax, P. D.: A Phragmén-Lindelöf theorem on harmonic analysis and its application to some questions in the theory of elliptic equations. Commun. pure appl. Math. 10, 361—389 (1957); dies. Zbl. 77, 315—316.

Im Titel des Referats lies in der ersten Zeile „in“ statt „on“.

Auf S. 315, in Zeile 7 v. u. lies „translation“ statt „translator“.

Wolf, František: Operators in Banach space which admit a generalized spectral decomposition. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 60, 302—311 (1957); dies. Zbl. 77, 317—318.

Auf S. 317 lies in Zeile 12 v. u. „ $d'E$ “ statt „ $d_i E$ “, in Zeile 4 v. u. „in \mathcal{B} “ statt „in B “.

Cameron, R. H.: Nonlinear Volterra functional equations and linear parabolic differential systems. J. Analyse math. 5, 136—182 (1957); dies. Zbl. 77, 320—322.

Auf S. 321 lies in der auf Formel (2) folgenden Zeile „ F^j “ statt „ F_j “; in Formel (3) im Zähler des Integranden „ G_μ “ statt „ Q_u “; in der auf Formel (4) folgenden Zeile „ v_{n-1} “ statt „ v_{-n1} “.

Werner, Helmut: Das Problem von Douglas für Flächen konstanter mittlerer Krümmung. Math. Ann. 133, 303—319 (1957); dies. Zbl. 77, 349—350.

Auf S. 349, in Zeile 4 v. u. lies „ ΔX “ statt „ Δx “.

Auf S. 350, in Zeile 7 v. u. des Referats lies „necessary“ statt „necesassary“.

Schmitz, Georg: Beitrag zur Geschwindigkeitskorrektur in Windkanälen bei kompressibler Unterschallströmung. Z. Flugwiss. 5, 169—172 (1957); dies. Zbl. 77, 389—390.

In der Formelzeile auf S. 390 muß vor dem Integralzeichen „ $-\frac{UV}{2\pi^2 R^3 \beta^3}$ “ statt „ $-\frac{1}{V} U$ “ stehen.

Meltzer, B.: A new approach to the theory of electrical conductivity of solids. Physica 23, 118—124 (1927); dies. Zbl. 77, 405.

In der Überschrift des Referats lies „(1957)“ statt „(1927)“.

In Zeile 4 v. u. des Referats lies „dem Gedanken“ statt „den Gedanken“.

Pétiau, Gérard: Sur la représentation des corpuscules élémentaires par des fonctions d'ondes solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris 244, 2580—2583 (1957); dies. Zbl. 77, 425.

Im Titel des Referats lies „Petiau“ statt „Pétiau“.

Gelernter, H.: Two-nucleon interaction at high energies and the Lévy potential. Phys. Review, II. Ser. 105, 1068—1074 (1957); dies. Zbl. 77, 433.

In Zeile 6 v. u. des Referats lies „range“ statt „ranging“.

Agodi, A.: On γ -polarization effects in photonuclear reactions. Nuovo Cimento, X. Ser. 5, 21—29 (1957); dies. Zbl. 77, 438.

In Zeile 4 v. o. des Referats lies „of the form“ statt „as follows: const“.

Levy de Bollini, S. P. and C. C. Bollini: Neutron flux within cylindrical air gaps. J. Nuclear Energy 5, 33—40 (1957); dies. Zbl. 77, 441.

Im Titel des Referats lies „C. G. Bollini“ statt „C. C. Bollini“.

Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben.

- Abasov, M. T. und K. N. Džalilov (Aufgaben der unterirdischen Hydrodynamik) 182.
- Abbi, S. S. and R. Chandra (Equilibrium of a liquid drop in an electric field) 430.
- Abe, Ryuzo (Many-body pseudopotential for hard-sphere interaction) 441.
- Aben, H. (Elastic stability of panel under shear) 381.
- Abrikosov, A. A. s. I. M. Chalatnikov 225.
- Abrol, Mohan Lal („ p “ in Bonnor's unified field theory) 434.
- Achiezer, N. I. und N. V. Efimov (B. J. Levin) 4.
- Achmedov (Akhmedov), K. T. (Cauchy problem in functional spaces) 118.
- Aczél, J. (Geometrische Objekte. III — V.) 139; (Lösung von Extremumsaufgaben mittels elementarer Ungleichungen) 246.
- Adachi, Ryuzo (Seismic prospecting) 392.
- Adams, E. N. (Energy bands) 228.
- Ernst (Schnellste Flugverbindung zwischen zwei Punkten) 372.
- J. F. (Groupes d'homotopie et groupes de cohomologie) 159.
- Aeppli, Alfred (Taktionsproblem von Apollonius) 131.
- Aeschlimann, Florence et Jean-Louis Destouches (Électromagnétisme non linéaire) 416.
- Agae, G. N. und A. A. Novruzov (Cauchysches Problem im Banachschen Raume) 118.
- Agodi, A. and M. Cini (Corrections to dispersion relations. II.) 206.
- Aharanov, Y. and D. Bohm (Velocity of relativistic particles) 196.
- Ajtmurzaev (Aitmurzaev), T. (Unsteady gas flow equations) 189.
- Akbar-Zadeh, Hassan (Espace d'éléments linéaires) 356.
- Akhieser, A. I. and A. G. Sitenko (Diffractional scattering of fast deuterons by nuclei) 217.
- Akiba, Tomoya and Iwao Sato (Dispersion relations for scattering of photons) 452.
- Al-Salam, Waleed A. (Turán expression) 257.
- Albert, A. A. (Norm form of a rational division algebra) 26.
- Aleksandran, R. A. (Korrektheit eines gemischten Problems) 84.
- Aleskerov, S. A., Ju. A. Babič, V. I. Motjakov und K. M. Čal'jan (Aufgaben, die durch eine Fouriersche Gleichung beschrieben werden) 128.
- Alexandroff (Aleksandrov), P. (Mengentheoretische Topologie) 360.
- und B. Pasynkov (Identische Abbildung eines Simplexes) 152.
- — — S. und V. M. Gluškov (A. G. Kuroš) 4.
- — —, I. N. Vekua, M. V. Keldyš und M. A. Lavrent'ev (V. I. Smirnov) 4.
- Alferjew, M. J. (Hydromechanik) 396.
- Aličaškin, Ja. I. (Zustrom unter Druck gegen unvollkommenes Bohrloch) 126; (Lösung nach der Geradenmethode) 126.
- Allachverdiev (Allakhverdiev), Dž. É. (J. E.) (Eigenfunktionen nicht-selbstadjungierter Operatoren) 296; (Elemente von non-selfadjointed operators) 297.
- Altman, M. (Intersection theorem) 116; (Fixed point theorem) 117; (Linear equations in a Hilbert space) 123; (Orthogonal projection) 299; (Non-linear functional equations) 299; (Operator equations in Hilbert space) 299; 300; (Galerkin's approximate process) 300.
- Amai, Saburo, Hiroshi Fukuda, Chikashi Iso und Masatomo Sato (Multiple meson production) 448.
- Amati, D. and B. Vitale (Dispersion relations for heavy meson-nucleon interaction. I.) 205; (Low energy K -nucleon scattering) 205.
- Ambrose, W. (Theorem of Myers) 142.
- Amemiya, Ichiro ((F) and (DF) spaces) 287.
- Amenzade, Ju. A. (Yu. A.) (Bending of a prismatic rod) 381.
- Amoroso, Luigi (Equazione canonica della funzione logistica) 337.
- Anastassiadis, Jean (Solutions logarithmiquement convexes ou concaves d'une équation fonctionnelle) 259.
- Andersen, A. F. (Convergence theorem of Dedekind) 51.
- Andersson, Bengt J. (Measurement of velocity by Pitot tube) 172.
- André, Johannes et Peter Seibert (Systèmes d'équations différentielles) 128.
- Ankeny, N. C. (Sums of three squares) 36.
- ApSimon, H. G. (Geodesic opposites on a tetrahedron) 344.
- Aquaro, Giovanni (Applications multivalentes d'un espace topologique) 361.
- Arató, M. and A. Rényi (Approximation of continuous functions) 55.
- Archipov, V. N. (Stabilität der laminaren Begleitzone) 404.
- Arens, Richard and I. M. Singer (Generalized analytic functions) 109.
- Argyris, J. H. (Matrizentheorie der Statik) 380.
- Arinštejn (Arinstein), É. A. (Crystallization) 227.
- Arnold, K. (Tangente der Lotlinie) 238.
- Arrighi, Gino (Fondamenti della statica) 379.
- Arsove, Maynard G. (Products of subharmonic functions) 93.

- Artmann, Kurt (Elektronen-Korrelation in der Quantentheorie) 220.
- Artobolevskij (Artobolevsky), I. I. (Mechanical transformer) 137.
- — — — — und A. S. Ševčenko (unter der Redaktion von) (Mechanismen und Maschinen) 378.
- Ascoli, Giulio (Transformation of „Spin direction“) 436.
- Renato (Sistemi di riferimento „classici“ e „quantistici“) 189.
- Asplund, Edgar (Non-closed relative spectrum) 116.
- Atiyah, M. F. (Complex analytic connections in fibre bundles) 160.
- Atkinson, F. V. (Eigen-value occurring in a stability problem) 75.
- Audin, Maurice (Transformations qui vérifient une condition de Fredholm) 118.
- Aufgabensammlung. Geometrie. 2.
- Aumann, Robert J. (Asphericity of alternating knots) 164.
- Auslander, Maurice and David A. Buchsbaum (Homological dimension in local rings) 28.
- Austern, N. s. J. S. Levinger 440.
- Austin, T., R. Fagen, T. Lehrer and W. Penney (Locally maximal elements in a random sample) 10.
- Ayer, A. J. (Probability as a logical relation) 438.
- Azbel', M. Ja. s. I. M. Lifsič 229.
- Babbage, D. W. (Pencil of quadric primals) 133.
- Babič, Ju. A. s. S. A. Aleskerov 128.
- Babuška, Ivo (Schwarzsche Algorithmen) 303.
- Bacchiani, Raul (Geometria del triangolo) 131.
- Baehr, H. D. (Wärmespannungen in ausgemauerten Behältern) 385.
- Baer, Reinhold (Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen) 15; (Algebraic closure of fields) 27.
- Baerwald, H. G. (Ferroelectric ceramics) 234.
- Bagemihl, F. (Holomorphic functions near essential singularities) 62.
- Baiada, E. e G. Cardamone (Variazione totale e lunghezza di una curva) 47.
- Baillard, Guy (Ondes longitudinales dans un milieu élastique) 392.
- Bajraktarević, M. (Solution monotone d'une équation fonctionnelle) 300.
- Bakel'man (Backelman), I. Ja. (E. J.) (Monge-Ampère's equations) 89.
- Balaguer, Ferran Sunyer i s. Sunyer i Balaguer, Ferran 46.
- Balázs, J. and P. Turán (Interpolation. II.) 54.
- Balazs, Nandor L. (Motion of a mirror in superfluid helium) 414.
- Balcerzyk, S. and Jan Mycielski (Method of category) 362.
- s. Jan Mycielski 362.
- Barancev (Barantsev), R. G. (Boundary problem for $\psi_{\sigma\sigma} - K(\sigma)\psi_{00} = 0$) 85.
- Barasšnikov (Barashenkov), V. S. (A relativistically invariant theory of extended particles) 210.
- Barber, A. D. s. B. A. Boley 384.
- Barbera, Alberto La s. La Barbera, Alberto 131, 132.
- Barbot, Jacques (Assurance temporaire) 338.
- Barbour, J. M. (Geometrical approximation to roots of numbers) 132.
- Barbuti, Ugo (t_{∞} -similitudine tra matrici) 271.
- Bardoni, Piero Giorgio (Teoria statistica dei solidi considerati come insiemi di oscillatori) 226.
- Barlett, R. H., M. H. Rice and R. H. Good jr. (Coulomb wave functions) 196.
- Barnes, E. S. (Senary forms) 37; (Theorem of Voronoi) 37.
- Barnhart jr., K. E. and Werner Goldsmith (Stresses in beams during transverse impact) 393.
- Baron, M. L. (Response of boundaries to shock waves) 174.
- Barra, Jean-Renée (Fonctions de répartition empiriques) 313.
- Barriol, J. (Moments dipolaires) 234.
- Barton, D. E. (Neyman's contagious distribution) 313.
- Basch, A. (Invariants des ebenen Laplaceschen Feldes) 349.
- Basmann, R. L. (Linear estimation of coefficients in a structural equation) 340.
- Bass, F. G. (Increase in conductivity of atomic semiconductors) 230.
- — — — — and I. M. Cidil'kovskij (Tsidil'kovskii) (Isothermal galvanomagnetic effects in semiconductors) 230.
- Jean et Jean-Paul Bertrandias (Moyennes de sommes trigonométriques) 320.
- Robert W. (Functional relation $Y(t+s) = Y(t) \cdot Y(s)$) 275.
- Bates, D. R. (Slow collisions between heavy particles) 442.
- Bauer, Friedrich L. (Treppeniteration) 121; (Numerische Verfahren für programmierte Rechenanlagen. II.) 306.
- M. and M. Moshinsky (Repulsive core) 214.
- Baumslag, Gilbert (Theorem on infinite groups) 15.
- Baxter, Glen and M. D. Donsker (Distribution of the supremum functional) 320.
- Bayer, Horst (Brechungsindex und Dielektrizitätskonstante) 221.
- Báz, A. I. (Single particle wave functions in relative motion of nucleons) 214.
- Beauregard, Olivier Costa de s. Costa de Beauregard, Olivier 194, 200.
- Beaver, William L. (Flux plotting analog) 183.
- Becker, E. (Grenzschicht in Expansionswelle) 175.
- Beckmann, Peter (Watson-Transformation) 186.
- Behari, Ram s. Gita Halder 141.
- Behnke, Henri (Enseignement secondaire et l'enseignement universitaire en Allemagne) 1.
- Behrends, R. E. and C. Frons-dal (Fermi decay of higher spin particles) 199.
- Bel, Louis (Dérivées des potentiels de gravitation) 190.
- Beleckij (Beletsky), V. V. (Motion of a solid under the action of a central Newtonian field) 377.
- Belford, G., L. Jackson Laslett and J. N. Snyder (Hill equation) 129.

- Beljaev, N. M. (Elastizität und Plastizität) 387.
- Bellert, S. (Operational calculus) 115.
- Bellman, Richard (Dynamic programming. VII.) 95; (Notes on matrix-theory. X.) 124; (Fundamental identity of Wald) 319; (Markovian decision process) 341.
- , Robert Kalaba and G. Milton Wing (Principle of invariant imbedding) 218.
- Bendat, Julius S. (Atmospheric turbulence gust velocities) 240.
- Bender, Peter L. (Diffusion of particles with memory) 326.
- Benthem, C. W. s. J. A. Sparenberg 96.
- Bereis, R. und H. Brauner (Koaxialeuklidische Schraubungen) 346.
- Berezin, F. A. and F. I. Karpelevič (Karpelevich) (Zonal spherical functions) 92.
- Berg, Lothar (Unharmonische trigonometrische Reihen) 57; (Interpolationsproblem) 252.
- Berge, Claude (Topological games) 329.
- Berghuys, J. J. W. (Intuition der Geometrie) 5.
- Bergmann, Peter G. (Two-component spinors) 191.
- s. Joel L. Lebowitz 412.
- Bergström, Harald (Limit theorems for convolutions of distribution functions. I.) 314.
- Berkovitz, L. D. and W. H. Fleming (Differential games) 330.
- Berman, S. D. und V. V. Ljubimov (Gruppen, die Permutationen der Faktoren einer Kompositionsreihe zulassen) 14.
- Berry, D. S. (Stress pulses in visco-elastic rods) 394.
- Berstein (Berštejn), I. (Periodical solutions of non-linear systems) 272.
- Bertrandias, Jean-Paul s. Jean Bass 320.
- Bess, Leon (Radiationless recombination in semi-conductors) 231.
- Bessaga, C. (Bases in spaces of continuous functions) 290.
- Beyer, Rudolf s. Kurt Hain 380.
- Bhaskaran, M. (Theorems on congruence) 34.
- Bhatnagar, P. L. s. Pyare Lal 430.
- Bhatt, S. N. (Negative order summability of a Fourier series) 254.
- Białynicki-Birula, I. (Internal degrees of freedom in quantum field theory) 212.
- Biberman, L. M. and B. A. Veklenko (Application of random processes to radiation transfer phenomena) 425.
- Bibliographische Quellen zur Mathematik und Mechanik. 2.
- Bicadze (Bitsadze), A. V. (Elliptical systems of differential equations) 90.
- Bichelli, Pirro (Problema geometrico di da Vinci) 131.
- Biedenbarn, L. C. s. R. M. Thaler 215.
- Bielecki, Adam (Méthode du rétracte de T. Ważewski) 72; (Équations au paratangent) 73; (Axiomes d'incidence, d'ordre et de congruence de Hilbert) 129.
- Biernacki, Mieczysław (Caractéristique $T(f)$ des fonctions méromorphes dans un cercle) 263.
- and Jan Krzyż (Monotonicity of functionals) 264.
- Billevič (Billevich), K. K. (Identity of two algebraic fields of order n) 29; (Einheiten algebraischer Körper) 29.
- Bilo, Julien (Transformation quadratique) 348.
- Binet, F. E. s. G. Szekeres 20.
- Bing, R. H. (Upper semicontinuous decompositions of E^3) 152.
- Biot, M. A. (Thermal stresses on supersonic wings) 406; (Heat flow analysis) 414.
- Biran, Lutfi (Problème de géométrie différentielle) 138.
- Biswas, S. N. s. H. S. Green 198.
- Bizadse, W. A. (Gleichungen vom gemischten Typus) 85.
- Blackwell, David (Discrete variables) 316.
- Blades, John D. s. Carl A. Ludeke 378.
- Blanché, Robert (Connectifs interpositionnels binaires) 6.
- Blaney, Hugh (Davenport-Heilbronn theorem) 39.
- Bleaney, B. s. B. I. Bleaney 416.
- I. and B. Bleaney (Electricity and magnetism) 416.
- Blenk, H. (H. Bilharz) 3.
- Hermann (herausgegeben. von) und Werner Schulz (Schriftleitung) (Jahrbuch 1956 der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt) 167.
- Blitzer, Leon (IGY satellite orbit) 235.
- Boas jr., R. P. (Functions which are odd) 48; (Growth of derivatives of entire functions) 262.
- Bocchieri, P. and A. Loinger (Quantum recurrence theorem) 412.
- Bočvar, D. A. (Frage der Paradoxia) 243.
- Bodewig, E. (Matrizenkalkül. V.) 301.
- Boerboom, A. J. H. (Aberrations in focusing properties of a magnetic field) 427.
- Boggio, Tommaso (Teorema di Almansi) 94.
- Bohm, D. (Explanation of quantum theory) 438.
- s. Y. Aharonov 196.
- Boley, B. A. (Thermoelastic beam deflections) 385.
- and A. D. Barber (Dynamic response of beams to rapid heating) 384.
- Bolie, Victor W. (Scattering from a nearly transparent anomaly) 185.
- Bolton, H. C. and H. I. Scoins (Eigenvalue problems. II.) 125.
- Bompiani, E. (Trasporto di elementi di 2° ordine) 356.
- Bomze, Josef (Konservative elektrische Ladungsbewegungen) 417.
- Bonami, A. A. (Means of moduli of analytical functions) 62.
- Bonera, Piero (Superficie desmica) 347.
- Bonnor, W. B. (Bon-singular fields) 190; (Boyle's law) 237.
- Bopp, F. (Statistical equations of motion in quantum theory) 439.
- Bory, Charles (Individualisation de la matière dans les phénomènes de diffusion) 415.
- Bottema, O. (Construction par rapport à un triangle) 343.
- Boudouris, G. (Propagation au-dessus d'une terre plane) 421.
- Bouligand, Georges (Surfaces localement constructibles) 145; (Surfaces à courbures opposées) 145; (Modèles

- euclidiens de métriques variationnelles) 146.
- Bourne, Samuel and Hans Zassenhaus (A Wedderburn-Artin structure theory) 21.
- Braakman, T. C. s. J. A. Sparenberg 96.
- Bradshaw, C. L. s. W. Robert Mann 302.
- Brafman, Fred (Generating functions for Laguerre and Hermite polynomials) 257.
- Brahmachary, R. L. (Gravitational and electro-magnetic field equations) 434.
- Braithwaite, R. B. (Unknown probabilities) 437.
- Brand, Louis (Pi theorem) 373.
- Brauer, Alfred (Theorems of Perron and Frobenius. I.) 11.
- Brauner, H. s. R. Bereis 346.
- Breiman, Leo (Transient Markov chains) 317; (Ergodic theorem) 318; (Counterexample to a theorem of Kolmogorov) 318.
- Bremermann, H. J. (Holographic functionals) 109.
- Brenig, W. (Zweiteilchennäherungen des Mehrkörperproblems. I.) 214.
- Brill, Dieter R. and John A. Wheeler (Interaction of neutrinos and gravitational fields) 435.
- Brillouin, L. (Mathematics, physics and information) 325.
- Brodovskij, V. B. s. M. F. Širokov 189.
- Brodskij (Brodskii), A. (Meson scattering) 447.
- Brooke, Benjamin T. (Wave formation in laminar flow) 180.
- Brown, G. E. and C. T. de Dominicis (Scattering of low energy nucleons by complex nuclei) 450; (Direct interaction and nuclear dispersion) 451.
- — — and T. V. Kanellopoulos (Proton-proton scattering) 448.
- — — s. T. V. Kanellopoulos 448.
- Laurie M. (Parity doublets and hyperfragment binding) 211.
- R. Hanbury and R. Q. Twiss (Intensity fluctuations in light. I.) 413.
- W. B. (Conformal solutions) 223; (Mixtures of Lennard-Jones molecules. I. II.) 410.
- Brudnyj, Ju. A. (Betragsmaximum quasiglatter Funktionen) 49.
- Bruins, E. M. (Fourth and fifth roots) 3.
- Brunin, O. and S. Hjalmar (Wave equations for spin 2-particles) 199.
- Brun, Viggo (C. Størmer) 4.
- Bruniak, R. (Ablösung der Grenzschicht beim Verdichtungsstoß) 404.
- Brussaard, P. J. and H. A. Tolhoek (Clebsch-Gordan coefficients) 196.
- Bryant, S. J. and J. L. Zemmer (Completely primary rings) 27.
- Buchdahl, H. A. (Reciprocal static solutions of field equations) 190.
- Buchsbaum, David A. s. Maurice Auslander 28.
- Buckingham, A. D. (Dielectric constant of a diamagnetic fluid) 223.
- Budden, K. G. and P. C. Clemmow (Radio propagation in the ionosphere. II.) 420.
- Bühlmann, Hans (Indépendance asymptotique des variables aléatoires liées) 316.
- Buneman, O. (Circulation—Clue to a unified theory?) 194.
- Bürgel, Bruno (Radiale Schrödinger-Gleichung) 197.
- Burgess, R. E. (Electrical conductivity and thermal fluctuations) 413.
- Burnat, M. (Schrödinger equation in infinite three-dimensional space) 90.
- Busulini, Bruno (Sorgenti della analisi infinitesimale) 241; (Teoria dei numeri reali secondo Dedekind) 242.
- Butler, John (Normality of an analytic operator) 295.
- S. T. (Direct nuclear reactions) 451.
- Butzer, P. L. (Halbgruppen von linearen Operatoren) 284.
- Čal'jan, K. M. s. S. A. Aleskerov 128.
- Camia, Frédéric (Courbes balistiques de la chaleur) 414.
- Camichel, Charles (Tourbillons) 179.
- Camm, G. L. s. J. M. A. Danby 237.
- Campbell, George S. (Slender wing-body combinations) 401.
- Campbell, R. (Polynomes orthogonaux) 256.
- Camps, F. et M. Lepropre (Influence de la distorsion d'un objectif en aérotrian-gulation) 371.
- Čan Čan Chun (Chan Chan Khun) (Boundary problems for non-linear ordinary differential equations) 77.
- Candlin, D. J. (Time reversal and decay of the μ -meson) 208.
- Capel, C. E. and W. L. Strother (Theorem of Hamilton) 153.
- Capps, R. H. (Photon scattering) 451.
- Capra, Vincenzo (Integrazione numerica delle equazioni differenziali ordinarie) 124; (Integrazione numerica dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie) 301.
- Caprioli, Luigi (Ampiezza del segnale di un oscillatore) 429.
- Cardamone, G. s. E. Baiada 47.
- Carleson, Lennart (Hausdorff measures and capacity) 93.
- Carlitz, L. (Bernoulli numbers) 32; (Laguerre and Jacobi polynomials) 57.
- Carnap, Rudolf (Foundations of logic and mathematics) 242.
- Carr jr., W. J. (Virial theorem with perturbation theory) 197.
- Carrier, G. F. and R. C. DiPrima (Viscous fluid past a semi-infinite flat plate) 176.
- Carruccio, Ettore (Fondamenti dell'analisi matematica) 241.
- Carstens/Hilbig, C. (Kosmologische Zeitskala) 195.
- Carstou, John (Montée d'un avion) 173.
- Carter, W. J. (Missiles in super-aerodynamic region) 173.
- Cartier, Pierre (Calcul différentiel sur les variétés algébriques) 347.
- Case, K. M. (Dirac particles) 198.
- Castagnetto, Louis (Intégration numérique de l'équation de stabilité) 125.
- Cattabriga, Lamberto (Equazioni differenziali di tipo composito) 83.
- Cecconi, Jaurès (Derivazione delle funzioni normali di intervallo) 45.
- Ceolin, C. and L. Taffara (Scattering of K^+ -mesons by nucleons) 206.

- Cereteli, O. D. (Funktionen mit beschränkter Variation) 48.
- Čerkasov, I. D. (Kolmogorovsche Gleichungen) 326.
- Cernea, Stellio (Equazioni integro-differenziali) 95.
- Černyj (Cherny), G. G. (Point explosion problem) 175.
- Cerulus, F. (Parity violation and spin of the Λ^0 particle) 209.
- Cesari, Lamberto (Process of retraction) 151.
- Cetlin (Tsetlin), M. L. (Matrices in analyzing pulse electronic and relay circuits) 417; (Non-primitive circuits) 418.
- Chalalnikov (Khalatnikov), I. M. and A. A. Abrikosov (Thermodynamics of liquid He³) 225.
- Chalfin (Khalfin), L. A. (Causality and physical realizability) 201.
- Chalilov, Z. I. (Partielle Differentialoperatorgleichung) 297.
- Chamfy, Christiane (Module pour un ensemble fermé d'indices algébriques) 32.
- Chandra, R. s. S. S. Abbi 430.
- Gupta, Subhas s. Gupta, Subhas Chandra 171.
- Chandrasekhar, S. (Partition of energy in hydromagnetic turbulence) 430.
- and W. H. Reid (Functions which satisfy four boundary conditions) 75.
- Chattarji, P. P. (Distorsion of a hole) 381.
- Chatterjee, B. B. (Stresses in an aeolotropic elliptical disc) 383.
- P. K. (Surface tension and latent heat of vapour) 223.
- N. (Critical buckling loads of elastic arches) 381.
- S. K. (Integrals involving Legendre's polynomials) 257.
- Chen, Che-Pen (Influence de la capillarité sur l'écoulement) 169.
- Ch'en, Shang-yi and Makoto Takeo (Broadening and shift of spectral lines) 236.
- Chen, Yung-Ming (Fourier constants) 55.
- Chern, Shiing-shen (Kähler geometry) 141.
- and Richard K. Lashof (Total curvature of immersed manifolds) 139.
- Chevalley, C. et A. Weil (H. Weyl) 4.
- Chicarro, Mateo F. (Projektive Transformationen) 375.
- Chihara, T. S. (Quasi-orthogonal polynomials) 256.
- Chillingworth, H. R. (Convergence and boundedness in matrix transformations spaces) 247; (Matrix transformations of sequence spaces) 247.
- Chilton, H. (Water flow through heated passages) 218.
- Chion, Ja. V. (Ringe, die mit Hilfe einer Halbgruppe bewertet sind) 26.
- Chirgwin, B. H. (Density matrix in quantum theory) 195.
- Chisnell, R. F. (Shock wave in a channel) 175.
- Cholodenko (Kholodenko), L. P. (Phase phenomena in barium titanate) 234.
- Chopra, S. D. (Stoneley waves in an internal stratum. I.) 392.
- Choquet, Gustave (Classe régulière d'espaces de Baire) 149.
- Chovanskij, G. S. (Potenzfunktion bei näherungsweise Nomographierung) 304.
- Chuchrikov, S. S. (Näherungsmethode für Übergangsprozesse in linearen und nicht-linearen Systemen) 125.
- Chun, Čan Čan s. Čan Čan Chun 77.
- Chvojková, E. (Radio waves from cosmical sources) 418.
- Cidil'kovskij, I. M. s. F. G. Bass 230.
- Čikovani, G. E. (Vielfachstreuung geladener Teilchen) 220.
- Čilašvili, G. A. (Wechselwirkung von γ -Quanten mit leichten Kernen) 217.
- Cini, M. s. A. Agodi 206.
- Claesson, Arne (Delbrück scattering) 199; (Cross sections for bremsstrahlung) 446.
- Clarke, A. Bruce (Maximum likelihood estimates in a simple queue) 336.
- Joseph H. s. Antonio Ferri 173.
- Clemmow, P. C. s. K. G. Bud-den 420.
- Clodic, M. s. R. Deaux 344.
- Coburn, N. (Steady supersonic flow of a compressible fluid) 402.
- Cocchi, Giovanni (Problemi di filtrazione) 182.
- Coddington, Earl A. (Banach algebras) 102.
- Codyks, V. M. (Punktmengen) 46.
- Coldwell-Horsfall, Rosemary A. and D. ter Haar (Shape of the Fermi surface) 229.
- Coleman, Paul D. (Theory of rebatron) 428.
- Coles, Donald (Equilibrium turbulent boundary layer) 177.
- Colombo, Giuseppe (Oscillazioni non-lineari di combinazione) 81.
- S., E. Gatti and M. Pignatelli (Measurement of time intervals) 235.
- Comolet, Raymond (Perte de charge produite par un élargissement en écoulement) 188.
- Conger, R. B. and F. C. Essig (Magnetization reversal in thin films) 233.
- Constantinescu (Konstantinesku), F. (Satz von V. A. Markov) 12.
- Cook, J. M. (Spherically symmetric probability distribution) 314.
- Cooke, J. C. (Osculatory interpolation and integration) 126.
- Cooper, B. E. (Effect of ties on moments of rank criteria) 337.
- Costa de Beauregard, O. (Coefficient de conversion du temps propre de Schwarzschild à l'approximation de 10^{-12}) 194; (Effet gravitationnel de spin) 194; (PCT-invariance de Schwinger, Lüders et Pauli) 200.
- Coulomb, Jean (Épicentre d'un séisme) 238.
- Coupry, Gabriel (Écoulement transsonique) 173.
- Courant, E. D. and H. S. Snyder (Alternating-gradient synchrotron) 427.
- Cowling, T. G. (Dynamo maintenance of steady magnetic fields) 183.
- V. F. (Series of Legendre and Laguerre polynomials) 60.
- Cox, D. R. and W. L. Smith (Distribution of Tribolium confusum) 337.
- J. Grady s. W. Robert Mann 302.
- Coxeter, H. S. M. (Crystal symmetry) 132.
- Curtis, Charles W. (Modular Lie algebras. II.) 23.
- M. L. and M. K. Fort jr. (Homotopy groups of one-dimensional spaces) 371.
- R. B. and R. R. Lewis (Electron polarization in beta processes) 218.

- Cutkosky, R. E. (Radiative meson-nucleon scattering) 447.
- Czepa, Otto (Wasserhaushalt der Atmosphäre) 239.
- Dal Soglio, Letizia (Trasformazioni plurivalenti di n -celle) 153.
- Dalecki, Ju. L. (Drehung von Räumen in Banachschem Raum) 294.
- Dalitz, R. H. and D. R. Yennie (Pion production in electron-proton collisions) 207.
- Danby, J. M. A. and G. L. Camm (Statistical dynamics and accretion) 237.
- Daniels, J. M. (Effect of interactions on angular distribution of γ -rays) 217.
- Danzer, L. (Problem der kombinatorischen Geometrie) 359.
- , Detlef Laugwitz und Hanfried Lenz (Löwnersches Ellipsoid) 358.
- Darling, D. A. and M. Kac (Occupation times for Markoff processes) 320.
- Darwin, Sir Charles (Observation and interpretation) 439.
- J. H. (Power of Poisson index of dispersion) 333.
- Das, Anadibjan (Artificial satellite) 431.
- Daskin, Walter and Lewis Feldman (Two-dimensional sails in hypersonic flow) 402.
- Dat, Jacques (Mesures par flotteur des déplacements d'un plan d'eau) 182.
- s. Léopold Escande 410.
- s. Jean Nougare 181.
- Daubert, André (Calcul approché d'une houle complexe) 407.
- Davenport, H. (Indefinite quadratic forms. II.) 38.
- Davies, H. J. and A. J. Ross (Jet deflected from the lower surface of an aerofoil) 169.
- T. V. s. A. J. Goody 408.
- Davis, Philip (Uniqueness theory for asymptotic expansions) 60.
- Davydov, N. A. ((c)-Punkte von Folgen) 251.
- Dawson, Reed and I. J. Good (Markov probabilities from linear graphs) 317.
- Day, Mahlon M. (Amenable semigroups) 294.
- Deaux, R. (Hexagones bordés de triangles équilatéraux) 343; (Cubiques planes) 343.
- Deaux, R. et M. Clodic (Équations du sixième degré) 344.
- Deheuvels, René (Application continue) 368.
- Deijen (Deigen), M. F. (Electron states in isotropic homopolar crystal) 231.
- Dekker, A. J. s. Robert G. Lye 235.
- Deleanu, Aristide (Intégration des fonctions d'ensemble) 45.
- Dell'Antonio, G. and F. Dui-mio (Ruijgrok-van Hove model) 200.
- Dembowski, Peter (Transitivitätsklassen endlicher Ebenen) 129.
- Demidovič, B. P. (Monotone Lösungen von linearen Differentialgleichungen) 272.
- Denisov, N. G. (Electromagnetic wave propagated in a plasma) 419.
- Deniz, V. C., S. B. D. Iyengar and R. Ramanna (Velocity distribution of neutrons) 219.
- Desoyer, K. (Rollende Reibung zwischen Scheiben) 395.
- Destouches, Jean-Louis s. Florence Aeschlimann 416.
- Dicke, R. H. (Gravitation) 431.
- Dienes, P. (Taylor series) 59.
- Dieter, Ulrich (Dedekindsche Summen) 70.
- Dijkstra, E. W. (Investigate primality) 306.
- Diliberto, Stephen P. (Linear ordinary differential equations) 269.
- Dinculeanu, Nicolae (Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. II.) 102; (Représentation intégrale d'opérations linéaires) 289.
- Dinghas, Alexander (Konvexitätseigenschaften von Formen) 49.
- Dini, Ulisse 3.
- DiPrima, R. C. s. G. F. Carrier 176.
- Dirac, G. A. (Map colour theorems. II.) 165.
- Divinsky, Nathan (Commutative subdirectly irreducible rings) 26.
- Dixon, W. R. (Angular energy flux of gamma-rays in matter) 426.
- Dobrowolski, W. W. (Mechanismen zur Konstruktion ebener Kurven) 137.
- Dobrušin (Dobrushin), R. L. (Countable homogeneous Markov process) 320.
- Doig, Alison (Bibliography on the theory of queues) 325.
- Dolaptschiew, Bl. (Wirbelstraßen) 397.
- und Iw. Tschobanow (Halmsche Differentialgleichung) 74.
- Domar, Y. (Largest subharmonic minorant of a given function) 93; (Spectral analysis on the narrow topology) 294.
- Domb, C. and M. F. Sykes (Susceptibility of a ferromagnetic) 233.
- Dombrovskij (Dombrovsky), G. A. (Jet coming out of a symmetrical nozzle) 172.
- Dominicis, C. T. de s. G. E. Brown 450, 451.
- Donnellan, T. (Visual aids in modern algebra) 8.
- Donoghue jr., W. F. (Continuous function spaces) 104; (Lattice of invariant subspaces) 295.
- Donovan, B., H. Kanazawa and N. H. March (Effect of long-range correlations on free electron diamagnetism) 232.
- Donsker, M. D. s. Glen Baxter 320.
- Doob, J. L. (Brownian motion on a Green space) 325.
- Douglas, D. G. (Optical path concept) 424.
- Drachman, Richard J. (Meson pair theory) 447.
- Drazin, M. P. (Hermite polynomials) 257.
- Dresher, M., A. W. Tucker and P. Wolfe (edited by) (Theory of games. III.) 310.
- Dresselhaus, G. (Absorption coefficients for exciton absorption lines) 231.
- Driml, Miloslav et Otto Hanš (Convergence presque sûre d'une suite d'éléments aléatoires) 316.
- Drummond, William E. (Explosive induced shock waves. I.) 404.
- Duan'-I-ši (Duan'-I-Shi) (Scalar meson field of a point charge) 194.
- Dubins, L. E. (Generalized random variables) 310; (Discrete evasion game) 331.
- Dubreil-Jacotin, Marie-Louise (Équations de Navier-Stokes) 84.
- Dück, W. (Iterationsverfahren bei Eigenwertproblemen) 298.
- Duculot, Camille (Représenta-

- tions irréductibles associées aux harmoniques) 17.
- Duffin, R. J. (Representation of Fourier integrals as sums. III.) 98.
- Dugundji, J. (Products in homotopy groups) 158; (Continuous mappings into non-simple spaces) 158.
- Duimio, F. s. G. Dell'Antonio 200.
- Dulmage, A. L. s. J. E. L. Peck 327.
- Durand III, Loyal (Vacuum polarization effects) 446.
- Durandau, Pierre (Lentilles électroniques) 426.
- Dwass, Meyer and Henry Teicher (Infinitely divisible random vectors) 313.
- Džalilov, K. N. s. M. T. Abasov 182.
- Džrbašan, M. M. (Entwicklung analytischer Funktionen in Reihe nach rationalen Funktionen) 260.
- Ebert, Rolf (Kugelsymmetrische Gasverteilungen) 236.
- Eckart, Gottfried (Polarisation des ondes ultracourtes) 418.
- Ecker, Günter (Holtsmark-Profil der Balmer-Linien) 222.
- Eckmann, Beno (Homotopie et dualité) 154.
- Edrei, A. and G. R. MacLane (Zeros of the derivatives of an entire function) 62.
- Edwards, S. F. and P. T. Matthews (Meson nucleon scattering) 447.
- Efimov, N. V. s. N. I. Achiezer 4.
- Egerváry, E. (Hypermatrizen) 10.
- Egorov, V. G. (Periodical systems of total differential equations) 276.
- Ehlers, F. Edwards (Constructing two-dimensional supersonic flows) 402.
- Ehrenfeucht, Andrzej (Theories with axioms built by means of pleonasm) 244.
- Ehrman, Joachim B. (Ferromagnetism of a gas of hard sphere fermions) 232; (Representations of universal covering group of the $3 + 2$ de Sitter group) 293.
- Ehrmann, Hans (Randwertaufgaben bei gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen) 78; (Periodische Lösungen bei nichtlinearen Schwingungsdifferentialgleichungen) 78.
- Eisenhart, Luther P. (Unified theory of gravitation and electromagnetism. IV.) 434.
- Éjdel'man (Eidelman), S. D. (Stability of the solutions of parabolic systems) 89.
- Ekstein, H. (Ergodic theorem for interacting systems) 411.
- Elcock, E. W. (Ising model) 233.
- Elfving, G. (Selection problem in experimental design) 336.
- Ellison, T. H. (Turbulent transport of heat) 179.
- Él'sgol'c, L. É. (Differentialgleichungen) 72.
- Enz, C. P. (Fermi interaction) 218.
- Erdoes, Jenő (Torsion-free factor groups of free abelian groups) 16.
- P. (Fragestellung von Gaier und Meyer-König) 261.
- and G. Fodor (Set theory. VI.) 42.
- and A. Rényi (Zeros of derivatives of entire functions) 263.
- Eremin, I. I. (Groups with finite classes of conjugate Abel subgroups) 16.
- Ericksen, J. L. (Dirichlet problem for linear differential equations) 279.
- Ernst, D. (Rechenmaschinen in Amerika) 127.
- jr., Frederick J. (Geon theory) 193; (Linear and toroidal geons) 193.
- Errera, Alfred (M. Kraitchik) 242.
- Eršov, L. V. und D. D. Ivlev (Elasto-plastischer Zustand eines konischen Rohrs) 389.
- Erwe, Friedrich (Einheitsfunktionenspalten) 64.
- Friedrich (Doppeltperiodische Funktionen) 71.
- Escande, Léopold (Cheminées d'équilibre à débit d'apport) 169; (Pressions supplémentaires dans une chambre d'équilibre) 169; (Influence des cavitations sur la surpression) 169.
- et Jacques Dat (Cheminées d'équilibre déversantes) 410.
- Éskin, G. I. s. S. I. Zuchovickij 295.
- Espagnat, B. d', R. Omnès and J. Prentki (Decay rates of heavy mesons) 209.
- Espagnat, B. d', J. Prentki and Abdus Salam (Symmetries in elementary particle interactions) 209.
- Esseen, C. G. (Moment inequality) 315.
- Essig, F. C. s. R. P. Conger 233.
- Ešukov, L. N. (Randwertproblem für gewöhnliche Differentialgleichungen) 74.
- Everett, H. (Recursive games) 328.
- Everitt, W. N. (Inequalities for Gram determinants) 49.
- Eves, Howard and E. P. Starke (O. Dunkel memorial problem book) 1.
- Evgrafov, M. A. (Lineare Operatoren im Raum analytischer Funktionen) 295.
- Ewald, Günther (Geometrie der ebenen Schnitte einer Semi-quadratik) 342.
- H. s. H. Liebl 188.
- Fabian, Václav (Zufälliges Abzählen) 301.
- William (Tensor integrals) 349.
- Fadell, Edward (Spaces without isolated noncut points) 363.
- Fagen, R. s. T. Austin 10.
- Fajn, V. M. s. V. L. Ginzburg 446.
- Fajnzil'ber (Feinsilber), A. M. (Similarity integrals in hydrodynamic processes) 166.
- Falgas, Maurice (Séries de base) 60.
- Fan, Ky (Inequalities concerning convex functions) 102.
- Fano, U. (Description of states by density matrix) 195.
- Fantappiè, L. 242.
- Faure, Robert (Solutions périodiques d'équations différentielles non linéaires) 274.
- Faymon, K. s. G. Kuerti 173.
- Federhofer, Karl (Erzwungene Schwingungen eines Kreisinges) 389.
- Fedorčenko, A. M. s. K. B. Tolpygo 230.
- Fedorov, F. J. (F. I.) (Reduction of wave equations to Hamiltonian form) 199.
- Feferman, Solomon (Degrees of unsolvability) 6.
- Fehrle, L. (Kritische Drehzahlen gewisser Rotorformen. II.) 391.
- Feldman, Gordon and P. T. Matthews (Hyperon production) 447.
- Lewis s. Walter Daskin 402.

- Feller, William (Intrinsic form for second order differential operators) 76.
- Fenain, Maurice et Denise Vallée (Effet d'épaisseur, en régime supersonique, pour certaines ailes) 402.
- Féret, Joseph Kampé de s. Kampé de Féret, Joseph 316.
- Ferretti, B. (Lepton number) 448.
- Ferri, Antonio, Joseph H. Clarke and Lu Ting (Interference in lifting systems in supersonic flow) 173.
- Fert, Charles s. Pierre Durand 426.
- Fettis, Henry E. (Functions occurring in Maslen and Moore's theory of transverse waves in a cylinder) 258.
- Feyerabend, P. K. (Quantum theory of measurement) 439.
- Ficken, F. A. and B. A. Fleishman (Initial value problems for wave equation) 276.
- Fierz, M. (Does a physical theory comprehend an 'objective, real, single process'?) 439.
- Finikov, B. I. (Functions in the logic algebra) 307.
- Finn, Robert and David Gilbert (Three-dimensional subsonic flows) 400.
- Fischer, Otto F. (Structural models with quaternions) 372.
- Paul B. (Arithmetik) 8.
- Fladt, Kuno (Ebene hyperbolische Geometrie) 130; (Nichteuklidische Zyklographie. II.) 133.
- Flammer, Carson (Spheroidal wave functions) 57.
- Fleishman, B. A. s. F. A. Ficken 276.
- Fleming, W. H. (Problem of least area) 138; (Differential games) 333.
- — — s. L. D. Berkovitz 333.
- Flett, T. M. (Tangent to a curve) 356.
- Floyd, E. E. (Closed coverings in Čech homology theory) 153; (Orbits of torus groups) 163.
- Fock, V. (Lectures on relativity theory) 431.
- Fodor, G. s. P. Erdős 42.
- Fog, David (Probability theory in Danish grammar school) 1.
- Foias, Ciprian (Théorèmes de J. von Neumann) 291.
- Fok, V. A. (Quantentheorie des Feldes) 444.
- Fokker, A. D. (Mathematik und physikalische Wirklichkeit) 242.
- Foote, Joe R. (Free convection past a vertical plate) 398.
- Forbes, George F. (Digital differential analyzers) 126.
- Forrester, Amasa (Acyclic models) 367.
- Forsyth, P. A. s. C. O. Hines 418.
- Fort jr., M. K. s. M. L. Curtis 371.
- Francia, G. Toraldo di s. Toraldo di Francia, G. 376, 422, 423.
- Franke, Wolfgang (Durch Verdünnungswelle in der Atmosphäre erzeugter Verdichtungsstoß) 403.
- Frankel, Theodore (Homology and flows on manifolds) 141.
- Frankl', F. I. (Isentropic relativistic gas flows) 399.
- Franzinetti, C. and G. Morpurgo (Physics of new particles) 210.
- Freeman, G. H. (Regular group divisible incomplete block designs) 9.
- N. C. (Stability of plane shock waves) 403.
- Frei, E. H., S. Shtrikman and D. Treves (Ideal ferromagnetic particles) 233.
- Frejman, G. A. (Sätze von Poincaré und Perron) 11.
- French, A. P. (Deuteron stripping reactions) 216.
- Freudenstein, Ferdinand s. Kurt Hain 380.
- Freudenthal, Hans (Grundlagen der Geometrie) 129; (Wahrscheinlichkeit und Statistik) 309.
- Freund, John E. s. R. L. Wine 9.
- Friedberg, Richard (Degrees of unsolvability) 6.
- Friedman, Avner (Oscillatory solutions of nonlinear autonomous differential equations) 79; (n -metacaloric functions) 89; (Elliptic linear partial differential equations) 277; (Nonlinear elliptic and parabolic systems of partial differential equations) 277.
- Frisch, Harry L. s. Joel L. Lebowitz 411.
- Fritzsche, Gottfried (Synthetische Systemtheorie. I.) 183.
- Froese, Charlotte (Self-consistent field) 220.
- Froissart, Marcel et Roland Omès (Équation de Chew et Low) 206.
- Frölicher, Alfred and Albert Nijenhuis (Stability of complex structures) 142.
- Fronsdal, C. s. R. E. Behrends 199.
- Frum-Ketkov, R. L. (Cycles in continuous mapping of compacts) 365.
- Fubini, S. and W. E. Thirring (p -wave pion-nucleon interaction) 206.
- Fuchs, L. (Maximalbedingung) 25.
- W. H. J. (Theorem on power series) 59.
- Fujino, Haruyuki and Jun'ichi Osada (The Chew-Low equation) 206.
- Fukuda, Hiroshi s. Saburo Amai 448.
- Fuller, A. T. (Stability criteria for linear systems) 307.
- Fulton, Thomas s. Roger G. Newton 448.
- Fung, Y. C. (Dynamic amplification spectra) 377.
- — —, E. E. Sechler and A. Kaplan (Vibration of thin shells) 390.
- Fur, Bernard Le (Couche limite laminaire) 405.
- Gadd, G. E. (Laminar separation in supersonic flow) 401.
- Gaffey, William R. (Inversion formula for bilateral Laplace transforms) 97.
- Gagaev, B. M. (Arbeiten Kazaner Mathematiker über Orthogonalsysteme) 57.
- Gagliardo, Emilio (Criterio di compattezza) 253.
- Gaier, Dieter (Gap theorems) 261.
- Gale, David (Information in games) 329.
- Gallie, W. B. (Limits of prediction) 439.
- Garabedian, P. R. (Steady-state bubbles) 166.
- Gaskell, R. E. (Practice of mathematics) 1.
- Gáspár, R. (Electronic structure of semi-conducting selenium) 230; (Optical and electrical properties of tellurium) 230.
- Gatteschi, Luigi (Formule asintotiche per le funzioni speciali) 256.

- Gatti, E. s. S. Colombo 235.
 Gavrillov, N. I. (Stabilität nach Ljapunov) 80.
 Geoffroy, Jean (Majorations asymptotiques des valeurs extrêmes d'un échantillon) 333.
 Gehring, F. W. (Fatou theorem) 63; (Radial order of subharmonic functions) 64.
 Gel'fand, I. M. and A. M. Jaglom (Integration in Funktioräumen) 195; (Information über eine Zufallsfunktion) 322.
 Gell-Mann, Murray (Model of strong couplings) 210.
 Germănescu, M. (Définition fonctionnelle des fonctions trigonométriques) 119.
 Gersten, Klaus (Nichtlineare Tragflächentheorie für Rechteckflügel) 166.
 Gerstenkorn, Horst (Veränderungen des Erde-Mond-Systems) 437.
 Gervasio, Vincenzo (Capacità di una linea a striscia) 422.
 Getoor, R. K. (Banach space valued random variables) 310.
 Gheorghio, Octavian Émil (Objets géométriques spéciaux non différentiels. I, II.) 140.
 Ghosh, P. K. (Evaluation of complex roots by Graeffe's root squaring method) 120.
 Giaccardi, Fernando (Disuguaglianza) 338.
 Giesekus, Hans Walter (Bemerkungen zu „Isotropic tensor-functions“) 386.
 Gilbarg, David s. Robert Finn 400.
 Gilbert, C. (Gravitational field of a star) 189.
 Gilić, Andro (Epizentrum eines Fernbebens) 238.
 Gillette, Dean (Stochastic games) 330.
 Gillies, A. W. (Differential equation governing non-linear vibrations) 273.
 Ginzburg, V. L. (Ferromagnetic superconductors) 233.
 — — — and V. M. Fajn (Fain) (Quantum effects) 446.
 Giqueaux, M. et A. Oudart (Fonctions analytiques) 259.
 Giralt, Georges s. Jean Nougaro 181.
 Glaser, V., H. Lehmann and W. Zimmermann (Field operators and retarded functions) 201.
 Glauber, A. E. (Real gas with noncentral particle interaction) 221.
 Glauert, M. B. (Flow past a rotating cylinder) 400.
 Gleason, Andrew M. (Measures on the closed subspaces of a Hilbert space) 288.
 Gluškov (Glushkov), V. M. (Problems of computation technique) 127.
 — — — s. P. S. Alexandroff 4.
 Gnedenko, B. V. (Mathematical education in the USSR) 1.
 Godeaux, Lucien (Surfaces cubiques non réglées) 135; (Géométrie énumérative) 345; (Surfaces algébriques non rationnelles de genres zéro) 347; (Surfaces projectivement canoniques) 347.
 Goffi, Luigi s. Franco Levi 382.
 Gold, Louis (Inverse Bessel functions) 58.
 — — and Laura M. Roth (Galvanomagnetic theory for germanium and silicon) 230.
 Goldsmith, Werner (Elongating string under a transverse force) 390.
 — — s. K. E. Barnhart jr. 393.
 Goldstine, Herman H. (Machine developments and numerical analysis) 305.
 Gol'fand, Ju. A. (Ju. A.) (Electron-positron field amplitudes) 202.
 — — F. (Ju. F.) (Generalized phase analysis) 199.
 Gonseth, F. (Géométrie et le problème de l'espace) 4.
 Good, I. J. (Numerical solution of integral equations) 304.
 — — — s. Reed Dawson 317.
 — jr., R. H. (Electromagnetic field equations) 212.
 — — — s. R. H. Barlett 196.
 Goodbody, A. M. (Resolution of parallel lines) 424.
 Goodier, J. N. (Thermal stress and deformation) 384.
 Goody, A. J. and T. V. Davies (Symmetrical gravity waves. IV.) 408.
 Goormaghtigh, R. (Triangle équilatéral) 343.
 Gopengauz, I. E. und A. F. Timan (Stetigkeitsmodul periodischer Funktionen) 49.
 Gořkov, L. P. (Limiting moments in scalar electrodynamics) 445.
 Gosar, P. (Multiple scattering problems) 220.
 Gottfried, Kurt (Nuclear pair correlation function) 452.
 Gottlieb, Jean (Champ relativiste d'une sphère) 189.
 Gouarné, René (Calcul automatique des déterminants) 120; (Calcul automatique des polynômes caractéristiques) 120; (Calcul par la méthode de cycles) 121.
 Gourdin, M. (Diffusion nucléon-nucléon. II.) 213.
 — — et André Martin (Potentiel séparable) 213.
 Graiff, Franca (Significato della funzione di congruenza) 381.
 Granas, A. (Geometrischer Satz) 117; (Nichtlineare Abbildungen in Banachschen Räumen) 117.
 Grätzer, G. und E. T. Schmidt (Anordnung von Ringen) 25.
 Green, H. F. (Bounds for infinite matrices) 105.
 — — S. and S. N. Biswas (Bethe-Salpeter equation) 198.
 Greenspan, Donald (Vertices in Euclidean 3 space) 350.
 Grenander, Ulf (Heterogeneity in non-life insurance. I.) 340.
 Griffin, James J. and John A. Wheeler (Collective motions in nuclei) 449.
 Grigorev, V. I. (Quantum field theoretical solutions) 200.
 Grioli, Giuseppe (Moto di un corpo rigido) 377.
 Grobman, D. M. s. R. É. Vinograd 269.
 Groenewald, H. J. (Statistics in quantum description) 439.
 Gross, O. (Rational game on the square) 332.
 Grömm, H. und H. Spurny (Berechenbare Ionen- und Elektronenbahnen) 426.
 Grunsky, Helmut (Konforme Abbildungen. II.) 267.
 Guerrieri, Annibale (Rendita vitalizia frazionata) 338.
 Gugenheim, V. K. A. M. (Supercomplexes) 156.
 — — — and J. C. Moore (Acyclic models and fibre spaces) 366.

- Guiraud, Jean-Pierre (Écoulements supersoniques derrière une onde de choc) 174.
- Gumbel, Émile J. (Fonctions de probabilités) 314.
- Gummel, Hermann and Melvin Lax (Thermal capture of electrons in silicon) 230.
- Gumowski, Igor (Critère de stabilité sous forme d'une équation intégrale) 308.
- Gundlach, Karl-Bernhard (Nichtspitzenformen der Dimension —1 zu Hilbertschen Modulgruppen) 70.
- Gupta, A. S. (Heat conducting fluid over a flat plate) 172.
- S. Sen s. Sen Gupta, S. 440.
- Subhas Chandra (Flat plate in a viscous liquid) 171.
- Suraj N. (Quantum field theory) 200; (Anomalous magnetic moments of nucleons) 205.
- Gurevič (Gurevich), A. V. (Effect of radio waves on properties of plasma) 420.
- Gürsey, Feza (Conformal invariant world-lines) 436.
- Gusejn-Zade (Husein-Zade), M. I. (Impact at an infinite plate) 384.
- Gustafson, W. A. and M. Z. v. Krzywoblocki (Multiplicity theorems. I. II.) 398.
- Gutman (Gootman), L. N. (Cumulus) 239.
- Guttman, Irwin (Power of optimum tolerance regions) 334.
- Louis (Latent roots and minimax elements of real matrices) 333.
- Gyires, Béla (Smithscher Determinantensatz) 34.
- Haar, D. ter s. Rosemary A. Coldwell-Horsfall 229.
- Hadwiger, H. (Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie) 357.
- Hagedorn, Leo s. Kurt Hain 380.
- Hahn, W. (Relais-Regler) 378.
- Haimovici, M. (Systèmes mécaniques non holonomes) 354.
- Hain, Kurt, Ferdinand Freudenstein, Gerd Kiper, Wolfgang Rößner, Nicolai Rosenauer, Leo Hagedorn, Rudolf Beyer, Kurt Schnarbach und Johannes Volmer (Ungleichförmige Umlaufbewegungen) 380.
- Halberg, Charles J. A. s. Angus E. Taylor 103.
- jr., Charles J. A. (Spectra of bounded linear operators) 296.
- Halbwachs, Francis (Mouvement de la goutte relativiste de Bohm et Vigier) 194.
- Haldane, B. S. (K. Pearson) 4.
- Halder, Gita and Ram Behari (Orthogonal ennuples in a Kaehler manifold) 141.
- Halfar, Edwin (Compact mappings) 360.
- Hall, D. and A. S. Wightman (Theorem on invariant analytic functions) 443.
- Halperin, Israel and W. A. J. Luxemburg (Reflexivity of the length function) 106.
- Halpern, Francis R. (Method of moments in quantum mechanics) 195.
- Hamaguchi, M. (Viscous fluid model in multiple production of mesons) 207.
- Hämeen-Anttila, K. A. (Gravitation und Elektromagnetismus) 434.
- Hamilton, O. H. (Theorem of Hamilton) 153.
- Hanai, Sitiro (Open mappings) 151.
- Handelman, George and Yih-O Tu (Antisymmetric vibrations of a beam) 390.
- Hannan, James (Bayes risk in repeated play) 328.
- Hans, Otto s. Miloslav Driml 316.
- Hanson, K. L. s. G. Horvay 384.
- Harary, Frank (Dissimilar supergraphs) 165.
- Hardy, G. H. and E. M. Wright (Zahlentheorie) 31.
- Harkin, Duncan (F. É.-A. Lucas) 4.
- Harris, V. C. (Solution of triangles on the slide rule) 126.
- Hartog, J. P. Den s. L. Prandtl 396.
- Hashimoto, Junji (Direct, subdirect decompositions and congruence relations) 18.
- Haskey, H. W. (Stochastic cross-infection) 338.
- Haug, Albert und Alfred Schönhofer (Energiebandaufspaltungen) 228.
- Haupt, Otto (Figures des courbes planes) 145; (Courbe continue) 145.
- Hauser, I. (Directional correlations of β -rays) 217.
- Häuslein, Günter (Modulfunktionen arithmetischer Körper) 30.
- Heading, J. (Stokes phenomenon and n th-order differential equations. I. II.) 270.
- Hecht, Charles E. and Joseph E. Mayer (WKB equation) 196.
- Heine, V. (Irreducible representations of the full Lorentz group) 189; (Cyclotron resonance in metals) 229.
- Heinhold, J. (Statistik und Rechenanlagen) 1.
- Heins, Albert E. and Samuel Silver (Diffraction of plane waves) 424.
- Heisenberg, W. (Lee model) 202.
- Helfenstein, H. G. (Critical curves in seismic exploration) 238.
- Helliwell, J. B. and A. G. Mackie (Subsonic and sonic flow past thin bodies) 402.
- Helson, Henry and Frank Quigley (Maximal algebras of continuous functions) 290.
- Henisch, H. K. (Semi-conductor contacts) 231.
- Henrici, Peter (Integral involving Bessel functions) 257; (I. N. Vekua's theory) 278.
- Henry, Irvin G. (Radiation effects on free oscillations in synchrotrons) 427.
- Henstock, R. (Convergence factors of Laplace-Stieltjes integrals) 61.
- Herdan, Gustav (Yule's characteristic K and Shannon's entropy H) 325.
- Herszberg, J. (Types of unodes of surfaces in S_3) 135.
- Herz, C. S. (Span of translations in L^p) 106.
- Hewitt, Edwin and Eugene P. Wigner (Theorem of Magnus) 99.
- Hille, Einar and Ralph S. Phillips (Functional analysis and demi-groups) 100.
- Hilton, P. J. (Hopf invariant) 370.
- Hines, C. O. and P. A. Forsyth (Forward-scattering of radio waves) 418.

- Hintenberg, H. s. L. A. König 427.
- Hiong, King-Lai (Fonction holomorphe sans zéro) 65; (Cycle simple dans la théorie des familles normales) 65.
- Hirschleber, A. (Ausnahmefälle beim Graeffeschen Verfahren) 120.
- Hitchcock, A. J. M. (Polynomial approximations to Bessel functions) 126.
- Hittmair, O. (Stripping-Breite und Schalenmodell) 215.
- Hjalmars, S. s. O. Brulin 199.
- Hlavatý, Václav (Geometry of Einstein's unified field theory) 433.
- Hobson, E. W. (Trigonometry) 132.
- Hochstadt, Harry (Diffraction by parabolic surfaces) 423.
- Hochstrasser, Urs s. Robert Stoneley 393.
- Hoehnke, Hans-Jürgen (Problem von Ch. Hopkins) 25.
- Hoffman, Kenneth and I. M. Singer (Maximal subalgebras of $O(I^n)$) 110.
- Hofmann, Hellmut (Deutung der Maxwell'schen Gleichungen) 416.
- J. E. (L. Euler) 3.
- Hofstadter, Robert (Scattering of high-energy electrons) 452.
- Holder, Doyne (Non-factorable polynomials) 12.
- Holladay, John C. (Cartesian products of termination games) 330.
- Holzer, L. (Ortskurven) 69.
- Hooley, C. (A number as sum of two squares and a prime) 35.
- Hopf, Eberhard (Statistical theory of turbulence) 179.
- Hopkins, H. G. (Plastic theory of plates) 388.
- H. (Aberration permissible in optical systems) 186.
- Hörmander, L. et J. L. Lions (Intégrale de Dirichlet) 280.
- Horváth, J. I. and B. Vasvári (Linear electrodynamics. I.) 182.
- Horvay, G. (Saint Venant's principle) 391.
- and K. L. Hanson (Sector problem) 384.
- Hosemann, R. und G. Schocknecht (Röntgen-Kristallstrukturanalyse. I.) 227.
- Hough, J. M. s. J. A. Reynolds 223.
- Houriet, A. (Méthode des champs adhérents) 447.
- House jr., Raymond N. s. Bernard W. Shaffer 387.
- Howe, R. M. s. L. L. Rauch 308.
- Hsiang, Fu Cheng (Inequality for finite sequences) 247.
- Hua, Loo-Keng (Riemannian curvature) 143.
- Huber, Eugen Wilhelm (Berechnung von Strömungsvorgängen) 169.
- Hughes, D. R. (Collineations and incidence matrices) 341.
- Hummel, J. A. (Complete orthonormal sequences of functions) 260; (Counterexamples to Poincaré inequality) 281.
- Huneman, J. A. (Formeln der Planimetrie) 131.
- Hunter, R. P. (Type of (n, k) adherence) 363.
- S. C. (Energy absorbed by elastic waves during impact) 394.
- Ibragimov, I. A. (Infinitely divisible laws) 313.
- Ibrahim, Ali Ardel Kerim (Coefficient of viscosity of Newtonian liquids. II.) 167.
- İçen, Orhan Ş. (Schneidersche Algebrarizitätskriterien) 40.
- Ichikawa, Y. H. (Oscillation of electrons in solids) 229.
- Ikeda, Mineo (Relativistic theory of the non symmetric field) 432.
- Il'in, V. A. (Entwickelbarkeit von Funktionen mit Singularitäten) 92; (Kerne gebrochener Ordnung) 280.
- Infeld, L. (Lagrangian in special relativity theory) 189; (Equations of motion in general relativity theory) 432.
- and J. Plebański (Dirac's functions) 375.
- Inopin, E. V. (Neutron scattering by non-spherical nuclei) 217.
- Inoue, Yoshiro (Homotopy classification) 370.
- Ioffe, B. L. and L. B. Okun (Long-term reactivity changes in nuclear reactors) 219.
- Isay, W.-H. (Voith-Schneider-Propeller) 170; (Strömung durch axiale Schaufelgitter) 170.
- Isbell, J. R. (Finitary games) 328.
- Iséki, Kiyoshi (Semi-groups. IV—VI.) 13; (Continuous convergence) 360.
- Ishihara, A. (Spin interactions in a cubic lattice) 233.
- Iswata, Takesi (Ring of all bounded continuous functions) 148.
- Išlinskij (Ishlinsky). A. Ju. (A. Yu.) (Bifurcation instance) 379.
- Iso, Chikashi s. Saburo Amai 448.
- Ivachnin (Ivakhnin), I. I. (Stability of a conic shell) 382.
- Ivlev, D. D. s. L. V. Eršov 389.
- Iwamoto, Fumiaki and Masami Yamada (Cluster development method. I.) 197.
- Iyengar, S. B. D., G. S. Mani, R. Ramanna and N. Umakanth (Neutrons in Beryllium oxide) 219.
- — — s. V. C. Deniz 219.
- Iyer, R. Venkatachalam (Formes concordantes) 33.
- Izumi, Shin-ichi (Fourier series. V.) 253.
- , Masako Satô and Saburô Uchiyama (Fourier series. XII.) 55.
- , — and Gen-ichirô Sunouchi (Fourier series. XIV.) 253.
- Jacobs, Konrad (Markoffsche Prozesse) 321; (Fastperiodische diskrete Markoffsche Prozesse) 322.
- Jadraque, V. Martin (Variablentransformationen) 81.
- Jaekel, K. (Integraltransformationen mit Differenzkern) 100.
- Jäger, Friedrich Wilhelm (Polarisation in solaren Fraunhoferlinien) 236.
- Jaglom, A. M. s. I. M. Gel'fand 195, 322.
- I. M. s. N. Ja. Vilenkin 1.
- — — s. A. P. Norden 4.
- James, A. T. (Relationship algebra of an experimental design) 337.
- I. M. (Spaces with a multiplication) 157; (Multiplication on spheres. I.) 371.
- Jänich, Ernst (Keildistanzmesser) 424.
- Janssen, E. (Flow at low Reynolds numbers) 401.
- Janssens, Paul (Corrélations en turbulence) 177.

- Jarník, Vojtěch 3.
- Jeffreys, Harold and R. O. Vicente (Nutation and variation of latitude) 237, 238.
- Jenkins, James A. (Quasiconformal mapping) 69; (Canonical mappings) 69.
- Jenner, W. E. (Representations of the linear group) 17.
- Jensen, Eberhart (Magnetic tube in temperature equilibrium with a plasma) 430.
- Jobert, Georges (Déformations causées par les marées océaniques) 238; (Déformation plane d'un solide élastique) 393.
- Johnson, N. L. (Mean deviation of the binomial distribution) 333; (Accident proneness) 337.
- Jones, D. S. (High-frequency scattering) 422.
- Jongh, P. C. de $\left(\sum_{i=1}^n i^p\right)$ 8.
- Jordan, Camille (Substitutions et équations algébriques) 12.
- Jukes, J. D. (Shock wave in an ionized gas) 404.
- Jung, H. (Eigenspannungen in Scheiben) 381; (Wärmespannungen) 384.
- Jurchescu, Martin (Recouvrements riemanniens) 68.
- Kac, G. I. (Vollständig reguläre Räume) 148.
- M. (Uniform distribution on a sphere) 314; (Limit theorems) 315.
- s. D. A. Darling 320.
- Kadison, Richard V. (Operator algebras) 115.
- — — and I. M. Singer (Test problems in operator theory) 115.
- Kadomcev (Kadomtsev), B. B. (Invariance principle for a homogeneous medium) 425, 426; (Radiant energy transfer) 426.
- Kaganov, M. I. and V. V. Slezov (Surface impedance of metals) 235.
- — — s. I. M. Lifsič 229.
- S. A. (Raum mit hyperarealer Metrik) 356.
- Kahane, Jean-Pierre (Théorème de S. Bernstein) 255.
- Kahn, F. D. (Collision of two ionized streams) 222.
- Kahramaner, Suzan s. A. Nazim Terzioğlu 265.
- Kalaba, Robert s. Richard Bellman 218.
- Kalisch, G. K. (On similarity, reducing manifolds, and unitary equivalence of certain Volterra operators) 96.
- Kallenberg, G. W. M. (Differential geometry of a group of projective transformations) 352.
- Kaltenecker, H. (Sicherheit von Signalen) 308.
- Kampé de Fériet, Joseph (Mesures de probabilité sur un espace de Hilbert) 316.
- Kan, Daniel M. (c. s. s. complexes) 369.
- Kanazawa, H. s. B. Donovan 232.
- Kane, T. R. (Reflection of dilatational waves) 392.
- Kanellopoulos, T. V. and G. E. Brown (Polarization experiments in proton-proton scattering) 448.
- — — s. G. E. Brown 448.
- Kanki, T. (Scattering in the quantized field) 442.
- Kanold, Hans-Joachim (Zahlentheoretische Funktionen. II.) 35.
- Kanwal, R. P. (Flow quantities along streamlines) 397.
- Kao, R. C. and L. H. Zetterberg (Sum of multinomial coefficients) 8.
- Kapica, S. P. (Harmonisch konjugierte Funktionen) 126.
- Kaplan, A. s. Y. C. Fung 390.
- Karapetjan, S. E. (Zyklus von vier Kongruenzen) 352.
- Karas, K. (Kreis- und Kreisringmembranen unter hydrostatischem Druck) 382.
- Karlin, Samuel (Infinite move game) 331; (Games described by bell shaped kernels) 332.
- — — and Rodrigo Restrepo (Multistage poker models) 332.
- Karp, S. N. and W. Elwyn Williams (Equivalence relations in diffraction theory) 423.
- Karpelevič, F. I. s. F. A. Berezin 92.
- Karplus, Robert and Kenneth M. Watson (Many-particle quantum-mechanical medium) 440.
- Karrass, A. and D. Solitar (Theorem of Schreier) 14.
- Kártész, Franz (Dreiecksnetz der hyperbolischen Ebene) 131.
- Kasahara, Shouro (Problème de la dualité dans espaces localement convexes) 286; (Théorème de Mackey) 287.
- Kasajima, Tomomi (Theorem of Rutishauser) 121.
- Kästner, Siegfried (Inkompressible Newtonsche Flüssigkeit in einem Wendelkanal) 167.
- Kato, Tosio (Hilbert matrix) 115.
- Kaufman, H. (Sine function) 57.
- Kaufmann, Walther (Statik der Tragwerke) 379.
- Kaul, R. N. (Curvature of a vector field) 351.
- Kazanceva (Kazantseva), G. E. (Oscillations in thin plates) 390.
- Keldyš (Keldych), Ljudmila (Ludmila) (Monotone irreducible mapping) 150; (Monoton irreduzible Abbildung) 150.
- M. V. s. P. S. Alexandroff 4.
- Keller, Joseph B., Robert M. Lewis and Bernard D. Seckler (Diffraction by an aperture. II.) 423.
- Kelly, Paul J. (Congruence theorem for trees) 371.
- Kemeny, John G. and Gerald L. Thompson (Effect of psychological attitudes) 331.
- Kerimov, B. s. A. Sokolov 446.
- — K. s. A. A. Sokolov 203.
- Kerstan, Johannes (Pseudokompakte Räume) 149; (Lindelöfsche und parakompakte Räume) 149.
- Kertz, Walter s. Manfred Siebert 238.
- Keyfitz, Nathan (Sampling variance) 335.
- Khan, N. A. (Idempotent matrices) 10.
- Khosianov, V. (Transmission de la chaleur entre l'hélium I et II) 225.
- Kichenassamy, S. (Solution de $g_{\mu\nu}; e = 0$) 433.
- Kidder, R. E. (Flow of gas through porous medium) 409.
- Kilmister, C. W. (Eddington's statistical theory) 190.
- Kilpi, Yrjö (Komplexes Momentenproblem) 285.
- King, R. W. and D. C. Peaslee (Model for heavy particles) 210.

- Kinney, J. Sterling (Indeterminate structural analysis) 379.
- Kinoshita, Toichiro and Alberto Sirlin (Muon decay) 208.
- Kiper, Gerd s. Kurt Hain 380.
- Kippenhahn, R. und A. Schlüter (Solare Filamente) 236.
- Kirkham, Don (Potential and capacity of cylinders) 183.
- Kiselev, A. A. und O. A. Ladyženskaja (Instationäres Problem für zähe inkompressible Flüssigkeit) 398.
- Kishi, Masanori (Capacities of borelian sets) 280.
- Klamkin, M. S. (Gauss multiplication theorem) 258.
- Klein, Bertram (Finite difference method of structural analysis) 227; (Metric structural analysis. II.) 228. — G. (Flame theory) 221.
- Klotter, K. und E. Kreyszig (Selbsterregte Schwingungen) 274.
- Kneale, W. C. (What can we see?) 439.
- Kneser, Martin (Klassenzahlen quadratischer Formen) 38.
- Koch, R. J. (Monothetic semigroups) 18.
- Kochendorffer, R. (Determinanten und Matrizen) 10.
- Kodama, Yukihiro (LC^n metric spaces) 361; (Right inverse mapping of a simplicial mapping) 366.
- Koecher, Max (Positivitätsbereiche im R^n) 12.
- Koga, Toyoki (Irrotational gas flow) 168.
- Kolberg, Oddmund (Dixon's formula) 8.
- Komatu, Yūsaku (Integraldarstellungen für analytische Funktionen) 267; (Conformal mapping of polygonal domains) 267.
- Kondo, Koiti (Knotgroups of parallelknots) 165.
- Kondrat'ev, V. A. (Bedingung dafür, daß die Lösungen einer linearen Differentialgleichung nicht oszillieren) 76.
- König, Hermann s. Siegfried Valentiner 136.
- L. A. und H. Hintenberger (Abbildungsfehler von magnetischen Sektorenfeldern) 427.
- Koosis, Paul (Completeness theorem) 106; (Approximation of functions by exponentials on a half line) 290.
- Koppe, E. (Nichtlineare Torsion eines Kreiszylinders) 386.
- Körner, S. (Philosophical arguments in physics) 439. — (edited by) (Observation and interpretation) 437.
- Korolev, A. M. (Dynamical magnetic moment of the deuteron) 204.
- Koschmieder, Lothar (Extremum without differential calculus) 246.
- Kosiński, A. (Involutions and families of compacts) 364.
- Kothari, L. S. and K. S. Singwi (Scattering of cold neutrons in graphite) 227.
- Koval', P. I. (Reduzible Systeme von Differenzgleichungen) 77; (Equations linéaires aux différences finies) 275.
- Kövári, T. (Entire functions) 262.
- Kowalke, F. s. F. Wegener 173.
- Kowalsky, Hans-Joachim (Automorphismengruppen topologischer Räume) 146.
- Koźniewska, I. (Efficiency of drawing samples) 335.
- Kraichnan, Robert H. (Stationary isotropic turbulence) 178.
- Krasnosel'skij (Krasnoselsky), M. A., S. G. Krejn (Krein) and P. E. Sobolevskij (Sobolevsky) (Differential equations with unbounded operators in Hilbert space) 297.
- Kreisel, Georg, Daniel Lacombe et Joseph R. Shoenfield (Fonctionnelles récursivement définissables) 7.
- Krejn, S. G. s. M. A. Krasnosel'skij 297.
- Krejnín (Kreinín), Ja. L. (J. L.) (Sets different from all Φ -sets) 43.
- Kresnin, A. A. s. G. L. Vysokij 220.
- Kreter, Reinhold (Zusammenhänge in Finslerschen Räumen) 144.
- Kreyszig, E. (Partielle Differentialgleichungen) 91; (Zeros of Fresnel integrals) 259; (Solutions of partial differential equations and coefficients of their power series development) 278. — s. K. Klotter 274.
- Krygowska, A. Zofia (Formalismo e verbalismo nell'insegnamento dell'algebra) 1.
- Krzywicki, A. (Forces et moments exercés sur un obstacle par un fluide visqueux) 398.
- Krzywoblocki, M. Z. v. (Thickness of a steady shock wave) 174. — — —, L. Pottsepp and M. Saarlás (Source in compressible flow) 168. — — — s. W. A. Gustafson 398.
- Krzyż, Jan s. Mieczysław Biernacki 264.
- Kučmar, N. I. (N. N. Nazarov) 4.
- Kuerti, G. and K. Faymon (Shock-motion of a gas) 173.
- Kuhn, H. W. (Prager's transportation problem) 340.
- Kuipers, L. (Asymptotic distribution functions) 40.
- Kukles (Kookless), I. S. (Frommer's method) 268.
- Kumar, Ram (Hankel-transform. I. II.) 285.
- Kuni, F. M. (Nucleon-nucleon scattering) 213.
- Künzi, Hans et Hans Wittich (Points où certaines fonctions méromorphes prennent une valeur a) 63.
- Kuo, Y. H. (Dissociation effects in hypersonic viscous flows) 176.
- Kuratowski, Casimir (Topologie. I.) 146. — K. (Invariants topologiques) 365.
- Kursunoglu, Behram (Proton Bremsstrahlung) 446.
- Kurth, Rudolf (Anfangswertproblem der statistischen Mechanik) 411.
- Kuttner, B. (Differences of fractional order) 51; (Quasi-Hausdorff transformations) 250.
- Kuznecov, B. G. (Relativitätstheorie und Quantenmechanik) 195.
- La Barbera, Alberto (Area del cerchio) 131; (Aree e volumi del cilindro e del cono) 132.
- Laasonen, Pentti (Simultane Bestimmung mehrerer Eigenwerte) 75; (Eigenwertaufgabe einer Vektordifferentialgleichung) 75.
- Lacombe, Daniel (Ensembles récursivement ouverts ou fermés) 7. — s. Georg Kreisel 7.
- Ladopoulos, Panaiotis D.

- (Théorème de Desargues-Sturm) 133.
- Ladrière, Jean (Limitations internes des formalismes) 242.
- Ladyženskaja, O. A. (Prinzip der Grenzamplitude) 279.
- — — s. A. A. Kiselev 398.
- Ladyženskij, L. A. (Nicht-lineare Gleichungen) 119.
- Lakshmana Rao, S. K. s. Rao, S. K. Lakshmana 167.
- Lal, Pyare and P. L. Bhatnagar (Shock relations in a Fermi-Dirac gas) 430.
- Lameau, Jean (Équations de la relativité générale) 434.
- Lamprecht, Erich (Funktionalprimdivisoren) 29.
- Lapidus, L. I. ($N + N \rightleftharpoons d + \pi$ reactions) 451.
- Lapko, A. F. and L. A. Ljusternik (Mathematische Tagungen in der UdSSR) 1.
- Lashof, Richard K. s. Shiing-Shen Chern 139.
- Laslett, L. Jackson s. G. Belford 129.
- Lasota, A. (Problème aux limites relatif à l'équation de la corde vibrante) 87.
- Lass, Harry (Elements of pure and applied mathematics) 41.
- Latwesen, Alexander (Nomogramm „Quadratwurzeln aus komplexen Zahlen“) 305.
- Laugwitz, Detlef (Affine und Minkowskische Differentialgeometrie) 351.
- — — s. Ludwig Danzer 358.
- Laurenti, Fernando (Minimo di talune funzioni irrazionali) 8.
- Laurent'ev, M. A. und S. L. Sobolev (I. N. Vekua) 4.
- — — s. P. S. Alexandroff 4.
- Lax, Melvin s. Hermann Gummel 230.
- Le Fur, Bernard s. Fur, Bernard Le 405.
- Le Méhauté, Bernard s. Méhauté, Bernard Le 182.
- Lebesgue, Henri (Humbert et Jordan, Roberval et Ramus) 3.
- Lebowitz, Joel L. and Peter G. Bergmann (Irreversible Gibbsian ensembles) 412.
- — — and Harry L. Frisch (Nonequilibrium ensemble) 411.
- Lechnickij, S. G. (Anisotrope Platten) 382.
- Ledinegg, E. (Schaltungstheorie im Zentimeter-Wellengebiet) 185.
- Lee, T. D. and C. N. Yang (Nonlocal effects in μ decay) 208.
- Leech, John (Diophantine equations) 33.
- Legendre, Robert (Vitesse d'un fluide parfait incompressible) 166; (Sillage rotationnel d'une aile) 397.
- Lehmann, E. L. (Multiple decision problems. I.) 334.
- H. s. V. Glaser 201.
- Lehmer, Derrick Norman (Factor tables) 31; (List of prime numbers) 31.
- Lehrer, T. s. T. Austin 10.
- Lehto, Olli and K. I. Virtanen (Meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity) 63.
- Lelong-Ferrand, Jacqueline (Application of Hilbert space methods to Lie groups) 354.
- Lemmon, E. J. (Alternative postulate sets for Lewi's S 5) 5.
- Lenard, Andrew (Spin reversal in scattering processes) 442.
- Lenz, Hanfried (Kennzeichnung des Ellipsoids) 358.
- — s. Ludwig Danzer 358.
- Leonhard, A. (Selbsttätige Regelung) 128.
- Leont'ev, A. F. (Interpolation ganzer Funktionen) 260.
- Lepin, A. Ja. s. A. D. Myškis 112.
- Lepropre, M. s. F. Camps 371.
- Leptin, Horst (Reduktions-theorie Hilbertscher Räume) 104.
- Leray, Jean (Problème linéaire analytique de Cauchy) 82; (Solution unitaire d'un opérateur différentiel) 82.
- Lessen, M. (Thermoelastic solid) 227.
- Levi, Franco e Luigi Goffi (Studio flessionale di volte sferiche) 382.
- Levin, B. Ja. (Satz von Cartwright) 62.
- Levine, Harold (Skin friction on a strip) 406.
- Levinger, J. S., N. Austern and P. Morrison (Dipole sum rule) 440.
- Levitan, B. M. (Brief an die Redaktion) 276.
- Levšenko, B. T. (Begriff der Kompaktheit) 361.
- Lévy, Azriel (Indépendance conditionnelle de $V = L$) 7.
- Lévy, Paul (Processus de W. Feller et H. P. MacKean) 317; (Brownian motion) 326.
- Lewis, R. R. s. R. B. Curtis 218.
- Robert M. s. Joseph B. Keller 423.
- Lewy, Hans (Smooth linear partial differential equation) 81.
- Leżański, T. (Minimum of a convex functional) 298; (Approximate solution of a linear equation) 298; (Characteristic elements and values) 298.
- Li, James C. M. s. Tsuan Wu Ting 227.
- Lichnerowicz, André (Transformations affines et holonomie) 141; (Ondes et radiations gravitationnelles) 433.
- Lichtenstein, Roland M. (Random interchange of circuits) 417.
- Liebl, H. and H. Ewald (Bildfehler doppelfokussierender Massenspektrographen) 188; (Stigmatisch abbildende Massenspektrographen) 188.
- Liehr, A. D. s. W. Moffit 221.
- Liepmann, H. W. (Lighthill's heat transfer formula) 405.
- — — and A. Roshko (Gasdynamics) 399.
- Lifšic (Lifshitz), I. M., M. Ja. (M. Ia.) Azbel' and M. I. Kaganov (Galvanomagnetic effects in metals) 229.
- Lighthill, M. J. (Fourier analysis) 112; (Pitot-tube displacement effect) 172.
- Ling, Chih-Bing (Stresses in a perforated strip) 383.
- Linnell, R. D. (Hypersonic flow around a sphere) 403.
- Linnik, Ju. V. (Yu. V.) (Probability distribution) 312.
- — — s. T. A. Sarymsakov 4.
- Lions, J. L. (Théorème de Hille Yosida) 83.
- — — s. L. Hörmander 280.
- Lipiński, J. S. (Uniformisation des fonctions continues) 48.
- Lippmann, B. A. (Surface states in crystals) 228.
- Horst (Winkeltheorie in Minkowski- und Finsler-Räumen) 355.
- Livesley, R. K. (Automatic digital computers) 126.
- Livšic (Livshits), M. S. (Scattering matrix of an intermediate system) 200.

- Lju, Šao-sjué (Zerfallung unendlicher Algebren) 22.
- Ljubimov, V. V. s. S. D. Berman 14.
- Ljusternik, L. A. s. A. F. Lapko 1.
- Locher-Ernst, L. (Projektiver Punktraum) 345.
- Lock, R. C. (Supersonic area rule) 173.
- Lohwater, A. J. and G. Piranian (Boundary behavior of functions analytic in a disk) 65.
- Loinger, A. s. P. Bocchieri 412.
- Lokucievskij, O. V. (Fixpunktsatz) 149.
- Longuet-Higgins, M. S. (Velocities of maxima in a moving wave-form) 239; (Transformation of spectrum by refraction) 239; (Isotropic random surface) 327; (Study of the ionosphere) 421.
- Lorch, Lee (Gibbs phenomenon for Borel means) 255.
- and Peter Szego (Corrections to integral whose kernel involves Bessel function) 258.
- Łoś, J. and R. Suszko (Extending of models. IV.) 6.
- Loskutov, Ju. M. s. A. A. Sokolov 428.
- Loud, W. S. (Growth theorems for linear ordinary differential equations) 272.
- Louhivaara, Ilppo Simo (Dirichletsches Problem für selbstadjungierte Differentialgleichungen) 84.
- Love, E. R. (Banach space of distributions. I.) 112.
- Lowdenslager, D. B. (Duality in vector lattices) 286.
- Ludeke, Carl A. and John D. Blades (Response curves) 378.
- Lüders, Gerhart (Rotationszustände der Atomkerne. II.) 450.
- Ludwig, Günther (Ergodensatz und makroskopische Observablen. I.) 437.
- Lukacs, Eugene (Correction) 99.
- Luke, Dorman (Rhombic dodecahedron) 344.
- Lukomskaja, A. M. s. Bibliographische Quellen zur Mathematik und Mechanik 2.
- Luxemburg, W. A. J. s. Israel Halperin 106.
- Luyten, J. R. s. H. A. Tolhoek 208.
- Lye, Robert G. and A. J. Dekker (Secondary emission) 235.
- Lykova, O. B. (One-frequency oscillations) 80; (Differential equations in the vicinity of a closed orbit) 80; (Vibrations à une fréquence) 273.
- Lyons, Donald H. (Level structure of Li^6) 215.
- MacColl, L. A. (Relativistic oscillator) 189.
- MacDuffee, C. C. (Curves in Minkowski space) 143.
- Mackenzie, J. K. and M. J. Thomson (Statistics associated with random disorientation of cubes) 337.
- Mackie, A. G. s. J. B. Helliwell 402.
- MacLane, G. R. s. A. Edrei 62.
- Macon, N. s. A. Spitzbart 304.
- Madansky, L. s. Georges E. Owen 216.
- Maehara, Shôji (Rekursive Einführung der Funktionen in der Zahlentheorie) 245.
- Magnus, K. (Harmonische Linearisierung) 302; (Stationäre Schwingungen in nichtlinearen Systemen) 307; (Schwingungen in Temperatur-Regelkreis) 308.
- Makai, E. (Inequality of Mathieu) 251; (Systems of differential equations. I.) 269.
- Malgrange, B. (Intégrale de Dirichlet) 281.
- Mallick, D. D. (Rotation of a cylinder in a viscous liquid) 171.
- Manara, C. F. (Equivalenza per i poligoni ed poliedri) 343.
- Manaresi, Fabio (Serie coniugate della serie di Fourier) 255.
- Manarini, Marisa (Propagazione delle onde elettromagnetiche nei mezzi in moto) 184.
- Mani, G. S. s. S. B. D. Iyengar 219.
- Mann, W. Robert, C. L. Bradshaw and J. Grady Cox (Approximations to differential equations by difference equations) 302.
- Manne, Alan S. s. Harry M. Markowitz 340.
- Manning, Irwin s. Laszlo Tisza 413.
- Mansfield, M. J. (Full normality) 148.
- Manžeron (Mangeron), D. I. (Reduced accelerations) 137.
- March, N. H. s. B. Donovan 232.
- Marcus, Solomon (Dérivées partielles mixtes) 46.
- Mařík, Jan (Fonctionnelles sur l'ensemble des fonctions continues bornées) 289.
- Markowitz, Harry M. and Alan S. Manne (Discrete programming problems) 340.
- Markušević, A. I. (Funktionentheorie) 59.
- Marmion, A. (Axes des cylindres de révolution) 346.
- Marschall, H. and Th. Schmidt (μ -Mesonenmoleküle) 448.
- Martensen, E. (Druckverteilung an dünnen Gittern) 170.
- Martin, André s. Michel Gourdin 213.
- John C. (Magnus effects) 176.
- Martinelli, Enzo (Varietà a struttura complessa) 142.
- Martirosjan, R. M. (Spektrum des nicht-selbstadjungierten Differentialoperators $-\Delta u + cu$) 279.
- Marziani, Marziano (Equazioni di Maxwell) 183.
- Mascarenhas, S. (Thermal conduction of dielectrics) 412.
- Mascheck, Hans-Joachim (Theorie des Strahlflügels) 170.
- Maslennikova, V. N. (Cauchysches Problem für partielle Differentialgleichungen) 83.
- Massaro, Giliana Pannoli s. Pannoli Massaro, Giliana 364.
- Matsubara, Takeo s. Hirotugu Matsuda 226.
- Matsuda, Hirotugu and Takeo Matsubara (Lattice model of liquid helium II) 226.
- Matsumoto, Makoto (Differential geometry of spaces with analytic distances) 140.
- Matthes, Klaus (Lebesguescher Integralbegriff. II.) 106.
- Matthews, P. T. s. S. F. Edwards 447.
- s. Gordon Feldman 447.
- Matuzjavičius (Matuzevichus), A. (Cross-sections of fiber spaces) 367.
- Maurer-Tison, Françoise (Connexion affine en fonction du tenseur fondamental) 193.
- Mavridès, Stamatia (Étude algébrique d'un tenseur métrique) 194; (Identités de Bianchi) 433.

- Maximon, L. C. s. Haakon Olsen 203.
- Maxwell, Charles N. (Fixed points of symmetric product mappings) 153.
- Mayer, Joseph E. s. Charles E. Hecht 196.
- McAuley, Louis F. (Naturally ordered sets in semi-metric spaces) 362.
- McCarthy, J. P. (Cissoid of Diocles) 346.
- Paul J. (Distribution of the totatives) 34; (Indefinite ternary genera of one class) 38.
- McConnell, A. J. (Tensor analysis) 136.
- McCoy, Neal H. (Finite unions of ideals and subgroups) 22.
- McKiernan, Michel A. (Functional differential equation $Df = 1/fff$) 119.
- Medgyessy, P. (Analyse der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen) 316.
- Medvedev, B. M. (Scattering matrix. II.) 442.
- Meetz, Kurt (Heterogener Pile. I.) 219.
- Méhaute, Bernard Le (Liquides pesants en milieux perméables) 182.
- Melencov (Melentsov), A. A. (Hausdorff transformations) 251.
- Merat, Parviz (Équation de Dirac) 198; (Symétrie entre le retournement d'espace) 198.
- Merk, H. J. (Heat-driven oscillations of gas flows) 167.
- Merriell, D. M. (Flexible almost alternative algebras) 23.
- Mestel, L. and L. Spitzer jr. (Star formation in magnetic dust clouds) 237.
- Meyer, Klaus (Ferromagnetismus. I. II.) 232.
- R. E. (Supersonic flow behind a curved shock) 174.
- Michael, E. (Paracompact spaces) 148.
- J. H. (Subsets of the Euclidean n -sphere) 364.
- Michel, Bernard (Stabilité d'une installation hydro électrique) 410.
- J. G. L. (Differential analyser techniques) 306.
- Michler, Lothar (Hauptsatz der Galoisschen Theorie) 27; (Faktorgruppe $I||\S$) 28.
- Mikolás, Miklós (Lambertsche Reihen. I.) 70.
- Mikusiński, J. (Inégalités pour les déterminants) 10; (Operatorenrechnung) 113; (Solutions linéairement indépendantes des équations différentielles) 114.
- Mikusiński, J. and R. Sikorski (Distributions. I.) 111.
- Miles, John W. (Generation of surface waves by shear flows) 407.
- Miller, G. F. (Integrals in a hydrodynamical problem) 407.
- Milne-Thomson, L. M. (Hydrodynamical methods) 167.
- Milnes, Harold Willis (Convexity of Orlicz spaces) 287.
- Milnor, J. and L. S. Shapley (Games of survival) 328.
- Milnor, John (Groups which act on S^n without fixed points) 163; (Semi-simplicial complex) 366.
- Miranda, A. B. de s. H. de Vries 15.
- Mirguet, Jean (Opposition de courbures asymétrique) 146.
- Mišenko, E. F. (Asymptotische Berechnung periodischer Lösungen von Differentialgleichungen) 80.
- Misner, Charles W. and John A. Wheeler (Classical Physics as geometry) 191.
- Mitchell, A. H. (Exchange interaction between ferromagnetic electrons and conduction electrons) 233.
- Mittelstaedt, P. (Inelastische Streuung von K^+ -Mesonen an Kernen) 205; (Streuung von K^- -Mesonen an Kernen) 206; (Optisches Kernmodell) 215; (Streuung von K^- -Mesonen an komplexen Kernen) 447.
- Miyakawa, Kozaburo (Trogonal holoaxial crystals) 226.
- Mizohata, Sigeru (Hypoellipticité des équations paraboliques) 88.
- Mochov, V. N. s. M. G. Urin 452.
- Moessner, Alfred ($A^{2n} + B^2 = C^{2n} + D^2$) 33.
- Moffitt, W. and A. D. Liehr (Degenerate electronic states) 221.
- Mohanty, R. (Trigonometric integral) 50.
- Molinaro, Italico (R-transformation de Reynolds) 96.
- Møller, C. (Terrestrial tests of general theory of relativity) 431.
- Molodožnikov, A. A. (Restspannungen beim Schweißen) 386.
- Molski, R. (Symmetric products) 152.
- Montgomery, D. and C. T. Yang (Existence of a slice) 162.
- Moór, Arthur (Torsions- und Krümmungsinvarianten Finslerscher Räume) 143; (Schurscher Satz) 144.
- Moore, D. W. (Flow past a rotating cylinder) 171.
- J. C. s. V. K. A. M. Gugenheim 366.
- Moppert, Karl-Felix (Funktionenscharen in L_2) 290.
- Morev, I. A. (Begriff der monogenen Funktion) 69.
- Morgenstern, Dietrich (Schätzung unbekannter Verteilungsdichten) 337.
- Morioka, Shigeki (Transonic flow with a detached bow wave past a wedge) 172.
- Morita, Kiiti (Closed mappings. II.) 151.
- Morozov, A. I. (Stromführender Strahl und Magnetodielektrikum) 234.
- Morpurgo, G. s. C. Franzinetti 210.
- Morris, Chester R. (Electron trajectories) 187.
- Morrison, P. s. J. S. Levinger 440.
- Moshinsky, M. (Velocity-dependent forces and nuclear structure. I.) 449.
- s. M. Bauer 214.
- Mostow, G. D. (Conjecture of Montgomery) 163.
- Mostowski, A. (Generalization of quantifiers) 244.
- s. Casimir Kuratowski 146.
- Motjakov, V. I. s. S. A. Aleskerov 128.
- Mott, Thomas E. (Newton's method and multiple roots) 120.
- Motzkin, T. S. and J. L. Walsh (Underpolynomials and infrapolynomials) 261.
- Moyal, J. E. (Discontinuous Markoff processes) 321.
- Mrówka, S. (Remarks on compactness) 148.
- Mukhopadhyay, H. s. S. Sen Gupta 440.
- Mumm, Thiounn (Solution à singularité mobile des équations du neutrino) 198.

- Münch, Johann (Adiabaten realer Gase) 221.
- Munro, N. A. (Lidstone's Z-method) 338.
- Murphy jr., Charles H. (Pitching and yawing motion of missiles) 376.
- Myrberg, Lauri (Meromorphe Funktionen auf Riemannschen Flächen) 67.
- P. J. (Automorphe Funktionen. I. II.) 71.
- Myškis, A. D. und A. Ja. Lepin (Verallgemeinerte Funktionen) 112.
- Nagaev, S. V. (Limit theorems for homogeneous Markoff chains) 318; (Limit theorems for stationary Markov chains) 318.
- Nagai, Tamao (Subgroups of simply transitive groups) 354.
- Nagata, Jun-iti (Metrizability of a topological space) 361.
- Nagy, K. (Relativistic equation of motion for spinning particles) 191.
- Nahon, Fernand (Nuage des vitesses spatiales) 235.
- Naito, Kunio (Unstable particle in Lee's model) 443.
- Nakae, Tatuo (Variations of differential forms) 354.
- Nakai, Shinzo (Isotopic spin of the antiparticle) 211.
- Nakano, Huzio (Electrical conductivity) 229.
- Nanda, V. S. s. S. K. Trikha 225.
- Narain, Roop (Chain of Laplace transforms) 97; (Hankel transform) 100.
- Nardini, Renato (Velocità di gruppo nei mezzi elettricamente conduttori) 417.
- Narlikar, V. V. (From the trivial to the non-trivial) 1.
- Narodeckij (Narodetsky) M. Z. (Twodimensional problems in elasticity) 383; (Problem der ebenen Elastizitätstheorie) 383.
- Naruoka, M. and H. Yonezawa (Free lateral vibration of the beam bridge) 391.
- Nash, John (Parabolic equations) 87.
- Nassif, M. (Product series of simple sets of polynomials) 261; (Product of basic sets of polynomials) 261.
- Natanson, G. I. s. I. P. Natanson 45.
- Natanson, I. P. und G. I. Natanson (Denjoysche Integrale) 45.
- Natucci, Alpinolo („Trauaglitia inventioni“ di N. Tartaglia) 3.
- Nazarov, A. G. (Ähnlichkeit) 396.
- Nef, Walter (Monotone Linearformen) 102.
- Nehari, Zeev (Coefficients of univalent functions) 64; (Oscillation criteria) 76.
- Neou, Ching-Yuan (Airy polynomial stress functions) 383.
- Neugebauer, H. E. J. (Babinet's principle) 186.
- O. (Planetary theories) 241.
- Neumann, B. H. (Corrigendum to „Ascending derived series“) 15.
- Hanna (Intersection of finitely generated free groups) 14.
- Neumann, J. von 242.
- Nevanlinna, F. (Differenzierbare Abbildungen) 103.
- Newman, F. H. and V. H. L. Searle (Properties of matter) 373.
- Morris (Theorems about $p_r(n)$) 34; (Congruences for coefficients of modular forms) 34.
- Newton, Roger G. and Thomas Fulton (Neutron-proton potentials) 448.
- Nickel, K. (Grenzschicht-Differentialgleichungen) 176.
- Nicolovius, Rüdiger (Platten-Randwertaufgabe) 282.
- Niedenfuhr, F. W. (Choosing stress functions) 383.
- Nijenhuis, Albert s. Alfred Frölicher 142.
- Nishijima, Kazuhiko (Asymptotic conditions in quantum field theory) 201.
- Nishiyama, Toshiyuki (Bose system) 224.
- Nitsche, Johannes (Isolierte Singularitäten von $\Delta u = e^u$) 92.
- Niuman, Frank and Karl Pohlhausen (Remarks on the paper by M. Finston) 398.
- Norden, A. P., B. A. Rozenfel'd und I. M. Jaglom (P. K. Raševskij) 4.
- Normandin, Michel (Phénomènes parasites dans un canal à houle) 407.
- Noteboom, E. (Optische Verhältnisse beim Brillenglas) 424.
- Nougaro, Jean, Jacques Dat et Georges Giralt (Mesure de niveau par variation de résistance) 181.
- Novožilov (Novozhilov), Ju. V. (Ju. V.) (Scale transformation and virial theorem) 203; (Continuous Dirac spectrum) 442.
- Novruzov, A. A. s. G. N. Agaev 118.
- Nozières, Philippe (Description collective des électrons) 198.
- Oberrländer, Siegfried s. W. W. Dobrowolski 137.
- Obrechhoff, Nikola (Approximation diophantienne des formes linéaires) 40; (Approximation diophantienne des nombres réels) 40.
- Oikawa, Kôtarô (Prolongation of an open Riemann surface) 69.
- Okun, L. B. s. B. L. Ioffe 219.
- Olech, C. (Surfaces filled up by asymptotic integrals of ordinary differential equations) 273.
- , Z. Opial et T. Ważewski (Oscillation des intégrales de l'équation $y'' + g(t)y = 0$) 77.
- Olejnîk (Oleinik), O. A. und T. D. Ventcel' (Erste Randwertaufgabe und Cauchysches Problem für Gleichungen vom parabolischen Typus) 276.
- — — und N. D. Vvedenskaja (Vvedenskaya) (Cauchy problem for nonlinear equations) 81.
- Olsen, Haakon, L. C. Maximon and Harald Wergeland (High-energy bremsstrahlung) 203.
- Olubummo, Adegoke (Left completely continuous $B^\#$ -algebras) 291.
- O'Meara, O. T. (Characterization of quadratic forms by Gauss sums) 29.
- Omnès, R. s. B. d'Espagnat 209.
- s. Marcel Froissart 206.
- Oneda, S. (Two-component theory of the neutrino) 209.
- Oniščik, A. L. (Cohomologien der Wegeräume) 160.
- Opial, Z. (Système d'inégalités intégrales) 73; (Intégrales de l'équation $u' + a(t)u' + b(t)u = 0$) 77.
- s. C. Olech 77.
- Oppenheim, Irwin and John Ross (Temperature depen-

- dence of distribution functions) 412.
- Orlicz, W. and V. Pták (Saks spaces) 287.
- Orlov, Ju. V. (Iu. V.) (Internal bremsstrahlung in nuclear transitions) 446.
- Osada, Jun'ichi s. Haruyuki Fujino 206.
- Oser, Hansjörg (Erzwungene Schwingungen in rotierenden Flüssigkeiten) 397.
- Osserman, Robert (Solution of $f[f(z)] = e^z - 1$) 300.
- Oudart, A. s. M. Giqueaux 259.
- Owen, George E. and L. Madansky (B^{11} (d, n) C^{12} reaction) 216.
- John W. (Oscillations of condensed stars) 237.
- P. R. and H. K. Zienkiewicz (Uniform shear flow in a wind tunnel) 171.
- Oxtoby, John C. (Banach-Mazur game) 329.
- Paasche, Ivan (Alternierender Summationsprozeß) 31.
- Pacelli, Mauro (Contatto con attrito tra due corpi elastici) 393.
- Pachner, Jaroslav (Kompatibilität der Feldgleichungen in unitärer Feldtheorie) 434.
- Page, Lorne A. (Polarization effects in annihilation of positrons) 446.
- Pagni, Mauro (Problema al contorno tipico per l'equazione del calore) 276.
- Pahl, M. (Ambipolare Effusion aus der positiven Säule) 222.
- Pai, Shih-I. (Energy equation of magneto-gas dynamics) 429.
- Pais, A. and R. Serber (Strong coupling) 204.
- Palmer, D. S. (Distribution of intervals between successive maxima) 327.
- Palomba, Giuseppe (Macroeconomica e sviluppi del sistema paretiano) 340.
- Pan, T. K. (Indicatrice torsion) 354.
- Pannoli Massaro, Giliana (Problème des sélections) 364.
- Papakyriakopoulos, C. D. (Solidi tori) 163; (Dehn's lemma) 164.
- Papy, Georges (Complexes de de Rahm et d'Alexander) 154.
- Parasjuk (Paarsiouk), O. S. (Filtration des processus stationnaires) 324.
- Parchomenko, A. S. (Was ist eine Kurve?) 359.
- Park, D. (Born approximation) 442.
- David (Diffusion par deux potentiels) 440.
- Parker, E. N. (Dynamical properties of ionized gases) 429.
- R. V. (Hogben's figurate series) 9.
- Parsons, D. H. (Plastic flow with axial symmetry) 388.
- Pascual, Michael J. (Solving differential equations without complex numbers) 74.
- Pasynkov, B. s. P. Alexandroff 152.
- Patterson, E. M. (Linear algebras of genus one) 23; (Generators of linear algebras) 24.
- Pauli, W. (Verletzung von Spiegelungs-Symmetrien in der Atomphysik) 195.
- Pavel, M. (Quasi normed spaces) 291.
- Payne, L. E. and H. F. Weinberger (Lemma of Finn and Gilbarg) 400.
- Peano, Giuseppe (Opere. I.) 41.
- Pearson, Carl E. (Finite strip problem) 95.
- Peaslee, D. C. s. R. W. King 210.
- Peck, J. E. L. and A. L. Dulmage (Games on a compact set) 327.
- Pelczyński, A. (Stone's theorem on approximation) 104; (B -spaces) 104; (Approximation of S -spaces) 287.
- Péneloux, André (Processus irréversibles de Popoff) 412.
- Penney, W. s. T. Austin 10.
- Perlin, Ju. E. (Iu. E.) (Capture of conduction electrons) 232.
- Perron, Oskar (Schlichtheitschranke von J. S. Thale) 266.
- Peters, A. S. and J. J. Stoker (Motion of a ship) 409.
- Petersen, G. M. (Iteration of regular matrix methods of summation) 248; (Sequences of iterations) 248; (Norm of iterations of regular matrices) 248; (Sets of consistent summation methods) 249.
- Petiau, Gérard (Fonctions d'ondes) 439; (Fonctions d'ondes d'un type nouveau) 444.
- Petrov, V. V. (Local theorem for lattice distributions) 315.
- Pettis, B. J. (Open homomorphisms) 18.
- Peyerimhoff, Alexander und Hans-Egon Richert (Anwachsen analytischer Funktionen) 264.
- Phan, Van-Loc (Diffraction des ondes lumineuses) 423.
- Phelps, R. R. (Convex sets and nearest points) 357.
- Phillips, O. M. (Generation of waves by turbulent wind) 181.
- Ralph S. s. Einar Hille 100.
- Pickert, Günter (Analytische Geometrie) 132.
- Piehler, Joachim (Verteilung kubischer Reste) 37.
- Pignatelli, M. s. S. Colombo 235.
- Pignedoli, Antonio (Elettromele) 188.
- Pikus, D. L. (Kongruenzaxiom für Dreiecke) 342.
- Pini, Bruno (Primo problema di valori al contorno per l'equazione parabolica) 276.
- Pinsker, M. S. (Extrapolation of homogeneous random fields) 324.
- Piquemal, Jean (Surpressions dans les conduites forcées) 126; (Analogie électrique des surpressions engendrées) 184.
- Pirani, F. A. E. (Tetrad formulation of general relativity theory) 191.
- Piranian, G. s. A. J. Lohwater 65.
- Pirl, Udo (Isotherme Kurvenscharen) 266.
- Pitaevskij (Pitaevskii), L. P. (Energy spectrum of liquid He^4) 225.
- Pjateckij, I. I. s. A. G. Postnikov 311.
- Plebański, J. s. L. Infeld 375.
- Plis, A. (One-sided non-uniqueness in ordinary differential equations) 74.
- Pluvinaige, Philippe et Joseph Proriot (Problème du deutéron) 215.
- Pohlhausen, Karl s. Frank Niuman 398.
- Poincelot, Paul (Influence des chocs sur la réflexion ionosphérique) 420; (Réflexion ionosphérique en présence de chocs) 421.
- Polanyi, M. (Beauty, elegance and reality in science) 439.
- Politano, Maria Luisa („Analysis situs“ di Leibniz) 241.
- Pollard, Harry (Poisson transform) 100.

- Pollard, Harry and Charles Standish (Discrete convolution transforms) 99.
- Ponomarev, V. I. (Stetige Zerlegungen der Bikompakta) 150.
- Pontrjagin, L. S. (Asymptotisches Verhalten der Lösungen von Differentialgleichungen) 80.
- Popken, J. (Mathematik und Gesellschaft) 1.
- Popper, K. R. (Propensity interpretation of probability and quantum theory) 438.
- Porte, Jean (Postulats pour le calcul des prédicats) 5.
- Postnikov, A. G. und I. I. Pjateckij (Normale Zeichenfolgen) 311.
- Potter, O. E. (Laminar boundary layers) 177.
- Pottsepp, L. s. M. Z. v. Krzywoblocki 168.
- Power, Edwin A. and John A. Wheeler (Thermal geons) 435.
- G. (Maxwell stress distribution in ideal dielectrics) 234.
- Prandtl, L. and O. G. Tietjens (Hydro- und aeromechanics) 396.
- Pratt jr., G. W. (Coupling between conduction electrons and d electrons) 233.
- Preisendorfer, R. W. (Radiative transfer theory) 425.
- Preißler, Günter (Fließarten und Wellengeschwindigkeit) 182.
- Prékopa, A. (Additive and multiplicative totals) 107.
- Prentki, J. s. B. d'Espagnat 209.
- Primas, H. (Kernresonanzspektrograph. I.) 450.
- Proriol, Joseph s. Philippe Pluvinaige 215.
- Proudman, J. (Tide and surge in an estuary) 239.
- Przeworska-Rolewicz, D. (Équations intégrales non-linéaires de seconde espèce) 283.
- Pták, V. s. W. Orlicz 287.
- Pugh, Robert E. (Furry's theorem) 444.
- Puppe, Dieter (Homotopie in abelschen Gruppen- und Monoidkomplexen. I. II.) 155.
- Pursell, Lyle E. (Ring $C(X, R)$) 147; (Isomorphisms of $C(X, R)$) 147.
- Pursey, D. L. (Fermi interactions) 212.
- Putnam, C. R. (Commutators and Jacobi matrices) 116.
- Hilary (Decidability and essential undecidability) 245.
- Puzikov, L., R. Ryndin and J. Smorodinsky (Scattering matrix of a two-nucleon system) 213.
- Pychteev (Pyhteev), G. N. (Kirchhoff's flow past a family of curves) 401.
- Pytte, Å. (Internal bremsstrahlung) 203.
- Quigley, Frank s. Henry Helson 290.
- Rabin, Michael O. (Effective computability of winning strategies) 329.
- Rademacher, Hans and Otto Toeplitz (Enjoyment of mathematics) 1.
- Radicati, L. A. and B. Touschek (Equivalence theorem for massless neutrino) 211.
- Ragab, F. M. (Product of Bessel and Legendre functions) 58; (Product of confluent hypergeometric functions) 258.
- Rainsford, Hume F. (Survey adjustments and least squares) 371.
- Ramacci, Maria Gabriella (Rappresentazioni analitiche delle curve gobbe) 138.
- Ramakrishnan, Alladi (Ergodic properties of stochastic processes) 320.
- Ramanna, R. s. V. C. Deniz 219.
- s. S. B. D. Iyengar 219.
- Ramanujan, M. S. (Hausdorff methods of summability) 249.
- Rangarajan, R. (Two stage sampling) 336.
- Rao, K. Narasimha Murthy (Theorems on bounded functions) 64.
- S. K. Lakshmana (Axially symmetric motions of viscous liquids) 167.
- Rassey, A. J. (Nucleonic binding states) 449.
- Rauch, L. L. and R. M. Howe (Servo with linear operation in a region about the switching curve) 308.
- Ravetz, J. R. (Derivate planes of continuous functions) 47.
- Raychaudhuri, Amalkumar (Electronic energy bands) 228.
- Read, R. C. (Maximal circuits in critical groups) 165.
- Redheffer, R. M. (Pairs of harmonic functions) 281.
- Redwood, M. (Dispersion effects in ultrasonic waveguides) 174.
- Ree, Rimhak (Simple groups defined by C. Chevalley) 16.
- Rees, D. (Problem of Zariski) 27.
- Regge, T. (Gravitational fields and quantum mechanics) 435.
- Reid, W. H. s. S. Chandrasekhar 75.
- William T. (Matrix transformation for linear differential equations) 269.
- Reidemeister, K. (Mathematik und Erkenntnistheorie) 4.
- Reiner, Irving (Normal subgroups of the unimodular group) 17.
- Remez, E. Ja. (Problèmes d'approximation de Tchebyscheff. I. II.) 53.
- Remizova, N. I. (Elastic displacements in shells) 382.
- Rényi, A. s. M. Arató 55.
- s. P. Erdős 263.
- Catherine (Periodic entire functions) 262.
- Rešetnjak, Ju. G. (Verfahren, nicht konvexes Polygon in konvexes zu verwandeln) 343.
- Restrepo, Rodrigo (Tactical problems) 332.
- s. Samuel Karlin 332.
- Reynolds, J. A. and J. M. Hough (Dielectric constant of mixtures) 223.
- Rice, M. H. s. R. H. Barlett 196.
- Richardson, E. G. (Relaxation spectrometry) 413.
- Richert, Hans-Egon s. Alexander Peyerimhoff 264.
- Richmond, D. E. (Complex numbers and trigonometry) 132.
- Rickayzen, G. (Thermal capture of electrons) 230.
- Ridder, J. (Integration von Differentialkoeffizienten) 45.
- Ridley, E. Cicely (Numerical method of solving second-order linear differential equations) 301.
- Rieger, G. J. (Satz von Shapiro) 32.
- Riesenberg, H. (Spiegelmikroskop) 425.
- Riesz, F. (Nachruf) 4.

- Ringel, G. (Geraden in allgemeiner Lage) 345.
- Ringleb, F. O. (Motion and stress of a cable) 394.
- Ringrose, J. R. (Precompact linear operators) 117.
- Riordan, John (Combinatorial analysis) 8.
- Ritus, V. I. (Scattering of photons by nucleons) 217.
- Rivlin, R. S. s. G. F. Smith 381.
- Rizzi, Alfredo (Classi di Fréchet delle funzioni di ripartizione) 313.
- Rjabov, Ju. A. (Periodische Lösungen von Differentialgleichungen) 272.
- Roberts, J. B. (Diophantine problem) 33; (Matrix summability in F -fields) 50.
- P. H. (Turbulent diffusion) 415.
- Robison, G. B. and E. S. Wolk (Imbedding operators on a partially ordered set) 19.
- Robson, D. S. (Multivariate polykays) 335.
- Rochlin (Rohlin), V. A. (Pontrjagin characteristic classes) 368.
- (Rokhlin), V. A. and A. S. Švare (Schwarz) (Pontrjagin classes) 368.
- Rockmore, Ronald M. (Pion-deuteron scattering) 207.
- Rodberg, L. S. (Many-body problem and Brueckner approximation) 214.
- Rogers, M. H. (Isothermal expansion of a gas cloud) 175.
- Roginskij (Roginsky), V. N. (Equivalent transformations of relay circuits) 378.
- Röhl, Helmut (Komplex-analytische Vektorraumbündel) 161.
- Rongved, L. (Dislocation in an infinite solid) 384.
- Rooney, P. G. (Gauss transformation) 99.
- Roseau, Maurice (Problème aux limites de type mixte) 408; (Ondes dans un liquide pesant) 408.
- Rosen, Nathan and Hadassah Shamir (Gravitational field of an axially symmetric system) 432.
- Rosenauer, Nicolai s. Kurt Hain 380.
- Rosenfeld, L. (Foundation of quantum theory) 438.
- Rosenhead, L. s. L. Prandtl 396.
- Roshko, A. s. H. W. Liepmann 399.
- Rosina, B. A. (Costruzione delle curve algebriche sghembe. I. II.) 348; (Corrispondenza [1, $n-1$]) 348.
- Rösner, Ortwin (Elektromagnetische $TE(H)$ -Wellen) 421.
- Ross, A. J. s. H. J. Davies 169.
- John s. Irwin Oppenheim 412.
- Rößner, Wolfgang s. Kurt Hain 380.
- Roth, Laura M. s. Louis Gold 230.
- Leonhard (Teorema di Enriques) 134.
- Roussopoulos, Paul N. (Gaz moléculaire et rayonnement) 426.
- Rozenčevjg, L. N. s. G. L. Vysockij 220.
- Rozenfel'd, B. A. (Symmetrische Räume) 353.
- — s. A. P. Norden 4.
- Rudin, Walter (Theorem of Paley) 59.
- Rufener, Ernst (Barwerte temporärer Verbindungsrenten) 339.
- Ruoff, Herbert s. G. H. Hardy 31.
- Rushbrooke, G. S. s. P. J. Wood 233.
- Russian-english glossary 374.
- Ryle, G. (Predicting and inferring) 439.
- Ryndin, R. s. L. Puzikov 213.
- Ryškov (Ryshkov), S. S. (Continuous mappings of ∞ -dimensional sets) 365; (Combinatorial topology of Hilbert space) 365.
- Saarlas, M. s. M. Z. v. Krzywoblocki 168.
- Saban, Giacomo (Teorema di Fenchel ed Avakumović) 350.
- Šabat (Shabat), B. V. (Dirichlet problem for equations of mixed type) 278.
- Sacerdoti, Silvana (Deformazioni di una corda) 378.
- Sachnovič, L. A. (Volterrasche Operatoren) 282.
- Sade, Albert (Quasigruppen automorphes) 13.
- Sáenz, A. W. (Transport equation for spinless molecules) 411.
- Šafarevič, I. R. s. B. A. Venkov 3.
- Šaginjan, A. L. (Sätze von Schottky und Picard) 66.
- Sagle, Arthur A. (Semi-magic squares and permutation matrices) 9.
- Sagomonjan, A. Ja. (Eindringen eines Keils in kompressible Flüssigkeit) 169.
- Saitō, Masahiko (Groupes de Lie résolubles) 18.
- Saksena, K. M. (Laplace integral) 98.
- Salam, Abdus (Scalar and pseudoscalar theories) 444.
- — s. B. d'Espagnat 209.
- Salecker, H. and E. P. Wigner (Measurement of space-time distances) 437.
- Saltykow, M. N. (Théorème de A. M. Liapounoff) 272.
- Salzmann, Helmut (Topologische projektive Ebenen) 341.
- Saminsky, Lazare (Physics and metaphysics of music) 242.
- Sanov, I. N. (Große Abweichungen von Zufallsgrößen) 312.
- Sansone, Giovanni (Determinazione delle orbite di un sincrotrone) 274.
- Santis, Richard de (Helly's theorem) 357.
- Santoboni, Luigi (Assicurazioni di annualità) 339.
- Sanyal, Lakshmi (Boundary layer equations) 405.
- Sargan, J. D. (Distribution of wealth) 340.
- Sarma, L. V. K. Viswanadha (Rotational flow of a liquid past a cylinder) 171.
- G. Sarton Memorial Issue 242.
- Sarymsakov, T. A. and Ju. V. Linnik (N. P. Romanov) 4.
- Sato, Iwao s. Tomoya Akiba 452.
- Satō, Masako (Fourier series. XVIII.) 254.
- — s. Shin-ichi Izumi 55, 253.
- Sato, Masatomo s. Saburo Amai 448.
- Sattler, K. (Plastizitäts-Probleme bei Stahlbeton- und Spannbeton-Konstruktionen. I. II.) 389.
- Saul'ev (Sauliev), V. K. (Boundary problem for ordinary differential equations) 124.
- Savasta, Carmelo (Eliche cilindriche) 350; (Classe di geodetiche) 350.
- Sawhney, M. P. (Equilibrium configuration of magnetic gravitating sphere) 430.
- Sawicki, J. and Z. Szymanski (Nucleon surface interaction) 216.

- Sawyer, W. W. (Determinants associated with Hilbert's inequality) 50.
- Saxon, David S. (High-energy potential scattering problems) 442.
- Scarf, H. E. (Differential games) 332.
- — — and L. S. Shapley (Games with partial information) 331.
- Schaefer, Helmut (Riemann-integrierbare Funktionen) 45.
- Schäffer, K.-A. (Likelihood-Anpassungstest) 333.
- Schatz, Heinrich (Composition of motions in the space) 349.
- J. A. (Representation of Banach algebras) 291.
- Scherrer, W. (Grundgleichungen der Flächentheorie. II.) 138.
- Schincke, E. (Drittes Randwertproblem der Potentialtheorie) 303.
- Erich s. Hans Schubert 400.
- Schlechtweg, H. (Mittelwertformeln zur genäherten Quadratur) 304.
- Schlichting, Hermann (Absaugung in der Aerodynamik) 168.
- Schlüter, A. s. R. Kippenhahn 236.
- Schmidt, E. T. s. G. Grätzer 25.
- Th. s. H. Marschall 448.
- Wolfgang (Mittelwerte über Gitter) 39; (Mean values over lattices) 39.
- Schnarbach, Kurt s. Kurt Hain 380.
- Schoknecht, G. s. R. Hosemann 227.
- Schönhofer, Alfred s. Albert Haug 228.
- Schreiber, Friedrich (Néelsche Theorie) 233.
- Schrieffer, J. R. (Thin superconducting film) 226.
- Schubert, Hans und Erich Schincke (Konturproblem der Hodographenmethode) 400.
- Schulz, Werner s. Hermann Blenk 167.
- Schuster, K. (Turbulenz und Wellenanfachung) 181.
- Schwartz, L. (Distributions. I.) 110.
- Scoins, H. I. s. H. C. Bolton 125.
- Searle, V. H. L. s. F. H. Newman 373.
- Sears, D. B. (Integral transforms over function spaces. II.) 284.
- Sechler, E. E. s. Y. C. Fung 390.
- Seckler, Bernard D. s. Joseph B. Keller 423.
- Sedney, R. (Laminar boundary layer in a supersonic flow) 404; (Boundary layer flows) 405.
- Sedov, L. I. (Dynamical explosion equilibrium) 175; (Ähnlichkeits- und Dimensionsmethoden in der Mechanik) 395.
- Segal, I. E. (Unitary group on a Hilbert space) 293.
- Segre, Beniamino (Dilatazioni di varietà differenziabili) 162.
- Seibert, Peter s. Johannes André 128.
- Selberg, Arne (R. H. Gran Olsson) 3.
- Sen, Bibhutibhusan (Problems of elastic plates) 94.
- D. K. (Static cosmological model) 195.
- Gupta, S. and H. Mukhopadhyay (Perturbed boundary condition in quantum mechanics) 440.
- Serber, R. s. A. Pais 204.
- Serini, Rocco (Destra e sinistra nella fisica) 349.
- Serre, Jean-Pierre (Cohomologie des variétés algébriques) 346.
- Šersňov, M. (Dimension metrischer Räume) 149.
- Seth, B. R. (Bending of a plate into a spherical shell) 386.
- Ševčenko, A. S. s. I. I. Artobolevskij 378.
- Sevely, Yves s. Max Teissie-Solier 417.
- Severi, Francesco (Virtual intersection of algebraic varieties) 134.
- Shaffer, Bernard W. and Raymond N. House jr. (Displacements in a wide curved bar) 387; (Zero shear stress in bending of a bar) 387.
- Shamir, Hadassah s. Nathan Rosen 432.
- Shapiro, Harold S. (Range of an integer-valued polynomial) 12.
- Shapley, L. S. s. J. Milnor 328.
- — — s. H. E. Scarf 331.
- Sharma, A. (Gołąb's contribution to Simpson's formula) 252.
- Shield, R. T. (Strength of butt joints) 389.
- Shih, Weishu (Extension de Kan) 156.
- Shimuar, Goro (Fonction ζ) 30.
- Shirota, Taira (Initial value problem for linear partial differential equations. II.) 83.
- Shoenfield, Joseph R. s. Georg Kreisel 7.
- Shtrikman, S. s. E. H. Frei 233.
- Šidák, Zbyněk (Strict sense and wide sense conditional expectations) 311.
- Sideriades, Lefteri (Cheminées d'équilibre à étranglement) 168; (Chambres d'équilibre) 410; (Stabilité de deux cheminées d'équilibre) 410.
- Siebert, Manfred und Walter Kertz (Lokales erdmagnetisches Feld) 238.
- Siegel, Carl Ludwig (Satz von J. Moser) 375.
- Sierpiński, Waclaw (Mathématiques en Pologne) 1; (Womit beschäftigt sich die Zahlentheorie) 30; (Zerlegung rationaler Zahlen in Stammbrüche) 35.
- Sikorski, R. s. J. Mikusiński 111.
- — — s. Casimir Kuratowski 146.
- Silver, Samuel s. Albert E. Heins 424.
- Simon, R. L. (Fréquence critique) 236.
- Simons, S. (Absorption of high frequency sound) 234.
- Singer, I. M. s. Richard Arens 109.
- — — s. Kenneth Hoffman 110.
- — — s. Richard V. Kadison 115.
- Singh, Vikramaditya (Interior variations and extremal problems for univalent functions) 265.
- Singwi, K. S. s. L. S. Kothari 227.
- Sion, Maurice and Philip Wolfe (Game without a value) 331.
- Sirk, Hugo (Vektorrechnung) 136.
- Sirlin, Alberto s. Toichiro Kinoshita 208.
- Širokov, F. V. s. Friedrich Riesz 4.
- Ju. M. s. V. A. Žirnov 191.
- (Shirokov), M. F. and V. B. Brodovskij (Brodovskii) (Motion of finite masses) 189.

- Širokov, P. A. (Symmetrische Räume) 353.
- Širšov, A. I. (Nicht-assoziative Nilringe) 22; (Ringe mit identischen Relationen) 24.
- Sitenko, A. G. (Gamma radiation from the collisions of pions with nuclei) 207.
- — — and K. N. Stepanov (Electron plasma in a magnetic field) 223.
- — — s. A. I. Akhieser 217.
- Skljanskij (Skljanski), A. L. (Trajectoires singulières du problème des trois corps) 441.
- Skornjakov, L. A. (*T*-Homomorphismen von Ringen) 21.
- Skorobogat'ko, V. Ja. (W. J.) (Bisectorielle Fläche) 132.
- Slater, N. B. (Classical motion under a Morse potential) 220.
- Slezov, V. V. s. M. I. Kaganov 235.
- Slugin, S. N. (Integralgleichungen, die in impliziter Form gegeben sind) 283.
- Smart, D. R. (Spectrum of an infinite matrix) 296; (Hilbert space operators) 296.
- Smirnov, V. I. s. Bibliographische Quellen zur Mathematik und Mechanik 2.
- Smith, F. B. (Diffusion of smoke) 240.
- G. F. and R. S. Rivlin (Stress-deformation relations for anisotropic solids) 381.
- W. L. s. D. R. Cox 337.
- Smorodinsky, J. s. L. Puzikov 213.
- Šmul'jan (Shmulian), Ju. L. (Y. L.) (Finite-dimensional operators) 268.
- Šmyglevskij (Shmyglevsky), Ju. D. (Yu. D.) (Gas dynamics of supersonic flows) 402.
- Šnol', É. É. (Eigenfunktionen der Schrödingergleichung) 279.
- Snyder, H. S. s. E. D. Courant 427.
- J. N. s. G. Belford 129.
- Sobolev, S. L. s. M. A. Lavrent'ev 4.
- Sobolevskij, P. E. s. M. A. Krasnosel'skij 297.
- Söderström, Lars-Gunnar (Valuation of the fund) 339.
- Sodha, Mahendra Singh (Carriers in semiconductors) 231.
- Soglio, Letizia Dal s. Dal Soglio, Letizia 153.
- Sokolov, A. and B. Kerimov (Scattering of particles) 446.
- — — A. and B. K. Kerimov (Particle scattering by a fixed center) 203.
- — — and Ju. M. (Iu. M.) Loskutov (Polarization of Čerenkov radiation) 428.
- Ju. D. (Méthode du moyennage des corrections fonctionnelles) 303.
- (Sokoloff), Ju. D. (G.) (Méthode des corrections fonctionnelles moyennes) 304.
- S. N. (Photon Green function) 202.
- Sokolow, A. (Quantenelektrodynamik) 444.
- Solitar, D. s. A. Karrass 14.
- Sonntag, G. (Geschichtete Halbebene) 382.
- Soós, Gy. (Finslersche Räume) 144.
- Soška, František (Electrical equivalent circuit of shear vibrations) 391.
- Southard, Thomas H. (Weierstrass \wp function) 309.
- Sowjetische Mathematik, Vierzig Jahre 1.
- Spampinato, Nicolò (V_5 di S_8) 135.
- Sparenberg, J. A. (Shrink-fit problem) 393.
- — —, T. C. Braakman and C. W. Benthem (Wiener-Hopf type integro-differential equation) 96.
- Specht, Wilhelm (Nullstellen eines Polynoms. I—III.) 11.
- Specker, E. (Unvollständigkeitssatz der Zahlentheorie) 246.
- Spiegel, E. van (Tragflächenproblem) 401.
- Spitzbart, A. and N. Macon (Numerical differentiation formulas) 304.
- Spitzer, Richard (Interacting spinor fields) 201.
- jr., L. s. L. Mestel 237.
- Springer, George (Riemann surfaces) 66.
- T. A. (Quadratic forms over algebraic number fields) 29.
- Spurny, H. s. H. Grumm 426.
- Squire, H. B. (Motion of wedge along water surface) 406.
- Srivastav, R. P. (Derivatives of integral functions) 262.
- Srivastava, Pramila (Rieszian summability) 52.
- Stadelmaier, Hans H. (Spannungsfeld der auf den Rand einer Halbebene wirkenden Tangentialkraft) 383.
- Stamatis, Euangelos S. (Euklids Stereometrie) 2.
- Stammberger, A. (Nomogramme für Absorptionsgesetz radioaktiver Strahlen) 305; (Nomogramme zur Bestimmung der Regelfaktoren von NTC-Widerständen) 305; (Nomogramm „Quadratwurzeln aus komplexen Zahlen“) 305.
- Standish, Charles s. Harry Pollard 99.
- Stanjukovič (Stanukovich), K. P. (Unsteady gas flows) 168.
- Stanković, Bogoljub (Abbildung gewisser Operationen durch Laplace-Transformation) 285.
- Starke, E. P. s. Howard Eves 1.
- Stefaniak, Hans St. (Selbststeuernde Flugkörper) 376.
- Steffensen, J. F. (Three bodies in the plane) 377.
- Stein, E. (Product varieties of Veroneseans) 135.
- Elias M. (Interpolation in polynomial classes) 52.
- Stepanov, K. N. s. A. G. Sitenko 223.
- Stephen, M. J. (Magnetic shielding constants in molecules) 220; (Nuclear spin-spin interactions in molecules) 221; (Double refraction phenomena) 426.
- Stern, Thomas E. (Piecewise-linear network analysis) 184.
- Sternberg, Shlomo and Aurel Wintner (Differential equations and implicit equations) 119.
- Stevens, K. W. H. (Ising model and ferrimagnetism) 234.
- Stewartson, K. (Magnetohydrodynamics of finite rotating disk) 188; (Spherical mass of fluid in a magnetic field) 430.
- Stöhr, Alfred (Wege in einem Strassennetz) 9.
- Stoilow, S. (Théorie moderne des surfaces de Riemann) 66.
- Stoker, J. J. (Water waves) 408.
- — — s. A. S. Peters 409.
- Stone, A. P. (Wigner coefficients) 196.
- Stoneley, Robert and Urs Hochstrasser (Attenuation of Rayleigh waves) 393.

- Storvick, David A. (Meromorphic functions) 63.
- Strachan, Charles (Alpha-group in shell-model) 215.
- Štraus, A. V. (Spectral functions of a differential operator) 119; (Verallgemeinerte Resolventen) 119.
- Strivastava, Krishna Ji (Fractional integration and Meijer transform) 285.
- Strother, W. L. s. C. E. Capel 153.
- Struminskij (Struminsky), V. V. (Equations of boundary layer) 405.
- Stuart, Alan (Binomial variance) 335.
- Studnev, Ju. P. (Y. P.) (Lindberg's conditions) 315.
- Stueckelberg, E. C. G. (Violation of parity conservation) 191.
- Stupina, I. D. (A_2 -Operation) 43; (CA_2 -Operation) 44.
- Su Bu Chin (Chinesische Mathematik) 1.
- Buchin (Godeaux sequences and associate Laplace sequences) 352; (Koschmieder invariant) 355.
- Subramanyam, S. S. (Acute angle) 132.
- Sudakov, V. V. (Meson-meson scattering) 204; (Renormalizability of quantum electrodynamics) 204.
- Sulanke, Rolf (Cartanscher Zusammenhang eines Finslerschen Raumes) 144.
- Šulejkin (Shoulejkin), V. V. (Sea waves) 409.
- Summent, George A. (Lost work on Euclid) 2.
- Sunouchi, Gen-ichirō s. Shin-ichi Izumi 253.
- Sunyer i Balaguer, Ferran (Détermination d'une fonction par ses nombres dérivés) 46.
- Supnick, Fred (Extreme Hamiltonian lines) 165.
- Suschowk, Dietrich (Anfangswertproblem der Wellengleichung) 87.
- Süss, Wilhelm (Eihyperflächen) 359.
- Süssmann, G. (Analysis measurement) 439.
- Suszko, R. s. J. Łoś 6.
- Švare, A. S. (Problem von Sikorski) 149; (Geschlecht eines topologischen Raumes) 364.
- — — s. V. A. Rochlin 368.
- Švec, Alois (Congruenze di rete) 352.
- Swingle, Paul M. (Higher dimensional indecomposable connected sets) 152.
- Sykes, M. F. s. C. Domb 233.
- Sz.-Nagy, Béla (Transformations normales de l'espace hilbertien) 292.
- Szabó, István (Technische Mechanik) 375.
- Szász, G. (Translationen der Halbverbände) 20.
- — und J. Szendrei (Translationen der Halbverbände) 20.
- Paul (Analytische Geometrie der hyperbolischen Ebene) 131; (Hyperbolische Trigonometrie) 131; (Elementargeometrischer Beweis von H. A. Schwarz) 131.
- Szgo, Peter s. Lee Lorch 258.
- Szekeres, G. (Spinor geometry and general field theory) 435.
- — and F. E. Binet (Borel fields over finite sets) 20.
- Szendrei, J. s. G. Szász 20.
- Szépálus, P. (Fermi zero-point kinetic energy) 224.
- Szilard, K. S. s. Friedrich Riesz 4.
- Szmydt, Z. (Problème de Goursat) 86; (Équations différentielles hyperboliques) 87.
- Szymanski, Z. s. J. Sawicki 216.
- Taffara, L. s. C. Ceolin 206.
- Takács, L. (Anodenstromschwankungen von Elektronenröhren) 188; (Probability problems concerning the theory of counters) 326.
- Takahashi, Y. (Ward identity) 202.
- Takasu, Tsurusaburo (Principal fibre bundles as almost Kleinean geometries) 356.
- Takeo, Makoto s. Shang-yi Ch'en 236.
- Tamura, Jirō (Maximal Riemann surface) 266.
- Tanaka, Chuji (Kintchine-Ostrowski's theorem) 265.
- Katsumi (Fixed-source meson theory) 203.
- Tardieu, Paul s. Pierre Durandau 426.
- Tauber, G. E. and Ta-You Wu (Independent-particle central-field nuclear model) 449.
- Taussky, Olga (Matrix classes) 29.
- Taylor, Angus E. and Charles J. A. Halberg (Bounded linear operator) 103.
- Tedeschi, Bruno (Limitazioni della probabilità) 314.
- Teicher, Henry s. Meyer Dwass 313.
- Teissie-Solier, Max et Yves Sevely (Diagramme théorique du moteur shunt) 417.
- Temčenko (Temchenko), M. E. (Mechanical equilibrium positions) 379.
- Ter-Martirosjan (Ter-Martirosian), K. A. (Charge renormalization) 445.
- Terracini, Alessandro (Cauchy a Torino) 3.
- Terzioğlu, A. Nazim und Suzan Kahramaner (Argument der analytischen Funktionen) 265.
- Tevikjan (Tevikian), R. V. (Schwinger-equation in Bloch-Nordsieck model) 445.
- Thalberg, Olaf M. („Conic involutions“) 349.
- Thaler, R. M. and L. C. Biedenharn (Coulomb penetration) 215.
- Thatcher, A. R. (History of probability and statistics. VI.) 327.
- Thébault, V. (Tétraèdre à bihauteurs égales) 344.
- Victor (Faisceaux de sphères et de cercles) 344.
- Theodorescu, Radu (Stochastische kontinuierliche Prozesse) 322.
- Thirring, W. E. s. S. Fubini 206.
- Walter E. (Relativistic field theory) 443.
- Thomas, T. Y. (Lüder's band problem) 381.
- Thomé, Vidar (Estimates of Friedrichs-Lewy type) 86.
- Thompson, Gerald L. s. John G. Kemeny 331.
- Thomson, M. J. s. J. K. Mackenzie 337.
- Thorne, R. C. (Asymptotic expansion of Legendre functions) 58; (Linear second order differential equations) 58; (Differential equations with a turning point) 58.
- Thurston, H. A. (Derived operations) 19.
- Tietjens, O. G. s. L. Prandtl 396.
- Tillmann, Heinz Günther (Analytische Funktionale) 108.
- Timan, A. F. s. I. E. Gopengauz 49.
- Ting, Lu (Diffraction of distur-

- bances around a convex right corner) 180.
- Ting, Lu s. Antonio Ferri 173.
- Tsuan Wu and James C. M. Li (Thermodynamics for elastic solids) 227.
- Tisza, Laszlo and Irwin Manning (Fluctuations and irreversible thermodynamics) 413.
- Tjapkin (Tyapkin), K. F. (Derivatives of gravity potential and of magnetic potential) 238.
- Tobocman, W. (Impulse approximation for stripping reactions) 216.
- Toda, Hiroshi (Reduced join and Whitehead product) 158; (Mappings of S^{31} into S^{16} with Hopf invariant. I.) 159.
- Todes, O. M. s. A. G. Žarkovskij 187.
- Todeschini, Bartolomeo (Equazione di Chaplygin) 399.
- Toeplitz, Otto s. Hans Rademacher 1.
- Tolhoek, H. A. and J. R. Luyten (Influence of four-fermion interaction on the muon capture rate) 208.
- — — s. P. J. Brussaard 196.
- Tolmačev (Tolmachev), V. V. (Time correlation functions for statistical systems) 411.
- Tolpygo, K. B. and A. M. Fedorčenko (Fedorchenko) (Interaction of an electron hole with lattice vibrations in a crystal) 230.
- Tonning, Andreas (Scattering of acoustic disturbance in the atmosphere) 185.
- Toraldo di Francia, G. (Traiettoria (ottima di un missile) 376; Moto ceduto da un'onda elettromagnetica a un piccolo ellissoide) 422; (Sul momento di quantità da un'onda elastica trasversale) 422; (Spin of electromagnetic radiation) 423.
- Tortrat, Albert (Produit de composition des mesures singulières) 310.
- Toscano, Letterio (Triangolo speciale) 131.
- Touschek, B. s. L. A. Radicati 211.
- — F. (The mass of the neutrino and the non-conservation of parity) 212.
- Townsend, A. A. (Turbulent flow in atmosphere) 406.
- Trachtenbrot, B. A. (Operators realizable in logical nets) 306.
- Trainor, L. E. H. (Antisymmetric wave functions) 441.
- Trautman, A. (Conservation theorems) 190; (Periodic gravitational fields representing radiation) 190.
- Tremont, Jacques (Transformation birationnelle du plan) 348.
- Treves, D. s. E. H. Frei 233.
- Trèves, François (Correspondances vectorielles) 288.
- Tricomi, F. G. (Integral equations) 94.
- Trikha, S. K. (Liquid He^3) 224.
- — — and V. S. Nanda (Solutions of He^3 and He^4) 225.
- Truckenbrodt, Erich (Ähnlichkeitsregeln der kompressiblen Strömung) 170.
- Trybula, S. (Distribution of a random variable) 310; (Problem of prognosis) 336.
- Tschobanow, Iw. s. Bl. Dolaptschiew 74.
- Tsou, S.-T. and A. G. Walker (Metrisable Lie groups) 18.
- Tsuji, Masatsugu (Abelian and Schottkian covering surfaces) 67; (Riemann surface) 67.
- Tsukamoto, Yôtarô (Kählerian manifolds) 142.
- Tu, Yih-O s. George Handelman 390.
- Tucker, A. W. s. M. Drescher 310.
- Tukey, John W. (Upper 50% points of Fisher's B distribution) 333.
- Tumarkin, G. C. (Funktionen auf rektifizierbaren Kurven) 252.
- L. A. (Cantorian manifolds) 362.
- Turán, P. s. J. Balázs 54.
- Twiss, R. Q. s. R. Hanbury Brown 413.
- Tzou, Kuo-Hsien (Formulation matricielle du champ vectoriel) 198; (Champ vectoriel chargé de masse propre nulle) 199; (Invariance de jauge des champs du neutrino) 211.
- Uchiyama, Saburô s. Shin-ichi Izumi 55.
- Ulanovskij (Ulanovsky), M. A. (Objects of affine connectivity) 355.
- Umakanth, N. s. S. B. D. Iyengar 219.
- Umezawa, Hiroomi and Antoine Visconti (Isomerism of elementary particles) 211.
- Unal, Burhan Cahit et Jean-Pierre Vigier (Paramètres relativistes d'Einstein-Kramers) 194.
- Urich, Wolfram s. A. Sokolow 444.
- Urin, M. G. and V. N. Mochov (Mokhov) (Polarization of protons) 452.
- Vălcovici, Victor (Liaisons non holonomes) 375.
- Valentiner, Siegfried (Vektoren und Matrizen) 136.
- Vallée, Denise s. Maurice Fernain 402.
- Vandiver, H. S. (Diophantine equations in certain rings) 33.
- Vantroys, Lucien (Détermination des marées) 180.
- Varga, O. (Riemannsche Räume, die freie Beweglichkeit besitzen) 353.
- Vasvári, B. s. J. I. Horváth 182.
- Veklenko, B. A. s. L. M. Biberman 425.
- Vekua, I. N. s. P. S. Alexandroff 4.
- Veltman, B. P. Th. (Nicht-linearitäten in Regelungssystemen) 308.
- Venkatachalam Iyer, R. s. Iyer, R. Venkatachalam 33.
- Venkov, B. A. und I. R. Šafarevič (D. K. Faddeev) 3.
- Ventcel', T. D. (Erstes Randwertproblem für quasilineare parabolische Gleichung) 88.
- — — s. O. A. Olejnik 276.
- Verma, G. R. (Dirac's delta-function in isolated force problems) 384.
- Vicente, R. O. s. Harold Jeffreys 237, 238.
- Vidav, Ivan (Spectre du produit $a * a$) 292.
- Vigier, J.-P. (Concept of probability) 438.
- — s. Burhan Cahit Unal 194.
- Vilenkin, N. Ja. und I. M. Jaglom (Mathematischer Unterricht an den pädagogischen Instituten) 1.
- Vincensini, Paul (Oeuvre géométrique L. Bianchi) 137; (Déformation de réseaux isogonaux) 351.
- Vinograd, R. É. (Method of characteristic exponents) 80; (Zentraler charakteri-

- stischer Exponent von Differentialgleichungen) 271.
- Vinograd, R. E. und D. M. Grobman (Unterscheidungsprobleme von Frommer) 269.
- Viola, Tullio (Funzioni continue) 48.
- Virtanen, K. I. s. Olli Lehto 63.
- Visconti, Antoine s. Hiroomi Umezawa 211.
- Viswanadha Sarma, L. V. K. s. Sarma, L. V. K. Viswanadha 171.
- Vitale, B. s. D. Amati 205.
- Volkman, Bodo (Uniform distribution and density) 40.
- Volland, Walter (Additive Eipolyederfunktionale) 358.
- Volmer, Johannes s. Kurt Hain 380.
- Volpato, Mario (Formula di derivazione delle funzioni composte) 47.
- Voznjuk (Voznyuk), L. L. (Periodic solutions of high order equations) 81; (Solutions périodiques des équations du haut ordre) 273.
- Vries, H. de (Compactification of a set) 42.
- — — and A. B. de Miranda (Groups with a small number of automorphisms) 15.
- Vvedenskaja, N. D. s. O. A. Olejnik 81.
- Vysockij (Visotskij), G. L., A. A. Kresnin and L. N. Rozenveig (Rozentsveig) (Bremsstrahlung of polarized electrons) 220.
- Vzorova, A. I. (Laplacesche Gleichung in elliptischen Gebieten) 309.
- Waerden, B. L. van der (Theorie der Trennschaukel) 415.
- Wagner, Harvey M. (Automatic optimum programming) 127.
- K. (Cantorsche Äquivalenzrelation) 42.
- Wait, James R. (Induction by an oscillating magnetic dipole) 421.
- Walden, W. (Study of games through computing machines) 330.
- Walker, A. G. (Dérivation torsionnelle) 142.
- — — s. S.-T. Tsou 18.
- Wallace, A. D. (Central elements of a lattice) 20.
- Walsh, J. L. and David Young (Harmonic and discrete harmonic functions) 94.
- Walsh, J. L., s. T. S. Motzkin 261.
- Walter, Wolfgang (Verallgemeinerte Laplace-Operatoren) 92.
- Walters, T. S. (Diffusion from an infinite line source) 240.
- Wang, Hao (Axiomatization of arithmetic) 5.
- Ward jr., L. E. (Mobs, trees and fixed points) 363.
- Warner, Seth (Weakly topologized algebras) 292.
- Watanabe, Satoshi (Chirality of K particle) 212.
- Yosikatu (Inequalities among various means) 49.
- Watson, K. M. (Multiple scattering by quantum-mechanical systems) 199.
- — — s. Robert Karplus 440.
- Wazewski, T. (Système d'inégalités intégrales) 74.
- — s. C. Olech 77.
- Weber, Joseph and John A. Wheeler (Gravitational waves of Einstein and Rosen) 432.
- Webster, M. S. (Recurrence relations for classical functions) 257.
- Wegener, F. und F. Kowalke (Widerstandsbeiwerte von Tragflügeln) 173.
- Weidenmüller, Hans-Arwed (Nukleonpolarisation) 451.
- Weil, A. s. C. Chevalley 4.
- Weinberg, Louis (Tschebyscheff and Butterworth ladder networks) 184.
- Steven (Strong interactions in decay processes) 210.
- Weinberger, H. F. s. L. E. Payne 400.
- Weinel, E. (Schubverzerrung in Schalen) 381.
- Weir, C. D. (Creep of thick tubes) 389.
- Wendel, J. G. (Groups and conditional Monte Carlo) 335.
- Wergeland, Harald s. Haakon Olsen 203.
- Westfold, K. C. (Magnetohydrodynamic shock waves in the solar corona) 429.
- Weston, J. D. (Decomposition of a functional into non-negative components) 288; (Comparison of topologies) 360.
- Wheeler, John A. (Quantum geometrodynamics) 192.
- — — s. Dieter R. Brill 435.
- — — s. James J. Griffin 449.
- Wheeler, John A. s. Charles W. Misner 191.
- — — s. Edwin A. Power 435.
- — — s. Joseph Weber 432.
- R. F. (Solving quadratics quickly) 305.
- Wheeler, Albert D. (Tropospheric dielectric fluctuations) 418; (Spectrum of turbulent fluctuations) 419.
- Whiteman, Albert Leon (Cyclotomic numbers) 37.
- Whitham, G. B. (Problems of shock dynamics. I.) 403.
- Whitney, Hassler (Real algebraic varieties) 134.
- Widom, Harold (Nonisomorphic approximately finite factors) 292.
- Wiener, Norbert and Aurel Wintner (Random time) 431.
- Wightman, A. S. s. D. Hall 443.
- Wigner, E. P. s. Edwin Hewitt 99.
- — — s. H. Salecker 437.
- Wild, E. (Electromagnetic waves in nearly periodic structures) 185.
- Wilder, R. L. (Mapping theorems) 151.
- Wildermuth, K. (Kerneigenschaften und Zweikörperkräfte. I.) 213.
- Wille, R. J. (Ahlfors' inequality) 68.
- Williams, W. E. (Diffraction of a dipole field) 423.
- — — s. S. N. Karp 423.
- Williamson, J. H. (Condition equivalent to normability) 101.
- M. H. (Interspecific competition) 337.
- Wilson, J. C. (Heat transfer at rectangular corners) 125.
- R. (Hadamard multiplication of integral functions) 263.
- Wine, R. L. and John E. Freund (Decision patterns involving n means) 9.
- Wing, G. Milton s. Richard Bellman 218.
- Wintner, Aurel (Équations laplaciennes) 97; (Stable distributions and Laplace transforms) 97; (Reduction (mod 1) of monotone functions) 255; (Local domains of regularity of functions) 266.
- — s. Shlomo Sternberg 119.
- — s. Norbert Wiener 431.
- Wittich, Hans s. Hans Künzi 63.

- Wolf, E. (Intensity fluctuations in optical fields) 413.
- Wolfe, P. s. M. Dresher 310.
- s. Maurice Sion 331.
- Wolfowitz, J. (Coding of messages subject to chance errors) 325.
- Wolk, E. S. s. G. B. Robison 19.
- Wood, P. J. and G. S. Rushbrooke (High temperature susceptibility for Heisenberg model of ferromagnetic) 233.
- Wright, E. M. (Partitions of a bi-partite number) 36.
- s. G. H. Hardy 31.
- Henrik Georg von (Logical problem of induction) 5.
- Wu, Ta-You s. G. E. Tauber 449.
- Wunderlich, Walter (Hundekurven) 133.
- Wylie, S. (Intercept-finite cell complexes) 154.
- Yamada, Masami s. Fumiaki Iwamoto 197.
- Yang, C. N. s. T. D. Lee 208.
- T. s. D. Montgomery 162.
- Chung Tao (Problem of Montgomery) 163.
- Yano, Kenji (Cesàro summation for Fourier series) 55; (Jump functions) 56.
- Yasunaka, Kuniho (Vertices theorems) 354.
- Yen, Ti (Linearly compact algebras) 26.
- Yennie, D. R. s. R. H. Dalitz 207.
- Yin, Wen-Lin (Integers as sums of primes) 35.
- Yonezawa, H. s. M. Naruoka 391.
- Yosida, Kei (Electrical resistivity and magnetoresistance in Cu-Mn alloys) 229.
- Young, David s. J. L. Walsh 94.
- Yvon, J. (Corrélations dans les fluides quantiques) 224.
- Zagorskij, T. Ja. (Problèmes aux limites pour les équations différentielles du type parabolique) 88.
- Zajcev (Zaitsev), G. A. (Equation for a spin $1/2$ particle) 441.
- Žarkovskij (Zharkovskii), A. G. and O. M. Todes (Reflection of waves from an isotropic inhomogeneous layer) 187.
- Zassenhaus, Hans s. Samuel Bourne 21.
- Żelazko, W. (Divisors of zero of group algebra) 110.
- Zemanian, Armen H. (Hurwitz polynomials) 98; (Inequalities for Fourier transforms) 98.
- Zemmer, J. L. s. S. J. Bryant 27.
- Zervos, Spiros (Zéros des séries de Taylor) 256.
- Zetterberg, L. H. s. R. C. Kao 8.
- Ziegler, H. (Thermodynamik und rheologische Probleme) 389.
- Zienkiewicz, H. K. s. P. R. Owen 171.
- Zikrillae, F. (Briefwechsel von Biruni) 3.
- Zimmermann, W. s. V. Glaser 201.
- Zink, Robert E. (Regular measures) 44.
- Zinnes, I. I. (Hidden variables in quantum mechanics) 437.
- Žirnov (Zhirnov), V. A. and Ju. M. (Iu. M.) Širokov (Shirokov) (Two-graviton system) 191.
- Zubov, V. I. (Methoden von A. M. Ljapunov) 79.
- Zuchovickij (Zukhovitsky), S. I. (Berichtigung) 116.
- — — and G. I. Ėskin (Approximation of abstract continuous functions by operator-functions) 295.
- Zuckerman, Herbert s. Hans Rademacher 1.
- Zumino, Bruno (Relativistic hydromagnetics) 429.